ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. G. JÄGER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR. LADENBURG, PROF. DR. VON OPPOLZER,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN, PROF. DR. VON ZECH.

I. ABTHEILUNG.

II. THEIL:

HANDBUCH DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1879.

HANDBUCH

DER

MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN

VON

GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH

UNTER MITWIRKUNG

VON

DR. REIDT UND PROF. DR. HEGER.

MIT HOLZSCHNITTEN.

ERSTER BAND.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1879.

VORWORT.

Wenn die »Encyklopædie der Naturwissenschaften« mit einer der reinen Mathematik gewidmeten Abtheilung beginnt, so hat dies seinen guten Grund darin, dass jede Naturwissenschaft, welche nicht bloss beobachten und experimentiren sondern Naturgesetze erkennen will, die Hülfe der Mathematik nicht entbehren kann. Dies erklärt sich sehr einfach; denn ein Naturgesetz ist die Regel, nach welcher eine bestimmte Klasse von Naturerscheinungen vor sich geht; aber jeder Naturprocess erfolgt irgendwo d. h. an einer oder mehreren Stellen des Raumes, er hat seinen bestimmten Verlauf in der Zeit, er kann endlich mit grösserer oder geringerer Intensität d. h. mit gradweiser Verschiedenheit auftreten — es ist daher ohne Weiteres einleuchtend, dass man ein Naturgesetz nicht einmal präcis aussprechen geschweige denn verstehen kann, ohne von den mathematischen Bestimmungen räumlicher, zeitlicher und graduell verschiedener Grössen Gebrauch zu machen. Aus demselben Grunde besitzen schon die einfachsten Definitionen der Physik einen mathematischen Charakter (Dichtigkeit z. B. ist das Verhältniss der Masse zu deren Volumen), der sich bei eigentlichen Naturgesetzen zu mathematischen Formeln steigert (beim freien Falle eines Körpers z. B. wächst der durchlaufene Weg proportional dem Quadrate der verflossenen Zeit.)

Was nun die vorliegende Darstellung der Mathematik betrifft, so kann sie, gegenüber der kolossalen Ausdehnung der Wissenschaft, selbstverständlich keine erschöpfende sein, wol aber soll sie den Leser so weit führen, dass er eine ganze Reihe von Hauptwerken über Astronomie, Mechanik, Physik und Ingenieurwissenschaften lesen und sich nöthigenfalls weiter helfen kann. Das Ganze zerfällt in zwei Haupttheile, deren erster die niedere Mathematik (Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Stereometrie, Projectionslehre und Trigonometrie), und deren zweiter die höhere Mathematik (Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, Differentialrechnung, Integralrechnung

und einen Abriss der Wahrscheinlichkeitsrechnung) umfasst. Der erste Theil ist gewissermaassen die Formenlehre, der zweite die Syntax der mathematischen Sprache; der erste bindet allerdings den Studirenden an gewisse Formen, die nun einmal gelernt werden müssen, der zweite gewährt die freie Beweglichkeit, welche auf eigene Entdeckungen ausgehen kann. Liesse sich jener elementare Theil in demselben jugendlichen Alter absolviren, in welchem man das Decliniren und Conjugiren lernt, so würde das Vorurtheil, dass die Mathematik eine trockene Wissenschaft sei, sehr bald in das Gegentheil umschlagen. Vielleicht dient aber die vorliegende Darstellung dazu, um in weiteren Kreisen das Interesse für eine Wissenschaft zu verbreiten, die sich rühmen darf, nicht nur absolute Wahrheit zu liefern, sondern auch die Sprache zu verstehen, welche die Natur zu uns redet.

Dresden, 1879.

Schlömilch.

Inhaltsverzeichniss.

Arithmetik und Algebra

bearbeitet von Dr. F. Reidt in Hamm.

Planimetrie

bearbeitet von Dr. F. Reidt in Hamm.

Stereometrie

bearbeitet von Dr. F. Reidt in Hamm.

Trigonometrie

bearbeitet von Dr. F. Reidt in Hamm.

Darstellende Geometrie

bearbeitet von Dr. Richard Heger, Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

Arithmetik und Algebra.

Bearbeitet von

Dr. F. Reidt

in Hamm.

Einleitung.

Der Aufgabe, die Lehren der Elementar-Mathematik in einer für den Selbstunterricht geeigneten Weise zu entwickeln, kann nur dadurch genügt werden, dass die Forderung wissenschaftlicher Strenge und Eleganz nicht zur alleinigen Richtschnur gemacht, sondern daneben auch der leichten Verständlichkeit ein erheblicher Einfluss auf die Darstellungsweise eingeräumt wird. Deshalb war es nöthig, in dem vorliegenden Theil der »Encyklopädie«, welcher die ersten Anfänge mathematischen Wissens mittheilen soll, einen Gang einzuschlagen, welcher demjenigen des praktischen Schulunterrichts ähnlich ist, und vor Allem das Prinzip des Fortschritts vom Besonderen zum Allgemeinen an die Spitze zu stellen. Erst nachdem auf diesem Wege eine gewisse Summe mathematischer Kenntnisse und vor Allem ein bestimmter Grad des Verständnisses und der Uebung in der Behandlung mathematischer Gegenstände erreicht worden ist, darf jene Art der Darstellung Platz greifen, welche von den allgemeineren, die besonderen Fälle einschliessenden Gesetzen ausgeht und in der Form allein die Forderung wissenschaftlicher Eleganz stellt, ohne nöthig zu haben auf die durch diese Form nicht selten beeinträchtigte Erleichterung des Verständnisses für den Lernenden Rücksicht zu nehmen. So ist beispielsweise aus dem angeführten Grunde in der Geometrie darauf verzichtet worden, von Anfang an die allgemeineren Anschauungen und Untersuchungsweisen der neueren (synthetischen) Geometrie einzuführen, obgleich dies in jüngster Zeit vielfach selbst für den elementaren Schulunterricht verlangt worden ist. Verfasser ist der Ansicht, dass dadurch in der Praxis eher geschadet, als ein Gewinn erzielt wird, und dass erst ein auf den durch die ältere Methode geschaffenen Unterbau gegründetes weiteres Studium zu reifem Verständniss allgemeinerer Untersuchungen und Methoden führt.

Die Behandlung der sogenannten neueren Geometrie selbst lag ausserhalb des Rahmens dieser Schrift, doch sind im Anschluss an die Planimetrie die einfachsten Lehren derselben in analoger Behandlungsweise mit jener mitgetheilt worden, um wenigstens einen vorläufigen Einblick in dieselbe und eine Vorbereitung für ein besonderes Studium einschlägiger Schriften zu bieten und ausser-

dem eine Bezugnahme darauf bei entsprechenden analytisch-geometrischen Untersuchungen zu ermöglichen.

In der Arithmetik und Algebra ist in Betreff des Uebungsmaterials auf verbreitete Aufgaben-Sammlungen verwiesen worden, da eine umfangreiche Mittheilung solchen Materials zuviel Raum erfordert haben würde.

Durch wiederholtes Setzen einer Einheit, d. i. durch Zählen oder Numeriren, erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

welche ohne Ende fortschreitet. Eine solche Zahl ist also ein zusammenfassender Ausdruck für eine bestimmte Menge (Anzahl) gleichartiger Einheiten. Jede folgende Zahl der natürlichen Zahlenreihe ist um eine Einheit grösser als die nächst vorhergehende.

Durch Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen nach bestimmten Gesetzen, d. i. durch Rechnen, lassen sich aus jenen andere Zahlen ableiten, welche zu ihnen in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen. Von solchen Verbindungsweisen soll im Folgenden näher gehandelt werden.

Neben den — hier als bekannt vorausgesetzten — bestimmten Zahlzeichen (Ziffern und deren Verbindungen) bedient man sich zur Bezeichnung von Zahlen auch der Buchstaben. Es geschieht dies, wenn von einem bestimmten Werth der Zahl abgesehen werden, es also gestattet sein soll, sich unter dem gebrauchten Zeichen jede beliebige bestimmte Zahl vorzustellen. Dieser Gebrauch der Buchstaben findet namentlich zu dem Zwecke statt, die allgemeinen Regeln und Gesetze des Rechnens darzustellen, welche für alle Zahlen, ohne Rücksicht auf besondere Werthe, Geltung haben. Innerhalb derselben Rechnung ist dabei unter einem und demselben Buchstaben stets dieselbe Zahl zu denken, wenngleich, wie bemerkt, unbestimmt gelassen wird, welches ihr Werth ist.

Ausserdem gebraucht man die Buchstaben zur Bezeichnung solcher Zahlen, deren Werthe zwar nicht unbestimmt, aber unbekannt sind, also z. B. der gesuchten Grössen bei Rechnungs-Aufgaben. Man ist übereingekommen, zu dem letzteren Zweck in der Regel die letzten Buchstaben des Alphabets, dagegen als allgemeine Zahlzeichen vorwiegend die ersten zu benutzen.

Die allgemeine Arithmetik handelt von den Gesetzen der einfachsten Verbindungsweisen von Zahlen oder der sogenannten Grund-Rechnungsarten. Wegen des angeführten Gebrauchs der Buchstaben wird sie wol auch Buchstabenrechnung genannt.

In dem Begriff der Zahl liegen nach dem Obigen zwei Begriffe, nämlich derjenige einer ursprünglich gegebenen Grösse, der Einheit, und derjenige eines wiederholten Setzens dieser Einheit oder einer bestimmten Anzahl. Einheit kann jede Grösse sein, und ein und dasselbe Zahlzeichen kann daher sehr Verschiedenes bedeuten, je nachdem ihm verschiedene Einheiten zu Grunde liegen. Durch die Angabe der Einheit erhält die Zahl ihre Benennung (benannte Zahlen). Bei allgemeinen Untersuchungen kann die Einheit, welche den verschiedenen Zahlen derselben Rechnung gemeinsam zu Grunde liegt, unbestimmt gelassen werden (abstracte, unbenannte Zahlen).

Von der Einheit ist die Eins zu unterscheiden. Die letztere ist diejenige Zahl, welche das einmalige Gesetztsein der ersteren angiebt.

Dass zwei Zahlen a, b einander gleich sind, d. h. dieselbe Anzahl von Einheiten haben, wird durch $a = b$ bezeichnet. Ein derartiger Ausdruck heisst eine Gleichung; die Zahlen a, b heissen die Seiten der Gleichung, und das Zeichen $=$ wird gelesen »gleich.« Dagegen bedeutet $a > b$, dass a grösser als b, $a < b$, dass a kleiner als b ist.

I. Abschnitt: Die sieben Grund-Operationen.

Kapitel 1. Addition und Subtraction.

§ 1. Begriff der Addition.

Um aus zwei Zahlen a, b eine dritte c abzuleiten, kann man sich die Einheiten von b zu den Einheiten von a hinzugefügt, oder mit anderen Worten, die Zahl a um b Einheiten wachsend denken. Man sagt in diesem Fall, es solle b zu a addirt werden, nennt diese Operation (d. i. Rechnungsart) Addition, schreibt

$$a + b = c$$

und liest dies »a plus b gleich c.« Die Berechnung der neuen Zahl c geschieht dadurch, dass man von der Zahl a aus so lange weiter zählt, bis b Einheiten hinzugefügt sind.*) Die beiden Zahlen a und b haben also hierbei verschiedene Bedeutungen; die eine derselben, hier a, soll vermehrt werden und heisst deshalb der Augend; die andere, hier b, giebt an, um wieviele Einheiten a vermehrt werden soll, und heisst der Addend. Der Ausdruck $a + b$ heisst eine Summe, und die neue Zahl c als Resultat der Ausrechnung der Werth dieser Summe.

Die Aufgabe, den Werth von $a + b$ zu finden, ist hiernach durchaus verschieden von der Aufgabe, $b + a$ zu berechnen. In der Aufgabe $3 + 4$ z. B. soll mit der gegebenen Zahl 3 angefangen und um vier Einheiten weiter gezählt werden; in $4 + 3$ dagegen geht man von der Zahl 4 aus und zählt um drei Einheiten weiter. Der Werth der Summe aber ist in beiden Rechnungen nur von den Anzahlen der Einheiten, und nicht von der Reihenfolge abhängig, in welcher dieselben vereinigt wurden, also in beiden Fällen derselbe. Dieses Grundgesetz der Addition kann durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$a + b = b + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da also Augend und Addend einer Summe mit einander vertauscht werden dürfen, ohne dass der Werth der letzteren sich ändert, so erhalten jene beiden Zahlen auch den gemeinschaftlichen Namen Summanden oder Posten. — Dieselben müssen gleich benannt sein, und der Werth der Summe ist mit ihnen gleichbenannt. Beispiele: Heis, § 1. Bardey I, 1—3, 11; II, 1—3, 8, 14, 18.**)

---

*) Bei dem praktischen Rechnen, welches durch die Hülfe des zehntheiligen Zahlensystems alle Additionen auf solche von einziffrigen Zahlen zurückführt, wird dieses Weiterzählen durch die sehr bald erworbene gedächtnissmässige Kenntniss aller vorkommenden Summenwerthe ersetzt. Entsprechendes gilt bei den späteren Rechnungsarten.

**) Die den einzelnen Paragraphen oder Abschnitten beigegebenen Citate von Uebungs-

§ 2. Begriff der Subtraction.

Dem Addiren entgegengesetzt ist die Aufgabe, aus dem Werthe c einer Summe und einem ihrer Summanden a oder b rückwärts den anderen Summanden zu berechnen. Diese Aufgabe zerfällt in zwei verschiedene, je nachdem der gegebene Summand der Augend a oder der Addend b ist.

Die Aufgabe, aus dem Werthe c einer Summe und ihrem Augend a ihren Addend zu berechnen, also aus der Gleichung

$$a + x = c$$

den Werth der unbekannten Zahl x zu suchen, oder mit noch anderen Worten, die Anzahl der Einheiten zu bestimmen, um welche a vermehrt werden muss, damit man c erhalte, wird gelöst, indem man von der Zahl a aus so lange weiter zählt, bis man c erhält, und die Anzahl der zugezählten Einheiten ermittelt.

Die Aufgabe, aus dem Werthe c einer Summe und ihrem Addend b ihren Augend zu berechnen, also aus der Gleichung

$$y + b = c$$

den Werth der unbekannten Zahl y zu suchen, oder mit noch anderen Worten, diejenige Zahl zu bestimmen, zu welcher man b Einheiten hinzuzählen muss, damit man c erhalte, wird gelöst, indem man von der Zahl c aus um b Einheiten rückwärts zählt. In diesem Fall lässt man also die Zahl c um den vorausgesetzten früheren Zuwachs wieder abnehmen.

Da aber nach der Gleichung [1] die Vertauschung der Summanden einer Summe den Werth der letzteren nicht ändert, so kann man jede der beiden vorstehenden umgekehrten Rechnungsarten in die andere verwandeln, ohne dass ihr Resultat ein anderes wird.

Aus diesem Grunde erhalten die beiden Umkehrungen der Addition den gemeinsamen Namen Subtraction, und man sagt in beiden Fällen, dass der gegebene Summand von dem gegebenen Werth der Summe subtrahirt (abgezogen) werden solle. Den ersteren nennt man den Subtrahendus, den letzteren den Minuendus. Dass a von c subtrahirt werden soll, schreibt man

$$c - a$$

Man liest diesen Ausdruck »c minus a« und nennt denselben eine Differenz oder einen Rest.

Der Minuend c und der Subtrahend a einer Differenz müssen gleichbenannt sein; die Differenz ist mit ihnen gleichbenannt. Minuend und Subtrahend einer Differenz, sowie die Summanden einer Summe werden auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Glieder der Differenz oder Summe bezeichnet. Die Glieder einer Differenz können nicht, wie die der Summe, mit einander vertauscht werden, oder es ist (im Allgemeinen) $a - b$ nicht gleich $b - a$.

Dass jede der beiden, an sich ganz verschiedenen Arten der Subtraction auch dann ein richtiges Resultat giebt, wenn sie nach der Weise der anderen behandelt wird, hat dahin geführt, dass im praktischen Rechenunterricht gewöhnlich nur eine jener Arten gelehrt und geübt wird, und zwar meist jene durch Rückwärtszählen. Die in den österreichischen Schulen gebräuchliche

---

Beispielen beziehen sich auf folgende Werke: Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln, Du Mont Schauberg'sche Buchhandlung; und Bardey, Methodisch geordnete Aufgabensammlung, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. Wir beziehen uns auf diese Schriften, da die Beifügung von Uebungsmaterial in der erforderlichen Reichhaltigkeit den Umfang dieses Theiles des vorliegenden Werkes über Gebühr ausgedehnt haben würde.

andere Art verdient jedoch aus einem bei der Division zu erwähnenden praktischen Grunde den Vorzug, und es ist daher der Gebrauch derselben zu empfehlen. Folgendes Beispiel wird dazu hinreichende Anleitung geben: Bei der Aufgabe 58379 — 19297 rechne man: 7 plus 2 giebt 9, also ist die letzte Ziffer des Resultats **2**; 9 plus 8 ist 17, also ist die nächste Resultatziffer **8**; da aber die Summe nicht 7, sondern 17 war, so wird die 1 zur nächsten Ziffer 2 des Subtrahendus addirt, und man rechnet also weiter $3 + \mathbf{0} = 3$, dann ebenso $9 + \mathbf{9} = 18$, $2 + \mathbf{8} = 5$. Bei diesem Verfahren fällt auch das sogenannte Borgen oder Leihen weg. — Der praktische Rechner gewöhne sich übrigens auch daran, dass er bei dem Addiren und Subtrahiren nicht nöthig habe, die beiden Zahlen in der üblichen Weise unmittelbar unter einander zu schreiben.

Die Definition des Werthes einer Differenz kann nunmehr dahin ausgesprochen werden, dass derselbe diejenige Zahl sei, welche, zum Subtrahenden addirt, den Minuend giebt, und diese Erklärung lässt sich in der Formel

$$(c - a) + a = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

darstellen. Auch die folgenden Gleichungen, welche den Gegensatz zwischen Addition und Subtraction in anderen Formen darstellen, ergeben sich unmittelbar aus der vorstehenden Definition:

$$(a + b) - b = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$c - (c - b) = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In diesen Gleichungen (2) bis (4) — welche sich leicht in der Form von Rechnungs-Regeln in Worte übersetzen lassen — haben die Klammern ( ) die Bedeutung, dass die in denselben eingeschlossenen Ausdrücke als zuerst ausgerechnet, an Stelle derselben also die Resultate der betreffenden Rechnungen gesetzt gedacht werden sollen. Ueberhaupt werden oft statt des Werthes einer Summe $a + b$ oder einer Differenz $a - b$, wenn — wie bei Buchstaben-Rechnungen häufig vorkommt — die Berechnung nicht wirklich ausgeführt werden kann, diese Ausdrücke selbst in Klammern eingeschlossen, oder auch ohne letztere gesetzt, sofern die Bedeutung aus dem Zusammenhang hervorgeht und kein Missverständniss möglich ist. Ebenso werden unter gleicher Voraussetzung auch die Namen Summe und Differenz der Kürze halber statt Werth der Summe und Werth der Differenz gebraucht. HEIS, § 2 und § 8. BARDEY I, 4, 5, 12, 16—18, II 9, 10, 15, 19, 20.

§ 3. Reihenfolge der Operationen.

Sollen drei oder mehr Zahlen durch Addition oder Subtraction verbunden werden, so kann dies nur in der Weise geschehen, dass man zunächst zwei derselben miteinander verbindet und das Resultat an Stelle dieser beiden Zahlen einsetzt, darauf in dem nun vorliegenden, ein Glied weniger enthaltenden Ausdruck wieder zwei seiner Glieder vereinigt und so fortfährt, bis man zu einer einzigen Zahl, dem Gesammt-Resultat, gelangt.

Diese successive Berechnung kann in verschiedenen Reihenfolgen geschehen, und man erhält dabei nicht nothwendig immer dasselbe Resultat. Daher muss die Reihenfolge, welche im einzelnen Fall verlangt ist, angegeben werden, und dies geschieht in ähnlicher Weise, wie oben in den Gleichungen (2)—(4) durch Klammern. So ist z. B.

$$9 - [(4 + 3) - 1] = 9 - [7 - 1] = 9 - 6 = 3,$$

dagegen $(9 - 4) + (3 - 1) = 5 + 2 = 7,$

ferner $[9 - (4 + 3)] - 1 = [9 - 7] - 1 = 2 - 1 = 1$

und $[(9 - 4) + 3] - 1 = [5 + 3] - 1 = 8 - 1 = 7.$

Um jedoch eine Häufung der Klammern möglichst zu vermeiden, ist man übereingekommen, dieselben dann wegzulassen, wenn die verlangte Reihenfolge

dieselbe ist, wie die, in welcher die einzelnen Glieder in dem geschriebenen Ausdruck aufeinander folgen. Wo also Klammern fehlen, ist immer die Reihenfolge zu wählen, welche zugleich die der Schrift ist.

Hiernach können z. B. in dem letzten Fall des vorstehend benutzten Zahlenbeispiels alle Klammern weggelassen werden. Dagegen ist in dem ersten Fall dieses Beispiels nur die runde Klammer, in dem zweiten Fall die erste der beiden Klammern und in dem dritten die eckige wegzulassen. Ebenso ist z. B.

$$5 + 3 - 2 + 4 - 1,$$

wie folgt, auszurechnen: $5 + 3 = 8$; $8 - 2 = 6$; $6 + 4 = 10$; $10 - 1 = 9$. Dagegen ist in $8 + [5 - (3 + 1)] = 8 + (5 - 4) = 9$ keine Klammer entbehrlich. — Heis, § 6, No. 1—8. Bardey II, 46, 47.

Es entsteht nun die Frage, ob und in welcher Weise sich die Reihenfolge bei derartigen Rechnungen verändern lässt, ohne dass eine Aenderung des Resultats eintritt. Zur Beantwortung derselben untersuchen wir zunächst, welche Aenderung der Werth einer Summe oder Differenz erfährt, wenn man ein einzelnes Glied derselben als veränderlich betrachtet und dasselbe um irgend eine Grösse zu- oder abnehmen lässt. Aus den Begriffen der Summe und der Differenz ergiebt sich leicht, dass jede Veränderung eines einzelnen Summanden durch Addition oder Subtraction einer dritten Zahl die gleiche Veränderung im Werth der Summe hervorbringt, und dass dasselbe der Fall ist bei einer Differenz und ihrem Minuendus. Wird dagegen eine solche Veränderung am Subtrahendus vorgenommen, so erfährt die Differenz die entgegengesetzte Veränderung, d. h. ihr Werth wird kleiner, wenn der Subtrahendus grösser wird, und umgekehrt. Es folgt dies daraus, dass nach erfolgter Vergrösserung des einen Summanden der andere um ebensoviel Einheiten verkleinert werden muss, wenn der Werth der Summe unverändert bleiben soll. — Man erhält so vier einzelne Rechnungs-Regeln, welche in folgenden Gleichungen ausgesprochen sind:

$$a + b + c = a + c + b = a + (b + c) \quad \ldots \quad (5)$$
$$a + b - c = a - c + b = a + (b - c) \quad \ldots \quad (6)$$
$$a - b + c = a + c - b = a - (b - c) \quad \ldots \quad (7)$$
$$a - b - c = a - c - b = a - (b + c) \quad \ldots \quad (8)$$

Daher ist auch umgekehrt:

$$a + (b + c) = a + b + c = a + c + b \quad \ldots \quad (9)$$
$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b \quad \ldots \quad (10)$$
$$a + (b - c) = a + b - c = a - c + b \quad \ldots \quad (11)$$
$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b \quad \ldots \quad (12)$$

Man kann diese acht Formeln auch, wie folgt, zusammenstellen und in Worten aussprechen, sowie auf mehrgliedrige Ausdrücke erweitern:

1. Sollen mehrere Zahlen nach einander addirt oder subtrahirt werden, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

2. Statt mehrere Zahlen nach einander zu addiren, kann man ihre Summe auf einmal addiren, und statt mehrere Zahlen nach einander zu subtrahiren, kann man ihre Summe auf einmal subtrahiren.

3. Soll eine Zahl b addirt und eine andere c subtrahirt werden, so kann man statt dessen $b - c$ addiren oder $c - b$ subtrahiren.

4. Statt eine Summe oder eine Differenz zu addiren oder zu subtrahiren, kann man dieselbe Rechnung mit jedem einzelnen Summand und mit dem Minuend, dagegen mit dem Subtrahend die entgegengesetzte vornehmen.

Heis, § 7 und § 9—12; Bardey III, IV.

Mit Hülfe der vorstehenden Regeln lässt sich nun in jedem zusammengesetzten Ausdruck der oben erwähnten Art die Reihenfolge der Rechnungen so gestalten, dass nach dem getroffenen Uebereinkommen alle Klammern weggelassen werden können. Man nennt dies das Auflösen der Klammern. HEIS, § 6, 1—8.

So erhält man z. B. aus dem oben gebrauchten Ausdruck

$8 + [5 - (3 + 1)]$ zunächst nach Gleichung (11):

$8 + 5 - (3 + 1)$ und sodann nach (10): $8 + 5 - 3 - 1$.

§ 4. Negative Zahlen.

Die Addition einer Zahl zu einer anderen ist stets möglich, welche Werthe die beiden Summanden auch haben mögen, da die Zahlenreihe bis in's Unendliche fortschreitet. So lange man bei der Differenz $c - a$ voraussetzt, dass dieselbe aus einer wirklich ausgeführten Additions-Aufgabe durch Umkehrung derselben hervorgegangen sei, muss auch die Subtraction stets zu einem und, wie leicht zu ersehen, nur einem einzigen Resultat aus der natürlichen Zahlenreihe zurückführen. Setzt man dagegen für c und a willkürlich bestimmte Zahlenwerthe, so fragt es sich, ob die Aufgabe, $c - a$ zu berechnen, nothwendig eine Auflösung haben müsse. Man findet nun leicht, dass hier die drei Fälle zu unterscheiden sind, in welchen c grösser, ebenso gross oder kleiner als a ist, und dass nur in dem ersten Fall die Auflösung in dem bisherigen Sinne möglich ist. Die beiden anderen Fälle führen jedoch auf eine Erweiterung des Zahlenbegriffs, durch welche sie ebenfalls eine Bedeutung erhalten.

Ist $c = a$, so werden, wenn man von c aus um a Einheiten rückwärts zählt, sämmtliche vorhandene Einheiten weggenommen, sodass auch nicht eine derselben übrig bleibt. Man bezeichnet dieses Resultat durch 0 (Null). Die Null ist hiernach nicht etwa ein inhaltsleerer Begriff oder eine Bezeichnung für Nichts, sondern dieselbe enthält noch die Bezugnahme auf die Einheit, welche der betreffenden Rechnung zu Grunde liegt, indem sie das Dasein einer solchen verneint. Sie schliesst sich daher der natürlichen Zahlenreihe vor der 1 an.

Ist ferner $c < a$, und zählt man von c aus rückwärts, so bleiben, nachdem sämmtliche vorhandene Einheiten weggenommen sind, noch soviele Einheiten zum weiteren Rückwärtszählen übrig, als a mehr enthält, wie c, d. h. $a - c$. Um ein solches weiteres Rückwärtszählen möglich zu machen, müsste die Reihe der natürlichen Zahlen noch über die Null hinaus erweitert werden, es müssten sich also Zahlen angeben lassen, welche noch kleiner als Null wären. Dass dies nun in der That denkbar ist, soll zunächst durch ein Beispiel erläutert werden:

Geht Jemand um c Schritte in einer bestimmten Richtung vorwärts und darauf wieder um a Schritte rückwärts, so ist er im Ganzen um $c - a$ Schritte in jener Richtung nach vorwärts gelangt. Hierbei ist zunächst $c > a$ gedacht. Ist $c = a$, so gelangt er auf seinen Ausgangspunkt zurück, und es ist $c - a = a - a = 0$ zu setzen. Ist aber $c < a$, so kommt er nach einem Orte, welcher von dem Anfangspunkte aus nach der entgegengesetzten Richtung liegt, und zwar ist er dann um $a - c$ Schritte nach derselben vom Anfangspunkte entfernt.

Allgemeiner kann man sich die natürliche Zahlenreihe unter dem Bilde einer Reihe von Punkten vorstellen, welche von einem mit 0 bezeichneten Anfangspunkt aus nach derselben Richtung, also in gerader Linie, so liegen, dass je zwei benachbarte von einander gleich weit entfernt sind. Die einzelnen Zahlen geben dann die Abstände der Punkte vom Anfangspunkt an. Man sieht nun

ein, dass man in diesem Falle bei dem Rückwärtszählen von irgend einer Zahl aus in der That noch über die Null hinausgehen kann, indem man dann zu Punkten gelangt, welche auf derselben Geraden, aber nach der entgegengesetzten Richtung vom Anfangspunkte aus liegen. Man sieht zugleich, dass sich in dieser Weise die natürliche Zahlenreihe nach rückwärts in's Unendliche erweitern, und dass sich diese Erweiterung unter dem Bilde einer der ursprünglichen gleichen, aber nach der entgegengesetzten Richtung fortschreitenden Punktreihe versinnlichen lässt.

Weitere Beispiele einer Fortsetzung der Zahlenreihe unterhalb der Null liefern die Wärme- und Kälte-Grade der Thermometerskalen, nördliche und südliche geographische Breite, Drehung des Schenkels eines Winkels nach rechts und nach links, zukünftige und vergangene Zeit, Gewinn und Verlust u. dgl. m. In allen diesen Fällen ist die Null nicht der absolute Anfangspunkt der Zählung, sondern erscheint in der Mitte zweier einander entgegengesetzter Zahlenreihen.

Die hiernach denkbaren Zahlen, welche kleiner als Null sind, nennt man negative Zahlen, und im Gegensatz zu denselben diejenigen, welche grösser als Null sind, positive Zahlen. Bei dem Schreiben unterscheidet man beide Arten durch Vorsetzen des Zeichens + (plus) vor die positiven, des Zeichens — (minus) vor die negativen. Diese Zeichen sind als Vorzeichen von den ihnen entsprechenden Rechnungszeichen der Addition und Subtraction zu unterscheiden. Wo eine Verwechslung möglich ist, schliesst man die ersteren mit dem zugehörigen Zahlzeichen in eine Klammer ein, z. B. (+ 7) und (— 4).

Die Zahlenreihe ist nunmehr:

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \cdots,$$

und die Differenz $c - a$, in welcher der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, erhält hiernach die Bedeutung einer negativen Zahl, und zwar ist dieselbe gleich $-(a - c)$.

In praktischen Aufgaben haben negative Zahlen als Resultate nur dann Geltung, wenn ein solcher Gegensatz in der Richtung des Zählens, wie in den obigen Beispielen, wirklich existirt, die Null also nicht der absolute Anfangspunkt des Zählens ist. In der Forderung z. B., die Anzahl der Personen zu bestimmen, welche in einem Hause zurückbleiben, wenn von c überhaupt anwesenden a hinausgehen, giebt ein negativer Werth des Resultats $c - a$ die Unmöglichkeit der Auflösung an. Aber derselbe hat auch in diesem Fall noch einen weiteren Sinn; er zeigt nicht bloss einen Widerspruch in der Aufgabe, sondern giebt auch die Anzahl der Personen an, welche zu den vorher Anwesenden mindestens hinzutreten müssten, damit die Ausführung der Aufgabe möglich werde, also die Anzahl der zur Hebung des Widerspruchs fehlenden Personen.

Die positiven Zahlen sind diejenigen, welche als die ursprünglich gegebenen angesehen werden, die negativen diejenigen, welche als Gegensatz der ersteren auftreten. An sich kann also jede der beiden Hälften der Zahlenreihe als die positive gelten; die andere wird dann jedesmal durch den Gegensatz zu ihr die negative.

So sind z. B. in der Frage, welche Temperatur ein Thermometer gezeigt habe, nachdem es von 8° Wärme aus um 10° gefallen sei, die Wärmegrade als die positiven aufgefasst, und das Resultat ist $-2°$, d. h. 2 Grad Kälte. Fragt man dagegen, wieviel Grad Kälte ein Thermometer zeige, welches auf 8° Kälte gestanden habe und darauf um 10° gestiegen sei, so wird die Antwort darauf lauten dürfen: — 2° Kälte, d. i. dann 2° Wärme.

Existirt unter den Zahlen einer Rechnung nicht der angegebene Gegensatz der Richtungen, oder kommt derselbe nicht in Betracht, ist also auch seine Angabe durch Vorzeichen unterlassen, so heissen die Zahlen absolute. Dagegen

werden Zahlen, welche mit Vorzeichen versehen sind, algebraische (auch relative oder Richtungszahlen), und die entsprechenden absoluten, welchen die Vorzeichen vorgesetzt sind, die Glieder derselben genannt.

Treten in einer mit absoluten Zahlen operirenden Rechnung zu denselben ihnen entgegengesetzte Zahlen hinzu, wird also der Gegensatz der Richtungen in die Rechnung eingeführt, so erhalten die ersteren zufolge des vorstehend Gesagten das Vorzeichen $+$. In diesem Sinne kann man sagen, dass jeder absoluten Zahl das Vorzeichen $+$ gegeben werden könne.

§ 5. Rechnen mit Null und negativen Zahlen.

Die Erweiterung des ursprünglichen Zahlenbegriffs durch die Null und die negativen Zahlen macht auch eine Erweiterung der früheren Erklärungen der Addition und Subtraction für dieselben nothwendig. Es ergiebt sich leicht durch eine entsprechende Wiederholung des Gedankengangs in den Paragraphen 1—3, dass jene früheren Erklärungen und damit auch die aus ihnen abgeleiteten Gesetze und Formeln im Wesentlichen unverändert auf die neuen Zahlformen übertragen werden können. Im Einzelnen ist hierüber Folgendes zu erwähnen:

In Betreff der Null ergiebt sich unmittelbar aus ihrem Begriff, dass durch Addition derselben zu einer Zahl der Werth der letzteren nicht geändert wird. Die Gleichung

$$a + 0 = a$$

könnte in gleicher Weise, wie oben $a - a = 0$, als Definition der Null in Worte gefasst werden Ebenso folgt aus dem Begriff der Null leicht, dass auch

$$0 + a = a, \text{ also } a + 0 = 0 + a,$$

und

$$a - 0 = a$$

ist. Dagegen führt die Subtraction einer Zahl von Null in die jener Zahl entgegengesetzte Hälfte der Zahlenreihe, oder es ist

$$0 - a = -a.$$

Insbesondere ist auch $0 + 0 = 0 - 0 = 0$.

Die Bezeichnungen $+a$ und $-a$ sind durch Abkürzung aus $0 + a$ und $0 - a$ entstanden.

In Betreff der negativen Zahlen ergiebt sich aus dem Gegensatz, in welchem sie zu den positiven stehen, dass eine Zahl der einen Art durch Hinzufügung einer solchen der anderen Art um die entsprechende Anzahl ihrer eigenen Einheiten verkleinert, durch Hinwegnahme einer solchen entsprechend vergrössert wird, und dass Zahlen beider Arten mit gleich grossen Gliedern bei ihrer Addition einander aufheben. Man kann, mit anderen Worten, zu einer gegebenen Einheit sich eine entgegengesetzte Einheit denken, welche zu der ersteren hinzugefügt, dieselbe aufhebt, sodass also auch $(+1) + (-1) = 0$ ist. Bezeichnen wir nun die eine dieser Einheiten als die positive, die andere als die negative, so kann man sich die negativen Zahlen in gleicher Weise durch Zusammenfassen bestimmter Anzahlen aus der negativen Einheit, wie die positiven aus der positiven Einheit entstanden denken. Zwei Zahlen von beiden Arten, welche gleiche Anzahlen der betreffenden Einheiten enthalten, sollen entgegengesetzt gleich genannt werden; die Summe derselben ist gleich Null.

Haben zwei zu addirende Zahlen dasselbe Vorzeichen, so ist die Addition ein Weiterzählen in derselben Richtung der Zahlenreihe, daher ist

$$\begin{aligned}(+a) + (+b) &= +(a + b)\\ (-a) + (-b) &= -(a + b).\end{aligned} \quad (13)$$

Haben dagegen die Summanden verschiedene Vorzeichen, so bewirkt die Addition dasselbe Resultat, wie ein Weiterzählen in der entgegengesetzten Richtung; die Addition einer Anzahl von Einheiten entgegengesetzter Art mit denen des andern Summanden kann also durch Subtraction der gleichen Anzahl von Einheiten derselben Art ausgeführt werden. Diese Betrachtung führt zu den Regeln:

$$\begin{aligned}(+a)+(-b) &= +(a-b) = -(b-a)\\ (-a)+(+b) &= -(a-b) = +(b-a).\end{aligned} \quad (14)$$

Für die Addition algebraischer Zahlen besteht also die Regel: Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, so addirt man die Glieder (als absolute Zahlen) und giebt der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen. Haben die Summanden verschiedene Vorzeichen, so subtrahirt man die Glieder und giebt der Differenz das Vorzeichen, welches der Minuend hatte.

Bei bestimmten Zahlwerthen der Summanden wird man im letzteren Fall das Glied desjenigen zum Minuenden nehmen, welcher die grössere Anzahl von Einheiten hat; man subtrahirt also in diesem Fall das kleinere Glied vom grösseren und giebt der Differenz das Vorzeichen des grösseren.

So ist z. B. $(+7)+(+3)=+10$; $(-7)+(-3)=-10$,
dagegen $(+7)+(-3)=+4$; $(-7)+(+3)=-4$.

Für die Subtraction algebraischer Zahlen ergeben sich aus dem früher aufgestellten Begriff der Subtraction, bezw. durch Umkehrung der vorstehenden für die Addition die einzelnen Regeln. Man fasst dieselben jedoch am kürzesten dahin zusammen, dass sich jede Subtraction einer algebraischen Zahl ohne Aenderung des Resultats in die Addition der ihr entgegengesetzt gleichen Zahl verwandeln lässt.

Um also eine algebraische Zahl zu subtrahiren, ändere man das Vorzeichen des Subtrahenden und addire darauf (nach den Formeln 13 und 14).

So ist z. B.
$$\begin{aligned}(+7)-(+3) &= (+7)+(-3) = +4,\\ (+7)-(-3) &= (+7)+(+3) = +10,\\ (-7)-(+3) &= (-7)+(-3) = -10,\\ (-7)-(-3) &= (-7)+(+3) = -4.\end{aligned}$$

Heis, § 26, No. 1—2, 10, α—γ. 11—20, 35 α—ζ. Bardey V.

§ 6. Algebraische Summen.

Sollen drei oder mehr Zahlen mit einander verbunden werden, so müssen dieselben entweder sämmtlich algebraische oder sämmtlich absolute Zahlen sein. Da im ersteren Fall dieselben Rechnungsregeln gültig bleiben, welche im § 3 für den letzteren abgeleitet wurden, so können auch bei einer Verbindung beliebig vieler algebraischer Zahlen durch Addition und Subtraction die Klammern, welche die Reihenfolge der Operationen angeben, aufgelöst werden. Man kann aber ferner in diesem Fall jede vorkommende Subtraction in eine Addition der entgegengesetzt gleichen Grösse, und somit jeden solchen zusammengesetzten Ausdruck in eine Summe algebraischer Grössen verwandeln. Eine solche heisst eine algebraische Summe, im Gegensatz zu einer arithmetischen, deren Summanden absolute Zahlen sind. Dagegen heisst jede Verbindung absoluter Zahlen durch Addition und Subtraction ein Polynom (Binom, Trinom u. s. w., je nach der Anzahl der Glieder) oder ein Aggregat.

Da man nun jeder absoluten Zahl bei Einführung des Gegensatzes der

Richtungen das Vorzeichen + geben kann, so lässt sich auch jedes Polynom nach dem Vorigen in eine algebraische Summe verwandeln.

So verwandelt man z. B. das Polynom

$$a - b - c + d + e - f$$

zunächst in $(+a) - (+b) - (+c) + (+d) + (+e) - (+f)$, und darauf diesen Ausdruck in die algebraische Summe

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (+e) + (-f).$$

Man ist nun übereingekommen, bei einer solchen algebraischen Summe die Additionszeichen +, sofern kein Missverständniss stattfinden kann, und mit ihnen dann auch die entbehrlich gewordenen Klammern um die einzelnen Summanden, sowie das Vorzeichen des ersten Summanden, falls es + ist, wegzulassen. Man schreibt also die obige algebraische Summe kürzer

$$a - b - c + d + e - f.$$

In dieser Form ist dieselbe äusserlich von dem Polynom, aus welchem sie entstanden ist, in Nichts verschieden; der innere Unterschied liegt in dem Vorbehalt, dass die einzelnen Zeichen nicht, wie oben der Fall war, Rechnungszeichen der Addition und Subtraction, sondern Vorzeichen der betreffenden Glieder sein, und dass die so entstandenen algebraischen Zahlen sämmtlich addirt werden sollen.

Es folgt aber hieraus — da dieses Verfahren allgemein anwendbar ist — der Satz, dass jedes Polynom ohne Weiteres als eine algebraische Summe angesehen werden darf, indem man die Rechnungszeichen zu Vorzeichen macht, dem ersten Gliede noch das Vorzeichen + giebt und dann alle Glieder addirt.

Da nun nach den Gleichungen (5) und (9) des § 3, bezw. deren Erweiterung, die Summanden einer Summe in beliebiger Reihenfolge addirt werden dürfen, so kann nunmehr, unter Berücksichtigung der vorstehend entwickelten Gesetze, auch jedes beliebige Polynom in jeder zweckdienlichen Reihenfolge der einzelnen Grössen berechnet werden.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner unter Hinzuziehung der Regeln (9) und (10) des § 3:

Eine algebraische Summe kann addirt werden, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit unveränderten Vorzeichen addirt (bezw. hinzuschreibt), und

eine algebraische Summe kann subtrahirt werden, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit umgekehrten Vorzeichen addirt (bezw. hinzuschreibt).

Hiernach ergiebt sich die praktische Rechnungsregel: Steht vor einer Klammer +, so kann man dieselbe ohne Veränderung der Zeichen weglassen; steht vor einer Klammer —, so müssen vor dem Weglassen derselben alle Zeichen der einzelnen Glieder in ihr umgekehrt werden. Nachdem so alle Klammern entfernt sind, addirt man die einzelnen Glieder in beliebiger, bezw. der zweckdienlichsten Reihenfolge, indem man die Zeichen als Vorzeichen behandelt. Heis, § 13a. Bardey V.

Kapitel 2.

Multiplication und Division.

§ 7. Begriff der Multiplication.

Sind alle Summanden einer Summe einander gleich, so heisst die Summe ein Produkt. Die Anzahl der Summanden heisst der Multiplicator, ein einzelner der Summanden der Multiplicandus. Man schreibt ein Produkt, indem man den Multiplicandus und den Multiplicator durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$, gelesen »mal«, mit einander verbindet, z. B.

$$a + a + a = a \cdot 3; \quad a + a + a + a + \ldots = a \cdot b.$$

Die Berechnung des Werthes eines Produkts nennt man Multipliciren. Bei diesen Erklärungen sind zunächst nur absolute Zahlen vorausgesetzt.

Bei Buchstaben-Ausdrücken kann man auch, sofern ein Missverständniss nicht möglich ist, das Multiplicationszeichen $\times$ oder $\cdot$ weglassen, und also z. B. statt $a \cdot b$ kürzer ab, sowie statt $3 \cdot a$, $3a$ schreiben.

Zwischen dem Multiplicator und dem Multiplicandus eines Produkts besteht hiernach ein wesentlicher Unterschied, der besonders deutlich bei der Anwendung auf benannte Zahlen hervortritt. In diesem Fall kann nur der Multiplicandus benannt sein; der Multiplicator ist stets unbenannt, da er nur die Anzahl der gleichen Summanden in dem Produkt angiebt.

Man kann sagen, die Einheit, auf welche sich der Multiplicator beziehe, sei der Multiplicandus, oder mit anderen Worten, die Bestimmung des Werthes eines Produkts sei ein erweitertes Zählen, indem statt der Einheit der Multiplicandus genommen wird. Daher findet man ein Produkt auch definirt als diejenige Zahl, welche aus dem Multiplicandus entstehe, wie der Multiplicator aus der Einheit.

Zerlegt man den Multiplicandus des Produkts ab in seine Einheiten, so kann man die ab Einheiten nach folgendem Schema ordnen:

$$\begin{array}{l} \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \overset{a}{\cdots} \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ b) \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \end{array}$$

Da nun der Werth des Produkts bloss von der Gesammtzahl der Einheiten abhängig ist, so kann man auch die je b Einheiten einer Vertical-Colonne zu einer Zahl zusammenfassen, und hat sodann diese Zahl b im Ganzen a mal als Summand. Somit ist

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (15).$$

Da nach diesem Grundgesetz der Multiplication Multiplicator und Multiplicandus eines Produkts vertauscht werden dürfen, so erhalten beide den gemeinschaftlichen Namen Faktoren.

Bei dieser Vertauschung ist jedoch zu beachten, dass bei benannten Zahlen auch die Benennung von dem alten auf den neuen Multiplicandus zu übertragen ist. — Das Produkt ist mit dem Multiplicandus gleich benannt.

Beispielsweise sind die beiden Produkte 4 Meter $\cdot$ 3 und 3 Meter $\cdot$ 4 der Entstehung nach durchaus verschieden, denn das erstere bedeutet die Summe 4 Meter + 4 Meter + 4 Meter, das letztere 3 Meter + 3 Meter + 3 Meter + 3 Meter. Das Resultat aber ist für beide dasselbe. — Ein Ausdruck wie 4 Meter $\cdot$ 3 Meter dagegen ist sinnlos.

Heis, § 3. Bardey I, 6, 7, 13 u. s. w.

§ 8. Begriff der Division.

Wie aus der Addition die Subtraction, so entsteht auch aus der Multiplication durch Umkehrung eine neue Rechnungsart. Auch hier stehen der Bildung des Produkts $a \cdot b = c$ zunächst zwei Umkehrungen gegenüber, da zu dem Werthe c des Produkts entweder der Multiplicator oder der Multiplicandus als gegebener Faktor hinzutreten kann. Zufolge des Gesetzes $ab = ba$ können aber auch hier die beiden Umkehrungen in der Ausführung in derselben Weise behandelt werden, und deshalb erhalten sie den gemeinsamen Namen Division. Dividiren heisst also zu dem gegebenen Werthe eines Produkts und seinem einen Faktor den anderen Faktor suchen. Den gegebenen Werth c des Produkts nennt man den Dividendus, den gegebenen Faktor a den Divisor. Dass »c durch a dividirt« werden soll, bezeichnet man durch die Form $c : a$ oder $\frac{c}{a}$, welche man einen Quotienten nennt. Der Werth des Quotienten ist also der gesuchte Faktor.

Da man bei Buchstaben-Ausdrücken häufig eine Ausrechnung des Werthes des Quotienten nicht ausführen kann, so setzt man in solchen Fällen statt desselben auch den Quotienten selbst, sofern eine Verwechslung nicht möglich ist. Aehnliches gilt von einem Produkt und seinem Werth. Auch gebraucht man die Namen Produkt und Quotient der Kürze wegen oft statt der weitläufigeren: Werth des Produktes oder des Quotienten, sofern die gemeinte Bedeutung aus dem Zusammenhang klar hervorgeht.

Die beiden Arten der Division dürfen nach dem Obigen wol in der Ausführung, keineswegs aber den Begriffen nach verwechselt werden. In Folge des schärferen Unterschiedes zwischen Multiplicator und Multiplicandus tritt auch der Unterschied der beiden Divisionen schärfer hervor als derjenige der beiden Subtractionen, wie sich besonders durch Beispiele mit benannten Zahlen verdeutlichen lässt. Ist z. B. zu dem Produkte 5 Meter $\cdot$ 3 = 15 Meter der Multiplicandus gegeben, so wird gefragt, wie oft sind 5 Meter in 15 Metern enthalten? Ist dagegen der Multiplicator gegeben, so wird gefragt, wieviel beträgt der dritte Theil von 15 Metern? Bei der ersteren Division sind also Dividendus und Divisor gleich benannte Grössen, und der Quotient ist eine blosse Anzahl (auch eine »reine Zahl« genannt); bei der letzteren Division dagegen ist der Quotient mit dem Dividendus gleich benannt, und der Divisor eine unbenannte Zahl. Im ersten Fall werden also zwei gleichartige Grössen mit einander verglichen, wobei die eine, der Divisor, als ein Maass der anderen betrachtet werden kann, von welchem angegeben werden soll, wie oft es in dieser enthalten ist. Daher kann man diese Art der Division als Messen bezeichnen; der Quotient derselben heisst das Verhältniss des Dividendus zum Divisor. Diese Division lässt sich ausführen durch wiederholtes Subtrahiren des Divisors vom Dividendus, bezw. den Resten, und Abzählen der Anzahl der möglichen Subtractionen. Die zweite Art der Division dagegen kann Theilen, der Quotient derselben ein Theil genannt werden. Hier ist nicht eine gegebene Zahl so oft als möglich zu subtrahiren, sondern es ist umgekehrt zu der gegebenen Anzahl der Subtractionen die Zahl zu suchen, welche so oft subtrahirt werden kann. — Heis, § 4.

Die Definition des Werthes eines Quotienten kann nach dem Früheren für beide Fälle dahin ausgesprochen werden, dass derselbe diejenige Zahl bedeute, deren Produkt mit dem Divisor gleich dem Dividendus sei; und diese Erklärung lässt sich in der Formel

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \quad (16)$$

darstellen. Auch die folgenden Gleichungen, welche den Gegensatz zwischen Division und Multiplication in anderen Formen ausdrücken, ergeben sich unmittelbar aus dieser Erklärung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a \cdot b}{b} &= a \\ a : \frac{a}{b} &= b. \end{aligned}\right\} \quad (17).$$

HEIS, § 4, § 17, N. 1—19, 33—34. BARDEY I.

In der Praxis bedient man sich zur Ausführung der Division in der Regel des Verfahrens bei der oben zuerst genannten Art, d. h. einer mehrfachen Subtraction, während der Name Division eher von der zweiten Art, dem Theilen, gebildet ist. Bei jener praktischen Ausführung erweist sich das früher erwähnte Verfahren der Subtraction als besonders zweckmässig, da man auch bei mehrziffrigen Zahlen nicht nöthig hat, die Theilprodukte, sondern nur die jedesmaligen Reste hinzuschreiben. Folgendes Beispiel möge dies näher erläutern: Es sei 59858 : 173 zu berechnen. Der erste Theilquotient 3 wird mit 173 multiplicirt und sogleich von 598 subtrahirt, indem man rechnet: $3 \cdot 3 = 9$; $9 + 9 = 18$; $3 \cdot 7 = 21$, dazu die 1 von der vorigen 18 addirt, giebt 22; $2 + 7 = 9$; endlich $3 \cdot 1 = 3$, dazu die 2 von den 22 addirt, giebt 5, $5 + 0 = 5$; also ist der erste Rest 79. In dieser Weise wird fortgefahren, sodass die ganze Ausrechnung nur folgende geschriebene Ziffern enthält:

$$\begin{array}{l} 59858 : 173 = 346 \\ \;\;795 \\ \;\;1038 \end{array}$$

Bei dieser Gelegenheit mag noch darauf hingewiesen werden, dass auch bei dem Multipliciren mehrziffriger ganzer Zahlen die im gewöhnlichen Unterricht gelehrte Form nicht immer die praktisch bequemste ist. Man gewöhne sich, die Faktoren nicht unter, sondern neben einander zu schreiben und mit der höchsten Ziffer des Multiplicators zu beginnen, sodass die Theilprodukte nach rechts statt nach links eingerückt werden, wie folgendes Beispiel zeigt

$$\begin{array}{l} \;\;3295 \cdot 742 \\ \hline 23065 \\ \;\;13180 \\ \;\;\;\;6590 \\ \hline 2444890 \end{array}$$

Der Vortheil dieser Schreibweise ergiebt sich später bei der sogenannten abgekürzten Multiplication.

§ 9. Gebrochene Zahlen.

Wie bei der Subtraction, so ensteht auch bei der Division die Frage, ob dieselbe auch dann immer ausführbar ist, wenn die Werthe des Dividendus und des Divisors nicht durch Umkehrung einer wirklich ausgeführten Multiplication entstanden sind, sondern wenn für dieselben willkürlich bestimmte Zahlen gesetzt wurden. Auch hier lassen sich drei Fälle unterscheiden:

In dem ersten derselben ist der Dividendus a des Quotienten $a : b$ ein Vielfaches des Divisors b, d. h. er kann aus b durch wiederholtes Setzen des letzteren als Summand abgeleitet werden. In diesem Falle ist die Division im bisherigen Sinne ausführbar und führt stets auf einen einzigen bestimmten Werth des Quotienten.

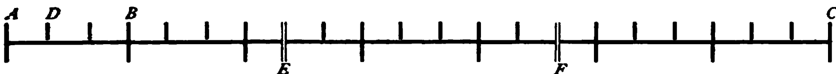
Im zweiten Fall ist $a = b$. Nach der Erklärung der Multiplication ist $1 \cdot a = 1 + 1 + 1 + \ldots = a$ zu setzen, dagegen hat $a \cdot 1$ als eine Summe mit nur einem Summanden keinen Sinn. Es kann jedoch auch dem Ausdruck $a \cdot 1$ eine Bedeutung beigelegt werden, und diese kann consequenter Weise nur die sein,

dass die Zahl a einmal gesetzt werden soll, ohne dass ihr ein Summand zugefügt wird, sodass also $a \cdot 1 = a$ ist und somit auch hier der Satz $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ besteht. Da nämlich der Werth von $a \cdot b$ sich jedesmal um die Zahl a vermindert, wenn der Multiplicator um 1 abnimmt, sodass $a \cdot 3 = a \cdot 4 - a$, $a \cdot 2 = a \cdot 3 - a$ ist, so muss dem Produkte $a \cdot 1$ ebenfalls ein um a kleinerer Werth als dem Produkte $a \cdot 2$ beigelegt werden. Die Aufgabe, den Werth des Quotienten $a : a$ zu bestimmen, also die Zahl zu suchen, deren Produkt mit a gleich a ist, muss hiernach umgekehrt unter allen Umständen zu dem Resultate 1 führen. Es lässt sich hiernach dieser Fall dem vorher erwähnten ersten anschliessen.

Anders verhält es sich im dritten Fall. Es ist nämlich auch möglich, dass der Dividendus nicht aus dem Divisor durch Multiplication mit einer den bisher bekannten Arten angehörigen Zahl abgeleitet werden kann, dass also a kein Vielfaches von b ist. In diesem Falle muss, nachdem man b so oft als möglich von a subtrahirt hat, ein Rest übrig bleiben, welcher kleiner als b ist. So ist z. B. die Divisions-Aufgabe $7 : 3$ in dem bisherigen Sinne nicht ausführbar, denn es giebt kein Produkt von 3 mit einer der bisher behandelten Zahlen, dessen Werth gleich 7 wäre, und bei dem Versuche, die Division durch wiederholte Subtraction des Divisors auszuführen, bleibt hier nach zweimaliger Subtraction der Rest 1.

Es führt aber dieser Fall auf eine Erweiterung des Zahlenbegriffs, d. h. auf eine bisher noch nicht behandelte Zahlform, durch welche auch solche Quotienten einen Sinn erhalten. Dies geschieht durch die Annahme einer theilbaren Einheit.

Es sei beispielsweise die Einheit eine Strecke AB, so lässt sich dieselbe in drei gleiche Theile theilen, und jeder solche Theil, z. B. AD, hat die Eigen-



schaft, dass er, dreimal als Summand gesetzt, zur Summe die Einheit giebt. Ebenso lässt sich dann die sieben solche Einheiten enthaltende Strecke AC in drei gleiche Theile AE, EF, FC theilen, und jeder solche Theil entspricht dem Begriff des Quotienten $\frac{7}{3}$, d. h. er giebt dreimal genommen die Strecke 7. Zugleich sieht man, dass die letztere durch Theilung ihrer sämmtlichen Einheiten in je drei gleiche Theile in $3 \cdot 7 = 21$ solche »Drittel« der Einheit getheilt wird, und dass somit der Werth des Quotienten $\frac{7}{3}$ aus sieben solchen Dritteln besteht. Allgemein, lässt sich die Einheit in b gleiche Theile theilen, so erhält der Quotient $\frac{1}{b}$ gemäss der früheren Definition des Quotienten die Bedeutung eines solchen Theiles. Die aus a Einheiten bestehende Zahl lässt sich dann ebenfalls in b gleiche Theile theilen, und jeder solche Theil ist gleich $\frac{a}{b}$ zu setzen. Da ferner die Zahl a durch Theilung einer jeden ihrer Einheiten in b gleiche Theile im Ganzen $a \cdot b$ dieser Theil-Einheiten erhält, so ist der Quotient $\frac{a}{b}$ stets gleich der durch Zusammenfassen von a solchen »$b$teln« der Einheit entstehenden Zahl, oder es ist

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Die so entstehenden Zahlen, welche also gleich einem von mehreren gleichen Theilen der Einheit oder gleich einer Anzahl solcher Theile sind, nennt man

gebrochene Zahlen oder Brüche. Der Dividendus wird in diesem Fall auch der Zähler, der Divisor der Nenner des Bruchs genannt. Im Gegensatz zu den Brüchen heissen die bisher behandelten Zahlen ganze Zahlen.

Wie man bei der Berechnung eines Produktes $a\,b$ sich durch Zusammenfassen von b Einheiten eine neue Einheit entstanden denken und das Produkt als die a solche Einheiten enthaltende Zahl auffassen konnte, so kann man auch den Bruch $\frac{a}{b}$ als eine Zahl betrachten, welche durch Veränderung der Einheit entsteht. Im Gegensatz zur Multiplication ist hier die neue Einheit, statt eines Vielfachen der ursprünglichen, ein (aliquoter) Theil derselben. Die Zahl $\frac{a}{b}$ bedeutet hiernach eine Anzahl von a Einheiten, von denen jede der $b$te Theil der ursprünglichen Einheit ist. Diese Auffassung des Quotienten gilt nicht bloss für die gebrochenen Zahlen; sie bleibt auch gültig, wenn a gleich b und wenn a ein Vielfaches von b ist. Mit anderen Worten, es kann jede Division, auch wenn eine Theilung der Einheit zur Ausführung derselben nicht nöthig ist, doch mittelst einer solchen ausgeführt gedacht werden. Deshalb schliesst man in den Begriff des Bruches in der Praxis oft auch diejenigen Quotienten ein, bei welchen sich der Dividendus durch den Divisor selbst ohne Rest theilen lässt, wie z. B. $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{2}$ u. s. w. (Uneigentliche Brüche im Gegensatz zu den eigentlichen.)

Jede ganze Zahl kann nach dem eben Gesagten in die Form einer gebrochenen gebracht werden, und zwar ist

$$a = \frac{ab}{b}$$

Durch die gebrochenen Zahlen wird die früher unter dem Bilde einer Reihe von Punkten dargestellte Zahlenreihe in der Art weiter ausgefüllt, dass zwischen je zweien der bisherigen Punkte beliebig viele andere in gleichen Abständen von einander eingeschaltet, die Zwischenräume also entsprechend verengert werden können. Je grösser der Nenner des Bruches ist, desto kleiner werden diese Zwischenräume, und die einzelnen Punkte können daher einander über jede gegebene Grenze hinaus genähert werden. Man darf jedoch nicht folgern, dass auf diese Weise die Reihe discreter Punkte in eine continuirliche (eine Zahlenlinie) verwandelt werden könne. Die Entscheidung dieser Frage kann erst an einer späteren Stelle gegeben werden. — Heis, § 20.

§ 10. Rechnen mit Brüchen.

Es ist nun zu untersuchen, ob die früheren Begriffe und Gesetze der Addition und Subtraction, welche unter der Voraussetzung ganzer Zahlen abgeleitet waren, auch für die neue Zahlform des Bruches Geltung behalten, bezw. welches die Gesetze des Rechnens mit Produkten und Quotienten sind.

Nimmt man in einem Bruche $\frac{a}{b}$ den Zähler und den Nenner als veränderlich an, so sieht man leicht ein, dass durch Vergrösserung des Zählers bei unverändertem Nenner die Anzahl der Theile der Einheit vermehrt wird, während diese Theile selbst ihre Grösse nicht ändern, dass also der Bruch grösser wird. Genauer ergiebt sich, dass durch Multiplication des Zählers der Bruch mit derselben Zahl multiplicirt wird. — Vergrössert man dagegen den Nenner bei unverändertem Zähler, so wird die Einheit in eine grössere Anzahl von Theilen getheilt, diese Theile selbst werden also entsprechend kleiner, und da die Anzahl a derselben unverändert geblieben ist, so muss auch der Bruch entsprechend verkleinert sein. Durch Multiplication des Nenners wird hiernach der Bruch durch

dieselbe Zahl dividirt. — Entsprechend findet man, dass ein Bruch durch Division des Zählers dividirt, durch Division des Nenners multiplicirt wird.

Hieraus folgt, dass der Werth eines Bruches unverändert bleiben muss, wenn man den Zähler und den Nenner zugleich mit derselben Zahl multiplicirt oder wenn man beide durch dieselbe Zahl dividirt, oder es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a : n}{b : n}.$$

Die erstere Umformung nennt man Erweitern, die letztere Heben des Bruches.

Mit Hülfe des Erweiterns lässt sich stets bewirken, dass zwei oder mehrere gegebene Brüche denselben Nenner erhalten. Erweitert man nämlich jeden der beiden Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ mit dem Nenner des anderen, so erhält man für dieselben $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. Ist noch ein dritter Bruch $\frac{e}{f}$ gegeben, so kann man nun diesen mit bd und jeden der beiden ersteren mit f erweitern; bei einer noch grösseren Anzahl von Brüchen fährt man in derselben Weise fort.

Brüche, welche gleiche Nenner haben, heissen gleichnamige, solche mit ungleichen Nennern ungleichnamige Brüche.

Gleichnamige Brüche können als Zahlen angesehen werden, welche sich auf dieselbe Einheit beziehen, nämlich auf den durch den Nenner bestimmten aliquoten Theil der ursprünglichen Einheit.

Da nun beliebig gegebeneBrüche stets gleichnamig gemacht werden können und auch jede ganze Zahl auf die Form eines Bruches mit demselben Nenner gebracht werden kann, so lassen sich die früheren Erklärungen und die aus diesen abgeleiteten Gesetze des Addirens und des Subtrahirens auch auf die neue Zahlform der Brüche anwenden. Man hat zu diesem Zwecke nicht einmal immer nöthig, die Umformung der einzelnen Zahlen der Rechnung, um allen denselben Nenner zu geben, wirklich auszuführen, sondern es genügt, dies als geschehen zu denken, während man statt der durch die Umformung entstehenden Brüche die ursprünglichen, ihnen gleichwerthigen Zahlen als Stellvertreter derselben bei dem Schreiben und Aussprechen beibehalten kann. So kann man also z. B. ohne Weiteres nach § 3, (6)

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} - \frac{e}{f}\right) + \frac{c}{d}$$

setzen, da man nur nöthig hat, sich behufs der Addition und Subtraction alle drei Brüche auf den gemeinsamen Nenner bdf gebracht zu denken; nur zur wirklichen Ausführung der Rechnung ist es nöthig, auch das Gleichnamigmachen wirklich auszuführen.

Nachdem so die Anwendbarkeit der früheren Entwicklungen auf die neue Zahlform nachgewiesen ist, sollen im Folgenden die speciellen Gesetze des Rechnens mit Produkten und Quotienten im allgemeineren Sinne abgeleitet werden.

§ 11. Multiplication und Division von Summen und Differenzen.

Sollen drei oder mehr Zahlen durch Multiplication und Division unter sich, oder daneben durch Addition und Subtraction verbunden werden, so wird wieder die Angabe der Reihenfolge der Verknüpfungen nöthig. Dies geschieht auch hier durch Klammern. Um jedoch einer Häufung der letzteren möglichst vorzubeugen, ist man übereingekommen, die Multiplication und Division als enger

verbindend wie die Addition und Subtraction zu betrachten, sodass alle diejenigen Klammern weggelassen werden können, welche nur den Zweck haben, eine der ersteren Operationen als einer der letzteren vorangehend zu bezeichnen. **Abgesehen hiervon** werden auch hier diejenigen Klammern weggelassen, welche dieselbe Reihenfolge angeben, wie die, in welcher die Zahlen selbst in dem betreffenden Ausdruck aufeinander folgen. Man schreibt also z, B. statt $(a \cdot c) + b$ kürzer $a \cdot c + b$, statt $a - (b \cdot c)$, $a - b \cdot c$, statt $(ab)\,c$, abc, dagegen $a \cdot (c + b)$ u. dgl. m. mit Klammer. Der horizontale Divisionsstrich kann eine Klammer ersetzen; so schreibt man z. B. $a : (b : c)$ oder $a : \frac{b}{c} \cdot$ Heis, § 6, No. 9—21.

Wir stellen nun im Folgenden zunächst die einfachsten Rechnungsregeln zusammen, welche bei Verbindung der beiden neueren Operationen mit den beiden früheren vorkommen.

Da $(a \pm b) \cdot c = (a \pm b) + (a \pm b) + (a \pm b) + \ldots$
$= (a + a + a + \ldots) \pm (b + b + b + \ldots)$
gesetzt werden kann, so ist

$$(a \pm b) \cdot c = ac \pm bc, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

d. h. **eine Summe oder Differenz kann mit einer Zahl multiplicirt werden, indem man jedes Glied mit dieser Zahl multiplicirt und dann die Partialprodukte entsprechend addirt oder subtrahirt.** Analoges gilt umgekehrt für die Multiplication einer Zahl mit einer Summe oder Differenz, d. h. es ist

$$a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac,$$

wie aus der Verbindung von (18) mit (15) folgt.

Die vorstehende Regel kann ferner leicht auf die Multiplication von Summen mit beliebig vielen Summanden oder von Polynomen ausgedehnt werden. So ist z. B.

$$(a + b - c - d) \cdot k = ak + bk - ck - dk.$$

Durch Umkehrung dieser Regel ergiebt sich sodann, dass jedes Polynom aus Produkten, die einen gemeinsamen Faktor haben, gleich dem Produkt aus diesem Faktor und dem entsprechend gebildeten Polynom der nicht gemeinschaftlichen Faktoren gesetzt werden kann. So ist z. B.

$$7a - 7b + 7c = 7\,(a - b + c).$$

Man nennt diese Umformung das **Absondern des gemeinschaftlichen Faktors.**

Als weitere Beispiele des Gebrauchs der vorstehenden Regeln mögen die folgenden dienen:

$$3x - 5\,(y + z) = 3x - (5y + 5z) = 3x - 5y - 5z;$$
$$a - b\,.\,(c - d) = a - (bc - bd) = a - bc + bd.$$

Umgekehrt kann man für $3x - 5y - 5z$ setzen $3x - 5\,(y + z)$. Entsprechend ist

$$2a - 3b + 3c = 2a - 3(b - c) \text{ oder } 2a + 3(c - b);$$
$$7x + 2\,(y + z - u) = 7x + 2y + 2z - 2u;$$
$$5a + 3b - 4\,(a - b - c) = 5a + 3b - 4a + 4b + 4c.$$
$$am + bm + cm - an - bn - cn = (a + b + c)\,m - (a + b + c)\,n = (a + b + c)\,(m - n).$$

Heis, § 14.

Eine zweite Erweiterung der vorstehenden Regel (18) ergiebt sich durch wiederholte Anwendung derselben in

$$(a + b).(c + d) = a.(c + d) + b.(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Ueberhaupt erhält man auf diese Weise für die Multiplication zweier Binome die vier Regeln:

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd\\(a+b)\cdot(c-d)=ac-ad+bc-bd\\(a-b)\cdot(c+d)=ac+ad-bc-bd\\(a-b)\cdot(c-d)=ac-ad-bc+bd.\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Dieselben lassen sich auf die Multiplication beliebig vielgliedriger Polynome erweitern. Man erhält auch für diese die Regel:

Man multiplicire jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des anderen und verbinde jedes Partial-Produkt mit den übrigen durch Addition oder Subtraction, je nachdem seine Faktoren in den ursprünglichen Polynomen durch gleiche oder durch verschiedene Rechnungszeichen verbunden waren.

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel kann nun auch die Multiplication von drei, oder überhaupt von beliebig vielen Polynomen nacheinander ausgeführt werden.

Als besondere Fälle der obigen Regeln (19) sind noch folgende Formeln bemerkenswerth:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2,$$

wobei $(a\pm b)^2$, a^2, b^2 als Abkürzungen für $(a\pm b)(a\pm b)$, aa und bb dienen.

Die dritte dieser Regeln wird häufig in umgekehrter Gestalt angewendet, um Differenzen von der Form a^2-b^2 in Produkte zu verwandeln.

Heis, § 16.

Aus der Formel (18) folgt endlich durch Umkehrung der Operation, dass eine Summe oder Differenz auch dividirt werden kann, indem man jedes Glied durch den Divisor dividirt und dann die Partial-Quotienten entsprechend addirt oder subtrahirt, oder dass

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ist. Denn dieser Satz behauptet zufolge der Erklärung des Quotienten nach (16), dass die rechte Seite der Gleichung derjenigen Zahl gleich sei, deren Produkt mit c den Werth $a\pm b$ habe. Es ist also zum Beweis der Richtigkeit der Formel nur zu zeigen, dass in der That

$$\left(\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}\right)\cdot c=a\pm b$$

ist, was leicht mit (18) und (16) geschehen kann.

Die Ausdehnung des Satzes (20) auf die Division eines beliebigen Polynoms durch eine Zahl bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Umgekehrt folgt, dass beliebig viele Quotienten, welche denselben Divisor haben, addirt oder subtrahirt werden können, indem man die Dividenden in entsprechender Weise addirt oder subtrahirt, und das Resultat durch den gemeinsamen Divisor dividirt. So ist also z. B.

$$\frac{3a-2b}{a-b}+\frac{4a-b}{a-b}-\frac{3m+2n}{a-b}=\frac{3a-2b+4a-b-3m-2n}{a-b}$$

Heis, § 19, 1—29.

§ 12. Multiplication und Division von Produkten und Quotienten.

Für die Multiplication und Division von Produkten und Quotienten ergeben sich die nachfolgenden Regeln:

$$abc = acb = a(bc), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

denn $(ab)c = ab + ab + ab \ldots ^c$ kann nach (18) sowol gleich $(a + a + a + \ldots ^c)\, b$, d. i. gleich $(ac)b$, als auch $a(b + b + + b + \cdots ^c) = a(bc)$ gesetzt werden.

Die vorstehende Regel zeigt nicht bloss, wie ein Produkt mit einer Zahl, sondern durch Umkehrung auch wie eine Zahl mit einem Produkt multiplicirt werden kann. Sie lässt sich ferner auf die Multiplication von mehr als drei Faktoren erweitern und dann dahin aussprechen, dass bei der Multiplication beliebig vieler Zahlen die Reihenfolge der Faktoren ohne Einfluss auf das Resultat ist. Daher dürfen in diesem Fall auch stets die Klammern weggelassen werden. — Heis. § 15, § 17 No. 20—31.

Soll dagegen ein Produkt durch eine Zahl dividirt werden, so kann dies nach der Gleichung

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

geschehen, denn da die Ausdrücke $\frac{a}{c} \cdot b$ und $a \cdot \frac{b}{c}$ zufolge der Regel (21) in Verbindung mit (16) bei der Multiplication mit c zum Resultate $a \cdot b$ geben müssen, so sind sie dem Quotienten $\frac{ab}{c}$ gleich.

Allgemein lässt sich hieraus folgern, dass ein Produkt von beliebig vielen Faktoren durch eine Zahl dividirt werden kann, indem man einen beliebigen einzelnen der Faktoren durch diese Zahl dividirt. — Heis, § 21, 5—14.

Aus den Formeln (21) und (22) geht hervor, dass der Werth eines Produkts durch Multiplication eines der Faktoren mit derselben Zahl multiplicirt und entsprechend durch Division eines der Faktoren dividirt wird. Da nun der Dividendus a des Quotienten $a : b$ der gegebene Werth eines Produkts, der Divisor b der eine Faktor ist, so folgt, dass durch Multiplication des Dividendus mit c ohne Veränderung des Divisors der Werth des anderen Faktors, d. i. des Quotienten, mit c multiplicirt wird. Durch Division des Dividendus ohne Veränderung des Divisors würde dagegen der Quotient entsprechend dividirt werden. Lässt man dagegen den Dividendus, also den Werth des Produkts, unverändert und multiplicirt oder dividirt den einen Faktor, so muss der andere Faktor entsprechend dividirt oder multiplicirt sein. Es wird also durch Multiplication seines Divisors mit einer Zahl c der Quotient c selbst durch c dividirt, und durch Division des Divisors durch c der Quotient mit c multiplicirt.

Man kann hiernach, wie schon im § 4 insbesondere für gebrochene Zahlen nachgewiesen worden ist, ganz allgemein einen Quotienten sowol durch Multiplication seines Dividendus als durch Division seines Divisors multipliciren, sowie denselben sowol durch Division seines Dividendus als durch Multiplication seines Divisors dividiren, oder es ist

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b : c} \quad (23),$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \cdot c} \quad (24),$$

Heis, § 21, 15—30; § 22.

Ausserdem folgt auch hier (wie in § 4), dass die gleichzeitige Multiplication der beiden Bestandtheile eines Quotienten mit derselben

Zahl, oder ihre gleichzeitige Division durch dieselbe Zahl den Werth des Quotienten unverändert lässt, dass also

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c} = \frac{a}{b} \quad (25)$$

ist. Heis, § 18. — Die noch übrigen einfachen Aufgaben, eine Zahl durch ein Produkt zu dividiren, eine Zahl mit einem Quotienten zu multipliciren und eine Zahl durch einen Quotienten zu dividiren, werden bezüglich durch die Regeln

$$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b \quad (26)$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b \quad (27)$$

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b} \cdot c \quad (28)$$

gelöst, welche man kurz durch Umkehrung vorhergehender ableiten und dahin aussprechen kann, dass die Division einer Zahl durch ein Produkt mittelst successiver Division durch die einzelnen Faktoren in beliebiger Reihenfolge, die Multiplication mit einem Quotienten durch Multiplication mit dem Dividendus und Division mit dem Divisor in beliebiger Reihenfolge, und endlich die Division durch einen Quotienten mittelst Division durch den Dividendus und Multiplication mit dem Divisor in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden könne. Heis, § 23, 3—9; § 24, 3—8.

Der häufigen Anwendung wegen schliessen wir den vorstehenden noch die folgenden Regeln über die Multiplication und Division zweier Quotienten an:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} : \frac{d}{c} \quad (29)$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (30)$$

Man kann dieselben durch successive Anwendung der vorstehenden erhalten. So ist z. B.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ nach (23) gleich $\left(a \cdot \frac{c}{d}\right) : b$, dies ist nach (27) gleich $\frac{ac}{d} : b$ und dies nach (24) gleich $\frac{ac}{bd}$. Ebenso ist nach (27) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} : d\right) \cdot c$, und dies nach (24) $= \frac{a}{b} : \frac{d}{c}$. Heis, § 23, 10—34; § 24, 9—26.

Entsprechende Regeln für die Addition und Subtraction zweier Quotienten sind früher (§ 5, (20)) angegeben worden; dieselben setzten jedoch voraus, dass beide denselben Divisor hatten. Mit Hülfe der Regel (25) lassen sich jetzt auch andere Quotienten addiren und subtrahiren. Schon in § 4 ist entsprechend gezeigt worden, dass wenn z. B. $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben sind, man dieselben stets so umformen kann, dass sie gleiche Divisoren erhalten; man hat zu diesem Zweck nur nöthig, in jedem der Quotienten beide Bestandtheile mit dem Divisor des anderen zu multipliciren. Hierdurch erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \text{ und } \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}, \text{ also ist auch}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad (31).$$

Die Ausdehnung dieser Regel auf Polynome von beliebig vielen Quotienten ist selbstverständlich. — Haben die Divisoren b, d einen gemeinschaftlichen Faktor, so führt die Multiplication mit dem vollen Divisor des anderen Quotienten zu einer unnützen Weitläufigkeit; man hat nur nöthig, bei jedem Quotienten den nicht gemeinschaftlichen Faktor aus dem Divisor des anderen anzuwenden. So ist z. B.

$$\frac{a}{xy} + \frac{b}{xz} = \frac{az}{xyz} + \frac{by}{xyz} = \frac{az + by}{xyz}$$

$$\frac{a}{xy} - \frac{b}{xz} + \frac{c}{yz} = \frac{az - by + cz}{xyz}$$

HEIS, § 19, 30—54.

§ 13. Multiplication und Division mit algebraischen Zahlen.

Die im § 7 dieses Abschnittes gegebenen Definitionen lassen sich ohne Weiteres auch auf die Null und die negativen Zahlen übertragen, und das Gleiche gilt von den aus diesen Erklärungen weiterhin abgeleiteten Gesetzen. Doch ist dabei zunächst zu bemerken, dass nach der dortigen Erklärung des Produkts nur der Multiplicandus eines solchen, nicht aber der Multiplicator Null oder eine algebraische Zahl sein kann, da letzterer nur eine Anzahl bedeutet, also eine sogenannte reine Zahl sein muss. Es ist also $o \cdot b = o + o + o + \ldots^{b} = o$,

$$(+ a) \cdot b = (+ a) + (+ a) + (+ a) + \ldots = + (ab),$$
$$(- a) \cdot b = (- a) + (- a) + (- a) + \ldots = - (ab).$$

Dagegen hat $a \cdot o$ als eine Summe mit keinem Summanden, oder $a \cdot (- b)$, als eine Summe mit einer negativen Anzahl von Summanden nach der bisherigen Auffassung keinen Sinn, und es ist daher auch das die Vertauschung der Faktoren betreffende Grundgesetz der Multiplication hier nicht ohne Weiteres anwendbar.

Man wird jedoch durch das Auftreten von Ausdrücken, wie die zuletzt erwähnten, auf eine Erweiterung der früheren Erklärungen der Multiplication und Division hingeführt, durch welche diese Ausdrücke ebenfalls einen den früheren Untersuchungen entsprechenden Sinn erhalten. Wir setzen demnach fest, dass unter $a \cdot o$ verstanden werden soll, dass der Summand a keinmal gesetzt sei, sodass also $a \cdot o = o$ und demnach auch hier $a \cdot o = o \cdot a$, und insbesondere $o \cdot o = o$ ist. Ferner soll unter der Multiplication einer Zahl mit einem positiven oder negativen Multiplicator $\pm b$ verstanden werden, dass jene Zahl nicht nur so oft mal als Summand gesetzt werden soll, als die Anzahl der Einheiten von b beträgt, sondern dass die Summe auch in derselben oder in entgegengesetzter Richtung der Zahlenreihe mit derjenigen genommen werden soll, welcher die Summanden angehören, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist.

So bedeutet also z. B. $(+ 4) \cdot (- 3)$ nicht bloss, dass der Summand $+ 4$ dreimal gesetzt werden, sondern auch, dass das Vorzeichen des Produktes umgekehrt werden soll, sodass also dieses Produkt $(+ 4) \cdot (- 3)$ die Bedeutung $- [(+ 4) + (+ 4) + (+ 4)] = - (+ 12) = - 12$ erhält.

Die Anwendung dieser Erklärung auf die vier hierbei möglichen einfachsten Fälle führt auf die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} (+ a) \cdot (+ b) &= + ab \\ (+ a) \cdot (- b) &= - ab \\ (- a) \cdot (+ b) &= - ab \\ (- a) \cdot (- b) &= + ab \end{aligned}\right\} \quad (32).$$

Man multplicirt also stets die Glieder der beiden algebraischen

Faktoren und bestimmt das Vorzeichen des Produktes nach der praktischen Regel: Gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —.

Anmerkung: Namentlich die letzte der obigen vier Formeln (32) ist häufig missverstanden worden, indem die Vergleichung der positiven und der negativen Zahlen mit dem Beispiel von Schulden und Vermögen Anlass gegeben hat, diese Formel in ganz unstatthafter Weise dahin zu deuten, dass »durch Multiplication von Schulden mit Schulden Vermögen enstehe.« Da dieser Satz an sich völlig sinnlos ist, indem zwei benannte Zahlen niemals mit einander multiplicirt werden können, so wurde, um sich überhaupt etwas unter demselben zu denken, der zweite Fehler gemacht, dass man diese Multiplication von Schulden mit Schulden verwechselte mit einer Vervielfältigung von Schulden, also mit einer Multiplication der Schulden mit einer absoluten Zahl, und so zu dem widersinnigen Satze kam, dass durch eine Häufung von Schulden Vermögen entstehe. Die richtige Deutung der Formel in der Anwendung auf das Beispiel von Schulden würde vielmehr die sein, dass durch Vervielfältigung von Schulden und gleichzeitige Umkehrung derselben in ihr Gegentheil, Vermögen entstehe. Der Satz sagt also beispielsweise: Wer 8000 M. Schulden hat und dieselben in das vierfache des Gegentheils, d. h. in Vermögen, verwandelt, hat $8000 \cdot 4$ M. Vermögen. —

In Folge der vorstehenden erweiterten Fassung des Begriffs der Multiplication ergeben sich ohne Weiteres die entsprechenden Sätze für die Division als die Umkehrungen der ersteren:

Aus $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ folgt zunächst für die Division mit Null, dass

$$\frac{0}{a} = 0$$

zu setzen ist, mit Ausnahme des Falls, in welchem auch a den Werth Null erhält. Denn die in $\frac{0}{a}$ enthaltene Frage nach dem Faktor, dessen Produkt mit a gleich Null sei, wird durch die vorstehenden Regeln dahin beantwortet, dass dieser Faktor selbst gleich Null sei. Für die in $\frac{0}{0}$ enthaltene Frage aber, welche Zahl mit 0 multiplicirt, zum Resultat Null gebe, ergiebt sich die Antwort, dass jede Zahl diese Eigenschaft habe. Der Ausdruck

$$\frac{0}{0}$$

ist daher ein völlig unbestimmter, oder ein unendlich vieldeutiges Symbol, welches jede beliebige Zahl bedeuten kann, sodass aus ihm allein nicht zu ersehen ist, welche bestimmte Zahl er vielleicht in einem vorliegenden besonderen Fall bedeute. — Der Ausdruck

$$\frac{a}{0}$$

endlich fordert die Auffindung einer Zahl, deren Produkt mit Null gleich a sei. Eine solche Zahl können wir überhaupt nicht angeben — den Fall $a = 0$ selbstverständlich wieder ausgenommen — da ja jede angebbare Zahl mit 0 multiplicirt ein Produkt gleich Null giebt.

Lässt man in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ bei unverändertem Dividendus den Divisor b kleiner werden, indem man denselben durch c dividirt, so wird der Quotient c mal so gross. Ist $b = \frac{1}{n}$, so ist $\frac{a}{b} = a \cdot n$. Lässt man nun n ohne Ende wachsen, so nähert sich b ohne Ende der Null, und der Werth des Quotienten kann auf diese Weise grösser als jede angebbare Zahl gemacht werden. Man pflegt dies dadurch auszudrücken, dass man

$$\frac{a}{0} = \infty$$

setzt, indem man durch das Zeichen ∞ eine unendlich grosse Zahl bezeichnet.

Aus dem Vorstehenden folgt die praktische Regel, dass man niemals durch Null dividiren darf.

Für die Division algebraischer Zahlen hat man nur die Sätze (32) umzukehren. So folgt z. B. aus $(-a) \cdot (+b) = -ab$, dass $\frac{-ab}{-a} = +b$, also auch $\frac{-c}{-a} = +\frac{c}{a}$ zu setzen ist u. s. w. So ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{+a}{+b} &= +\frac{a}{b} \\ \frac{+a}{-b} &= -\frac{a}{b} \\ \frac{-a}{+b} &= -\frac{a}{b} \\ \frac{-a}{-b} &= +\frac{a}{b}, \end{aligned} \qquad (33)$$

sodass auch hier die praktische Regel gilt, dass gleiche Vorzeichen $+$, ungleiche $-$ geben.

Die im Vorstehenden entwickelten Gesetze der Multiplication und Division mit Null und mit algebraischen Zahlen lassen sich leicht auf zusammengesetztere Rechnungen anwenden; auch überzeugt man sich leicht, dass alle früher für absolute Zahlen abgeleiteten Gesetze der Multiplication und Division für die eben genannten Zahlformen ebenfalls gültig bleiben. So ergiebt sich beispielsweise, dass man aus den Gleichungen (19) die Gleichungen (32) erhält, wenn man in jenen $a = c = 0$, bezw. in diesen $0 + a$, $0 - a$ statt $+a$, $-a$ u. s. w. schreibt, u. dgl. m. — Heis, § 26, 21—44.

§ 14. Division algebraischer Summen.

Die allgemeinste Aufgabe der Multiplication, nämlich die Aufgabe, beliebig viele algebraische Summen mit einander zu multipliciren, bedarf nun keiner weiteren Erörterung, da ihre Auflösung aus dem bisherigen ohne Weiteres folgt. Dagegen führt die allgemeine Division algebraischer Summen noch auf ein bemerkenswerthes Verfahren. Dasselbe stützt sich auf den Satz, dass man jeden Quotienten gleich der Summe aus einer beliebigen Zahl und einem dem ersteren gleichnamigen Quotienten setzen kann. Der Dividendus des letzteren wird erhalten, wenn man von dem des ersteren das Produkt aus der beliebigen Zahl und dem Divisor subtrahirt. Es ist also

$$(34) \quad \frac{a}{b} = x + \frac{a - bx}{b}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende allgemeine Divisionsregel:

Um a durch b zu dividiren, kann man zunächst für den Quotienten eine beliebige Zahl x setzen, dann das Produkt dieser Zahl und des Divisors b von dem Dividendus a subtrahiren und den Rest auf's Neue durch b dividiren. Indem man sich hierzu wieder desselben Verfahrens bedient und in dieser Weise fortführt, erhält man, falls der letzte Rest gleich Null wird, zum Quotienten die Summe der Theilquotienten $x + x_1 + x_2 + \ldots$ Ist der letzte Rest nicht gleich Null, so ist dieser Summe noch der Quotient dieses Restes durch b hinzuzufügen.

In der Praxis wählt man für x eine dem Werthe von $\frac{a}{b}$ möglichst nahe kommende, kleinere (ganze) Zahl, so z. B. bei dem bekannten Verfahren der Division mehrziffriger ganzer Zahlen.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf algebraische Summen mögen folgende Beispiele zeigen:

Aufgabe 1: $(12\,xx + 54\,yy + 48\,yz - 51\,xy - 24\,xz) : (4\,x - 8\,z - 9\,y)$ zu berechnen.

Für Anfänger empfiehlt es sich, zunächst den Dividendus und den Divisor nach den Buchstaben x, y, z zu ordnen, worauf man folgende Rechnung erhält:

$$(12\,xx - 51\,xy - 24\,xz + 54\,yy + 48\,yz) : (4\,x - 9\,y - 8\,z); \qquad 12\,xx : 4\,x = 3\,x$$
$$\underline{12\,xx - 27\,xy - 24\,xz}$$
$$(-24\,xy + 54\,yy + 48\,yz) : (4\,x - 9\,y - 8\,z); -24\,xy : 4\,x = -6y$$
$$-24\,xy + 54\,yy + 48\,yz.$$

Der Quotient ist also gleich $3\,x - 6\,y$.

Man sieht leicht ein, dass man sich bei dem Schreiben die Wiederholung des Divisors ersparen kann, wie dies in dem folgenden Beispiel geschehen ist:

Aufgabe 2: $(20\,x^4 + 32\,x - 51\,x^3 - 12\,x^2) : (4\,x^2 - 7\,x - 8)$.

Der Kürze halber ist hier x^4 statt $xxxx$, x^2 statt xx u. s. w. geschrieben, und ausser dieser Bezeichnungsweise wird aus der späteren Potenzrechnung der — auch hier schon leicht beweisbare Satz $x^4 : x^2 = x^2$, allgemein $x^m : x^n = x^{m-n}$ der Einfachheit wegen vorweg genommen. Nach dem Ordnen des Dividendus hat man

$$(20x^4 - 51x^3 - 12x^2 + 32x) : (4x^2 - 7x - 8) = 5x^2 - 4x$$
$$\underline{20x^4 - 35x^3 - 40x^2}$$
$$-16x^3 + 28x^2$$
$$-16x^3 + 28x^2 + 32x.$$

Aufgabe 3: $(x^5 - y^5) : (x - y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

$$\underline{x^5 - x^4y}$$
$$+ x^4y - y^5$$
$$\underline{+ x^4y - x^3y^2}$$
$$+ x^3y^2 - y^5$$
$$\underline{+ x^3y^2 - x^2y^3}$$
$$+ x^2y^3 - y^5$$
$$\underline{+ x^2y^3 - xy^4}$$
$$+ xy^4 - y^5$$
$$\underline{+ xy^4 - y^5.}$$

Analoge Aufgaben, wie die vorstehende dritte, führen auf den bemerkenswerthen Satz, dass jeder Ausdruck von der Form $x^n - y^n$ (wo n eine ganze, positive Zahl ist), durch $x - y$ ohne Rest theilbar ist. Es ist nämlich

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}.$$

Der Beweis der Richtigkeit kann dadurch geführt werden, dass man die rechte Seite mit $x - y$ multiplicirt.

Entsprechend ergiebt sich, dass $x^n + y^n$ für ungerades n durch $x + y$ ohne Rest theilbar ist. — Heis, § 25. Bardey VI—X.

Anhang 1.
Maass der Zahlen.
(Heis, § 27—28).

§. 15. Primzahlen.

1. Ehe wir von den bisher behandelten Operationen zu höheren Stufen von Zahlenverbindungen übergehen, sollen im Folgenden einige für die praktischen Anwendungen oder die späteren Untersuchungen wichtige Theorien erörtert werden, welche — soweit sie hier Behandlung finden — durch die Gesetze der vier bisherigen Grund-Operationen erledigt werden können. Die zunächst zu behandelnden Lehren gehören einem Zweige der Mathematik an, welcher unter dem Namen der Theorie der Zahlen oder der Zahlenlehre von den besonderen Eigenschaften und Verbindungen der ganzen Zahlen handelt, und aus welchem hier nur einige der elementarsten Sätze, wie sie im Folgenden gebraucht werden, Erwähnung finden können. Für ein wissenschaftliches Studium des genannten Zweiges der Mathematik — welches übrigens die Kenntniss auch der späteren Theile der allgemeinen Arithmetik voraussetzt — kann auf Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, Braunschweig bei Vieweg u. Sohn, verwiesen werden.

2. Unter einer Zahl schlechthin soll hiernach in diesem Anhang stets eine ganze Zahl verstanden werden.

Ist eine Zahl a ein Produkt einer Zahl b mit einer zweiten Zahl m, also $a = m \cdot b$, so heisst a ein Vielfaches oder ein Multiplum von b, und b ein aliquoter Theil, auch ein Theiler, Divisor oder ein Maass von a. Man sagt auch, b gehe in a auf oder a sei theilbar durch b.

Ist a kein Vielfaches von b, so kann a stets gleich der Summe und gleich der Differenz eines Vielfachen mb von b und einer Zahl r gesetzt werden, sodass $r < b$ ist. In diesem Fall heisst r der Rest.

Jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst theilbar. Zahlen, welche ausserdem durch keine andere Zahl theilbar sind, wie z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, heissen absolute Primzahlen oder Primzahlen schlechthin; alle anderen Zahlen sind zusammengesetzte Zahlen.

Ist eine Zahl δ ein Theiler von mehreren Zahlen a, b, c, d, ... zugleich, so heisst sie ein gemeinschaftlicher Theiler (gemeinschaftlicher Divisor, gemeinschaftliches Maass) dieser Zahlen. Solche Zahlen, welche (ausser der 1) keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heissen relative Primzahlen. So sind z. B. 9 und 16, obgleich beide keine absoluten, doch relative Primzahlen, während 9 und 12 den gemeinschaftlichen Theiler 3 haben.

§ 16. Theilbarkeit der Zahlen überhaupt.

Aus den vorstehenden Erklärungen ergeben sich leicht folgende Lehrsätze:

Ist δ ein Theiler von a und von b, so ist δ auch ein Theiler von $a + b$ und von $a - b$; $(a > b)$. Denn ist $a = m\delta$, $b = n\delta$, so ist $a \pm b = (m \pm n)\,\delta$.

Allgemein ist jeder gemeinschaftliche Theiler δ mehrerer Zahlen a, b, c, ... auch ein Theiler jedes aus diesen Zahlen gebildeten Polynoms $a \pm b \pm c \ldots$

Ist δ ein Theiler von a, so ist δ auch ein Theiler eines jeden Vielfachen von a, denn ist $a = n\delta$, so ist $ma = m(n\delta) = (mn)\,\delta$.

In einer Reihe von Zahlen, in welcher jede folgende ein Vielfaches der vorhergehenden ist, muss daher jede frühere Zahl ein Theiler jeder späteren sein.

Ist ferner δ ein Theiler von a, so ist auch jeder aliquote Theil von δ ein Theiler von a, denn ist $a = m\delta$ und $\delta = n\varepsilon$, so ist $a = (mn)\,\varepsilon$.

Dagegen ist in solchem Falle ein Vielfaches von δ nicht nothwendig ein Theiler von a, und ebenso δ nicht nothwendig ein Theiler eines aliquoten Theiles von a.

Allgemein, ist δ ein Theiler von $a, b, c, \ldots$, so ist δ und jeder aliquote Theil von δ auch ein Theiler eines jeden aus Vielfachen von $a, b, c, \ldots$ gebildeten Polynoms $ma \pm nb \pm pc \pm \ldots$

Beispielsweise ist 8 ein Theiler von 16, 24, 32 und 40, also auch von $2 . 16 + 4 . 24 - 3 . 32 + 40 = 72$, und ebenso sind 4 und 2 Theiler von 72.

Die Summe mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$ kann auch dann durch δ theilbar sein, wenn δ nicht ein Theiler jeder einzelnen dieser Zahlen ist; vielmehr genügt zu diesem Zweck, dass die Summe der bei der Division der einzelnen Summanden durch δ bleibenden Reste durch δ theilbar sei.

So ist $7 + 11 + 9 + 13$ durch 5 theilbar, denn die Summe der Reste $2 + 1 + 4 + 3 = 10$ ist durch 5 theilbar. Ist $a = m\delta + \alpha$, $b = n\delta + \beta$, $c = p\delta + \gamma$, u. s. w., so ist $a + b + c + \ldots = (m + n + p + \ldots)\,\delta + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$, woraus die allgemeine Richtigkeit der Behauptung leicht folgt.

Die Differenz zweier Zahlen ist entsprechend durch δ theilbar, wenn die Differenz der zugehörigen Reste gleich Null ist. Denn da jeder der Reste kleiner als δ ist, so kann anderenfalls ihre Differenz und folglich auch nicht $(m\delta + \alpha) - (n\delta + \beta) = (m - n)\,\delta + (\alpha - \beta)$ durch δ theilbar sein.

Ein Produkt ist durch jeden seiner Faktoren theilbar. Enthält dasselbe mehrere Faktoren neben einander, so ist es auch durch jedes aus diesen Faktoren gebildete Produkt theilbar.

So ist beispielsweise das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ durch 2, 3, 4 und 5 einzeln, aber auch durch $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 4 = 12$, $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ u. s. w. theilbar. Dagegen ist 120, obgleich durch 2 und durch 24 theilbar, keineswegs durch $2 \cdot 24$ theilbar, denn es enthält die Faktoren 2 und 24 nicht neben einander.

Umgekehrt, ist eine Zahl durch ein Produkt theilbar, so ist sie auch durch jeden Faktor desselben theilbar. Diese Behauptung ist übrigens schon früher bewiesen, da jeder solcher Faktor ein aliquoter Theil jenes ersteren Theilers ist.

Ein Produkt kann aber auch durch eine Zahl δ theilbar sein, ohne dass δ einer der Faktoren oder auch nur ein Theiler eines dieser Faktoren ist. So ist $5 \cdot 7 \cdot 9$ durch 35, oder durch 21 theilbar, ebenso $40 \cdot 24$ durch 15 u. dgl. m. In dieser Beziehung gilt der algemeinere Satz, dass das Produkt $abcd\ldots$ durch δ theilbar ist, wenn das Produkt der bei der Division der einzelnen Faktoren durch δ bleibenden Reste durch δ theilbar ist. — So erhält man beispielsweise für das obige Produkt $40 \cdot 24$ und den Theiler 15 die Reste 10 und 9, und das Produkt 90 derselben ist durch 15 theilbar. Allgemein ist, wenn $a = m\delta + \alpha$, $b = n\delta + \beta$, $c = p\delta + \gamma$, ... ist, $ab = mn\delta^2 + \alpha n\delta + \beta m\delta + \alpha\beta = (mn\delta + \alpha n + \beta m)\,\delta + \alpha\beta$, womit der Satz für zwei Faktoren bewiesen ist. Für drei Faktoren setze man $abc = (ab) \cdot c$, so ergiebt derselbe Beweis denselben Satz für das Produkt der Reste von ab und c, also für $\alpha\beta\gamma$. Ebenso kann man für jeden weiteren Faktor im Beweise fortfahren.

Ist dagegen δ weder ein Theiler eines der Faktoren des Produkts (d. h. ist

keiner der Reste gleich Null), noch ein solcher des Produkts der Reste, so kann δ auch kein Theiler des ursprünglichen Produktes sein.

§ 17. Gemeinschaftliche Theiler.

1. Um zu bestimmen, ob zwei gegebene Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, dividire man die kleinere in die grössere, dann den etwa bleibenden Rest in den vorhergehenden Divisor, darauf den etwa hierbei bleibenden Rest wieder in den jetzt vorhergehenden Divisor, und fahre so fort, bis kein Rest bleibt. Der letzte Divisor ist dann die grösste Zahl, welche in die beiden gegebenen aufgeht. Ist derselbe also gleich 1, so sind letztere relative Primzahlen, im anderen Fall ist jener Divisor ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler.

Beispiel: Den grössten gemeinschaftlichen Theiler von 1245 und 2676 zu bestimmen.

$$\begin{array}{r}
2676 : 1245 = 2 \\
1245 : 186 = 6 \quad\quad \\
186 : 129 = 1 \quad\quad\quad\quad \\
129 : 57 = 2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
57 : 15 = 3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
15 : 12 = 1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
12 : 3 = 4 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad
\end{array}$$

Der grösste gemeinschaftliche Theiler ist also 3.

Um allgemein die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, sei zunächst bemerkt, dass, da jeder Rest kleiner als der vorhergehende Divisor ist, jeder folgende Rest kleiner als der vorhergehende ist, und dass man daher, wenn b die kleinere der beiden gegebenen Zahlen ist, im ungünstigsten Fall nach $b - 1$ Divisionen auf den Rest 1 kommen muss, welcher dann in den vorigen Rest aufgeht. Es seien nun $q_1, q_2, q_3, \ldots$ der Reihe nach die einzelnen Quotienten, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die Reste, so ist

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot q_1 + r_1 \\
b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2\, q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Daher ist der letzte Divisor r_n ein Theiler von r_{n-1}, folglich ist er auch ein Theiler des vorhergehenden Vielfachen $r_{n-1} \cdot q_n$ von r_{n-1} und mithin auch ein Theiler der Summe $r_{n-1} q_n + r_n$, d. h. ein Theiler von r_{n-2}. Indem man diese Schlussweise wiederholt, findet man nacheinander, dass r_n ein Theiler von r_{n-3}, von r_{n-4}, u. s. f., und schliesslich, dass r_n auch ein Theiler von b und von a, also ein gemeinschaftlicher Theiler der beiden gegebenen Zahlen sei.

Um nun auch zu beweisen, dass r_n der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b ist, sei δ irgend ein anderer Theiler von a und b. Dann muss δ auch ein Maass des Vielfachen $b \cdot q_1$ von b, und mithin auch ein solches von $a - b \cdot q_1$ oder von r_1 sein. Hieraus folgt wieder, dass δ auch in $r_1 \cdot q_2$ und mithin in $b - r_1 q_2 = r_2$ aufgehen muss. Durch Wiederholung dieser Schlussfolgerung gelangt man zuletzt dahin, dass δ ein Maass von r_n sein muss. Daher kann δ nicht grösser als r_n sein.

Aus diesem Beweise folgt noch, dass jeder gemeinschaftliche Theiler δ zweier

Zahlen a, b auch in dem grössten gemeinschaftlichen Theiler dieser Zahl aufgehen muss.

2. Soll entsprechend das grösste gemeinschaftliche Maass für drei oder mehr Zahlen gesucht werden, so bestimme man zunächst das grösste gemeinschaftliche Maass δ zu irgend zweien derselben, z. B. zu a und b. Da nun jeder gemeinschaftliche Theiler von a, b und c auch ein solcher von a und b allein, und somit ein Theiler von δ sein muss, so kann man δ an die Stelle der beiden Zahlen a und b setzen, wodurch die Anzahl der betreffenden Zahlen um 1 vermindert ist. Sucht man nun wieder zu irgend zweien dieser jetzt vorhandenen Zahlen den grössten gemeinschaftlichen Theiler ε, und setzt diesen für die beiden Zahlen, so kann man durch hinreichende Wiederholung dieses Verfahrens zuletzt auf eine einzige Zahl kommen, und diese letztere muss die gesuchte sein.

3. Das im Obigen entwickelte Verfahren dient auch zum Beweise des folgenden fundamentalen Lehrsatzes:

Ist δ ein gemeinschaftlicher Theiler von $a \cdot k$ und von b, und sind a und b relative Primzahlen, so muss δ ein Theiler von k sein. Multiplicirt man nämlich die Seiten einer jeden der oben für zwei Zahlen a, b aufgestellten Gleichungen mit k, so erhält man

$$\begin{aligned} a\ k &= b\ q_1 k + r_1 k \\ b\ k &= r_1 q_2 k + r_2 k \\ r_1 k &= r_2 q_3 k + r_3 k \\ &\vdots \\ r_n \cdot k &= k. \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen folgt nämlich aus der hier gemachten Voraussetzung, dass a und b relative Primzahlen seien, in welchem Fall ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler r_n gleich 1 ist. Ist nun δ ein gemeinschaftlicher Theiler von ak und b, so ist δ auch ein Theiler von $ak - bq_1 k = r_1 k$, also auch ein solcher von $bk - r_1 q_2 k = r_2 k$, u. s. w. Durch Wiederholung dieser Schlussfolgerung erhält man zuletzt, dass δ ein Theiler von k sei.

Aus diesem Satze folgen unmittelbar die nachstehenden: 1. Sind a und b relative Primzahlen, und ist k ebenfalls relativ prim zu b, so ist auch das Produkt ak relativ prim zu b. 2. Sind a und b relative Primzahlen und geht b in ak auf, so ist b ein Theiler von k. 3. Allgemein, ist jede der Zahlen $a, b, c, d \ldots$ relativ prim zu jeder der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, so ist auch das Produkt $abcd\ldots$ relativ prim zu $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ 4. Insbesondere ist $aaa\ldots$ (a^n) relativ prim zu $bbb\ldots$ (b^m), wenn a und b relative Primzahlen sind. —

§ 18. Zerlegung der Zahlen. Kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

1. Ist a eine zusammengesetzte Zahl, hat also einen Theiler b, so kann sie als Produkt $b \cdot c$ dargestellt werden. Ist b wieder keine Primzahl, so kann sie aufs neue als Produkt zweier Zahlen $d \cdot e$ dargestellt werden. Da nun die Faktoren immer kleinere Zahlen werden müssen, so muss man durch hinreichend wiederholte Anwendung dieses Verfahrens schliesslich einmal auf einen Theiler p kommen, welcher eine Primzahl ist. Es ist dann p auch ein Theiler von a und es kann daher a in der Form $a_1 \cdot p$ dargestellt werden. Da man nun mit a_1, falls sie nicht selbst schon eine Primzahl ist, dasselbe Verfahren wiederholen und so auch a_1 als Produkt einer Primzahl p_1 mit einer Zahl a_2 darstellen, dann wieder a_2 in derselben Weise behandeln und so weiter fortfahren kann, und da jede folgende der Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ kleiner als die vorhergehende ist, so muss

man schliesslich auch hier auf eine Primzahl kommen. Somit kann jede zusammengesetzte Zahl als Produkt einer endlichen Anzahl von Faktoren dargestellt werden, welche sämmtlich Primzahlen sind. Man nennt dies die Zerlegung der Zahl in ihre Primfaktoren.

Diese Zerlegung kann bei mehr als zwei Faktoren stets in verschiedenen Reihenfolgen geschehen. Ist a als ein Produkt $b \cdot c$ dargestellt, so kann man jeden der Faktoren, sofern er nicht schon eine Primzahl ist, für sich weiter zerlegen, dann ebenso mit den neuen Faktoren verfahren, u. s. w. So kann man z. B. für 144 zunächst $12 \cdot 12$, dann für jeden Faktor 12 entweder $2 \cdot 6$ oder $3 \cdot 4$ setzen, und so weiter berechnen, bis man $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ erhält.

Es fragt sich nun noch, ob man bei verschiedener Anordnung in jener Zerlegung auf verschiedene Schluss-Resultate gelangen kann, oder ob alle diese Resultate identisch sein müssen. Man überzeugt sich leicht davon, dass das letztere der Fall ist, und zwar durch folgenden Beweis:

Es seien durch zwei Zerlegungen die Resultate $a = p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ und $a = q \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$ erhalten worden. Da nun a durch q theilbar ist, so muss auch $p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ durch q theilbar sein, und da hier die einzelnen Faktoren Primzahlen sind, so folgt aus § 17, 3, dass q gleich einem dieser Faktoren, z. B. gleich p sein muss. Durch Division mit den gleichen Faktoren p und q findet man dann, dass $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$ sein muss. Auf diese beiden Produkte lässt sich wieder dieselbe Schlussfolgerung anwenden, und indem man die letztere hinreichend oft wiederholt, überzeugt man sich, dass jeder Faktor, welcher in dem einen Produkte ein- oder mehreremale vorkommt, ebenso oft in dem anderen vorkommen muss. Hieraus folgt aber, dass die Produkte, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, ganz genau dieselben sein müssen.

Man kann hiernach jede zusammengesetzte Zahl auf die Form $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot t^\gamma \ldots$ bringen, in welcher p, q, t Primzahlen sind und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Zahlen, welche angeben, wie oft der betreffende Primfaktor in dem Produkte vorkommt. Diese Zerlegung kann nur zu einem einzigen Resultate führen.

2. Der vorstehende Satz führt zu einer in der Praxis meist bequemeren Methode, den grössten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer gegebenen Zahlen $a, b, c, \ldots$ zu finden. Man zerlege zu diesem Zweck jede dieser Zahlen in ihre Primfaktoren und bilde das Produkt sämmtlicher dieser Faktoren, welche in jeder der gegebenen Zahlen enthalten sind. Kommt in derselben Zahl derselbe Primfaktor mehrfach vor, so ist er in dem gesuchten Theiler so oft zu setzen, als er in derjenigen gegebenen Zahl vorkommt, welche ihn in der geringsten Anzahl enthält.

So ist beispielsweise $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, also der grösste gemeinschaftliche Theiler von 360, 300 und 2000 gleich $2^2 \cdot 5 = 20$.

Aus dem grössten gemeinschaftlichen Theiler lassen sich dann alle anderen gemeinschaftlichen Theiler der gegebenen Zahlen finden. Dieselben sind die einzelnen Primfaktoren des ersteren und alle möglichen aus denselben in unvollständiger Anzahl gebildeten Produkte.

So sind in dem vorigen Beispiel die übrigen gemeinschaftlichen Theiler 2, 5, 4 und 10.

3. Das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** gegebener Zahlen nennt man die kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen als Theiler enthalten sind. Man erhält dieselbe, indem man aus sämmtlichen Primfaktoren der gegebenen Zahlen ein Produkt bildet, welches jeden dieser Faktoren so oft enthält, als diejenige Zahl, in welcher er am häufigsten vorkommt.

Von diesem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen wird bekanntlich bei

der Addition und Subtraction ungleichnamiger Brüche unter dem Namen Generalnenner oder Hauptnenner Gebrauch gemacht. Die für die Bestimmung des letzteren im praktischen Rechenunterricht gewöhnlich gegebenen Regeln erhalten durch die vorstehenden Entwicklungen ihre genauere, wissenschaftliche Begründung. Im Folgenden soll dieselbe noch auf die zur leichten Ausführung der Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren nützlichen Regeln über die Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen ausgedehnt werden.

§ 19. Zahlensysteme.

Unter einem Zahlensystem versteht man eine zunächst zur besseren Uebersicht der unendlichen Reihe der Zahlen dienliche Anordnung der letzteren nach einer bestimmten Grundzahl oder Basis, und zwar in folgender Weise:

In dem gewöhnlichen, sogenannten dekadischen Zahlensystem, welches die Grundzahl zehn hat, werden nur die neun ersten Zahlen durch besondere Zahlzeichen (Ziffern) bezeichnet. Eine Anzahl von zehn Einheiten wird als eine neue Einheit von einer höheren Ordnung angesehen und wieder durch 1 bezeichnet. Zum Unterschied von der ursprünglichen Einheit wird diese neue um eine Stelle weiter nach links geschrieben, wobei die leere Stelle rechts durch eine Null ausgefüllt wird. Eine Zahl, welche mehrere solche »Zehner« enthält, wird dadurch geschrieben, dass man die Anzahl dieser Zehner in die weiter nach links stehende erste Stelle und sodann in die ursprüngliche Stelle entweder eine Null oder, wenn ausserdem noch »Einer« vorhanden sind, die Anzahl dieser letzteren setzt. Zehn solche Zehner bilden wieder eine Einheit der nächst höheren Ordnung unter dem Namen Hundert, und die »Hunderter« werden in die zweite Stelle links von den Einern geschrieben. In derselben Weise wird weiter zu den Einheiten der folgenden Ordnungen aufgestiegen. Die nähere Kenntniss und der Gebrauch des dekadischen Zahlensystems ist hier als bekannt vorauszusetzen. Auf dieser Anordnung der Zahlen in ein System mit Hülfe der Bezeichnung der Ordnungen durch die Stellungen und mit Hülfe der Null zum Ausfüllen leerer Stellen beruht die Leichtigkeit in der Ausführung unserer heutigen Rechnungen im Gegensatz zu denen der alten Griechen und Römer, und damit zu einem grossen Theile auch die höhere Entwicklung der mathematischen Wissenschaften.

Man kann jedoch nicht bloss die Zahl zehn, sondern überhaupt jede beliebige (ganze) Zahl a als Grundzahl eines Zahlensystems annehmen. Diese aus a ursprünglichen Einheiten bestehende Zahl wird dann als die Einheit der ersten höheren Ordnung angesehen; a Einheiten dieser ersten Ordnung, also $a \cdot a$ oder abgekürzt a^2 Einheiten der ursprünglichen Art liefern eine Einheit zweiter Ordnung; $aaa = a^3$, ferner a^4, u. s. w. sind die Einheiten der folgenden höheren Ordnungen. Die ursprüngliche Einheit wird dem entsprechend als Einheit nullter Ordnung (a^0) bezeichnet. Hiernach giebt es also, je nachdem a gleich 2, 3, u. s. w. ist, ein zweitheiliges oder dyadisches, ein dreitheiliges oder triadisches System, u. s. w.

Hiernach bedeutet beispielsweise die Zahl 54321

im sechstheiligen System $5 \cdot (6^4) + 4 \cdot (6^3) + 3 \cdot (6^2) + 2 \cdot (6) + 1$,

im achttheiligen System $5 \cdot (8^4) + 4 \cdot (8^3) + 3 \cdot (8^2) + 2 \cdot (8) + 1$,

im zwölftheiligen System $5 \cdot (12^4) + 4 \cdot (12^3) + 3 \cdot (12^2) + 2 \cdot (12) + 1$,

während sie im zehntheiligen System $= 5 \cdot (10^4) + 4 \cdot (10^3) + 3 \cdot (10^2) + 2 \cdot (10) + 1$, ist. Demnach ist diese Zahl im sechstheiligen System gleichbedeutend mit der Zahl $5 \cdot 1296 + 4 \cdot 216 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 1 = 7465$ im zehntheiligen, und ebenso dieselbe Zahl im achttheiligen System mit 22737 und im zwölftheiligen System mit

111049 im gewöhnlichen dekadischen. Umgekehrt ist die der dekadischen Zahl 4319 gleichwerthige im dyadischen System 1000011011111, im triadischen 12220222, im dodekadischen 25 (XI) (XI), wobei XI für die hier fehlende Ziffer für elf Einheiten gesetzt ist.

Das Einmaleins lautet beispielsweise im sechstheiligen System:

1 · 1 = 1	2 · 1 = 2	3 · 1 = 3	4 · 1 = 4	5 · 1 = 5	10 · 1 = 10
1 · 2 = 2	2 · 2 = 4	3 · 2 = 10	4 · 2 = 12	5 · 2 = 14	10 · 2 = 20
1 · 3 = 3	2 · 3 = 10	3 · 3 = 13	4 · 3 = 20	5 · 3 = 23	10 · 3 = 30
1 · 4 = 4	2 · 4 = 12	3 · 4 = 20	4 · 4 = 24	5 · 4 = 32	10 · 4 = 40
1 · 5 = 5	2 · 5 = 14	3 · 5 = 23	4 · 5 = 32	5 · 5 = 41	10 · 5 = 50
1 · 10 = 10	2 · 10 = 20	3 · 10 = 30	4 · 10 = 40	5 · 10 = 50	10 · 10 = 100.

Das zehntheilige Zahlensystem ist keineswegs das für die praktischen Rechnungen bequemste, da seine Grundzahl nur die beiden Theiler 2 und 5 hat; das zwölftheilige würde beispielsweise insofern vortheilhafter sein, als in demselben die Zahlen 2, 3, 4, 6, 8 und 9 als einfache Bruchtheile der höheren Einheit erscheinen würden. In der That hat man im Verkehr vielfach neben dem dekadischen noch andere Systeme, zwar nicht für das eigentliche Zifferrechnen, aber doch für die übersichtliche Eintheilung häufig gebrauchter Grössen benutzt, wie z. B. bei dem früheren Duodecimalsystem der Längenmaasse, wo 12 Linien als Einheit höherer Ordnung ein Zoll, zwölf Zolle ein Fuss genannt wurden, u. s. w. Noch gegenwärtig werden in dieser Weise vereinzelt andere Systeme, ja zuweilen werden bei einer und derselben Art von Grössen verschiedene Grundzahlen gebraucht; so setzt man z. B. bei Winkelgrössen 60 Secunden gleich einer Minute, 60 Minuten gleich einem Grad, dagegen 90 Grad gleich dem rechten Winkel. Aehnliches gilt für die Zeitmaasse.

Nur vereinzelt sind Bestrebungen aufgetreten, das dekadische Zahlensystem auch im Zifferrechnen durch ein zweckmässigeres zu verdrängen. Da für die Grundzahl eines praktisch bequemen Zahlensystems weder sehr kleine Zahlen, wie 2 oder 3, noch grössere, wie 15, 16, .. geeignet sind, weil bei ersteren grosse Zahlen in übermässiger Ausdehnung erscheinen, und bei letzteren die Anzahl der nothwendigen Ziffern zu gross wird, da ferner, wie schon bemerkt, auf eine möglichst grosse Theilbarkeit der Grundzahl Bedacht zu nehmen ist, so sind in der erwähnten Beziehung nur die Zahlen 12 und 6 als beachtenswerth hervorgehoben worden. Derartige Bestrebungen müssen jedoch als aussichtslos bezeichnet werden. Dagegen hat man umgekehrt mehr und mehr das dekadische System auch auf alle im Handel und sonstigen Verkehr gebräuchliche Eintheilungen, also auf Maasse, Münzen, Gewichte u. s. w. auszudehnen gesucht und hierdurch nicht nur eine früher vermisste Gleichmässigkeit solcher Maasse u. s. w. in verschiedenen Provinzen und Ländern, sondern auch durch die Gleichartigkeit des Eintheilungsprincips manche Vortheile für das praktische Rechnen gewonnen. Letzterem stehen allerdings auch Nachtheile in Folge der schon erwähnten geringen Theilbarkeit der Grundzahl gegenüber, und eine vollständige Durchführnng des dekadischen Systems und des entsprechenden Rechnens dürfte überdies an der in das praktische Leben tief eingreifenden gewohnten Zeit-Eintheilung ein schwer zu beseitigendes Hinderniss finden. Das dekadische System ist kein natürliches, sondern ein willkürliches und künstliches; für die Wahl der Grundzahl 10 giebt es nur einen historischen, keinen mathematisch-wissenschaftlichen Grund. Der Werth des einmal gewählten Systems wird allerdings erhöht durch eine möglichst consequente Durchführung und allgemeine Anwendung; aber überall, wo das

Eintheilungs-Princip durch die Natur gegeben und somit der Willkür entzogen ist, muss man auf die Forderung seiner Durchführung verzichten. Man kann das Jahr nicht in eine decimale Anzahl von Tagen theilen, da diese Anzahl von der Natur unveränderlich gegeben ist.

Eine eingehendere Erörterung der vorwiegend theoretisches Interesse in Anspruch nehmenden Theorie der Zahlensysteme muss an dieser Stelle unterbleiben; nur zwei die praktische Anwendung des dekadischen Systems insbesondere näher angehende Fragen bedürfen noch der Besprechung im Folgenden.

§ 20. Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

Die Frage nach äusseren Kennzeichen der Theilbarkeit einer dekadischen Zahl durch eine andere, welche insbesondere auch für die Anwendung des im § 18 Gesagten von Werth ist, hat von der im Vorstehenden erläuterten Darstellung einer dekadischen Zahl z durch die Form

$$z = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + c \cdot 10^{n-2} + \cdots + p \cdot 10^2 + q \cdot 10 + r$$

auszugehen, wobei $a, b, c, \ldots r$ die einzelnen Ziffern dieser Zahl sind. Da diese Zahl durch irgend eine andere Zahl k dividirt werden kann, indem man jeden Summanden einzeln durch k dividirt, so folgt leicht, dass z durch k theilbar ist, wenn die Summe der Produkte aus ihren einzelnen Ziffern $a, b, \ldots$ in diejenigen Reste, welche durch Division ihrer Einheiten 10^n, 10^{n-1}, ... mit k entstehen, durch k theilbar ist. Bleibt dagegen bei der Division dieser Summe durch k ein Rest, so bleibt derselbe Rest bei der Division von z durch k.

Da nun $10, 10^2, \ldots 10^n$ sämmtlich durch 2, 5 und $10, 10^2, 10^3, \ldots$ durch 4, $10^3, 10^4, \ldots$ durch 8 u. s. w. theilbar sind, ferner $10, 10^2, \ldots 10^n$ sowol durch 3 als durch 9 dividirt, sämmtlich zum Rest 1 geben, so folgt:

Eine Zahl z ist theilbar durch

$k = 2$, wenn ihre letzte Ziffer r durch 2 theilbar oder Null ist,

$k = 3$, wenn die Quersumme $a + b + c \cdots + p + q + r$ ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist,

$k = 4$, wenn die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl $10q + r$ durch 4 theilbar ist,

$k = 5$, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist,

$k = 8$, wenn die aus den drei letzten Ziffern gebildete Zahl $100p + 10q + r$ durch 8 theilbar ist,

$k = 9$, wenn die Quersumme der Ziffern durch 9 theilbar ist,

$k = 10$, wenn die letzte Ziffer Null ist.

Schreibt man ferner die Zahl z in der Form

$$\begin{array}{l} r + 11q + 99p + 1001o + 9999m + \ldots \\ \quad - q + p - o + m - \ldots, \end{array}$$

so ergiebt sich noch die folgende einfache Regel: Eine dekadische Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Summe der an der ersten, dritten, fünften, u. s. w., also überhaupt der an ungeraden Stellen stehenden Ziffern gleich der Summe der an geraden Stellen stehenden ist.

Kennzeichen für die Theilbarkeit durch zusammengesetzte Zahlen lassen sich aus denen für die Theilbarkeit durch Primzahlen ableiten; so ist eine Zahl durch 6 theilbar, wenn sie gleichzeitig durch 2 und durch 3 theilbar ist.

Die Kennzeichen, welche man für die Theilbarkeit durch noch andere als die bisher erwähnten Zahlen abgeleitet hat (z. B. für 7) sind derart, dass die wirkliche Ausführung der Division den Vorzug vor ihrer Anwendung verdient. —

§ 21. Einheiten niederer Ordnungen.

In derselben Weise, in der man in den Zahlensystemen von der ursprünglichen Einheit zu Einheiten höherer Ordnungen aufsteigt, kann man auch von denselben zu Einheiten niederer Ordnungen herabsteigen, und so auch die zwischen die ganzen Zahlen sich einschiebenden Bruchzahlen in das System einschliessen. Diese Fortsetzung des Zahlensystems unterhalb der ursprünglichen Einheit verlangt zunächst die Auffindung einer Einheit, welche zur ursprünglichen in derselben Beziehung steht, wie diese zur Einheit erster Ordnung. Wie also im dekadischen System jede folgende der Zahlen 10^n . . . 1000, 100, 10, 1 der zehnte Theil der vorigen ist, so muss die nächst niedere Einheit wieder der zehnte Theil der ursprünglichen, also $\frac{1}{10}$ sein, in gleicher Weise ist jede der weiter folgenden niederen Einheiten $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . . der zehnte Theil der vorhergehenden. Ist allgemein a die Grundzahl des Systems, so bezeichnet man den Bruch $\frac{1}{a}$ als die Einheit der — 1ten Ordnung (a^{-1}), ebenso $\frac{1}{a^2}$ als Einheit der — 2ten Ordnung (a^{-2}), u. s. f. allgemein $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ als Einheit der — $n$ten Ordnung. Auch hier wird die Ordnung durch die Stellung bezeichnet, indem jede Anzahl von Einheiten eines niederen Ranges um eine Stelle weiter nach rechts geschrieben wird, als die Einheiten des vorhergehenden Ranges. Hierdurch entsteht die Nothwendigkeit, die Stelle zu bezeichnen, welche die Einheiten der ursprünglichen (0ten) Ordnung einnehmen. Dies geschieht in der Regel durch ein nach diesen letzteren gesetztes Komma. So bedeutet also beispielsweise die Zahl 314,897 für die Grundzahl 10 dasselbe wie $3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$.

Für das dekadische System führen derartige Zahlen den Namen **Decimalbrüche**. Wegen der besonderen Wichtigkeit der letzteren für das praktische Rechnen sollen dieselben im folgenden Abschnitt in besonderer Darstellung behandelt werden.

Anhang 2.

Die Decimalbrüche.

(Heis, § 29—30.)

§ 22. Grundbegriffe.

Für das praktische Rechnen ist eine bestimmte Art von Brüchen von besonderer Wichtigkeit geworden, und da dieselben im Folgenden vielfach gebraucht werden, während der — hier vorausgesetzte — elementare Rechenunterricht dieselben bisher in der Regel nicht eingehend genug behandelt hat, so soll denselben ihrer besonderen Bedeutung für den praktischen Rechner wegen ein eigener Abschnitt gewidmet werden.

Ein jeder Bruch, dessen Nenner 10 oder 100, 1000, u. s. w., also gleich einem Produkte ist, dessen Faktoren sämmtlich gleich 10 sind, heisst ein **Decimalbruch**. Da der Nenner eines solchen durch eine 1 mit einer oder mehreren Nullen geschrieben wird, so genügt es, die Anzahl dieser Nullen zu wissen, um den Nenner angeben zu können. Man schreibt daher einen Decimalbruch, indem man den Nenner weglässt und dafür die Anzahl seiner Nullen durch ein

Komma angiebt, welches vor eine gleiche Anzahl von Ziffern des Zählers, von rechts nach links gerechnet, gesetzt wird.

Man schreibt also z. B. statt $\frac{317}{100}$ kürzer 3,17, statt $\frac{4471}{10}$, 447,1; umgekehrt bedeutet 42,158 dasselbe wie $\frac{42158}{1000}$. Man liest den letzteren Decimalbruch auch: Zweiundvierzig, Komma, eins, fünf, acht.

Hat der Nenner mehr Nullen, als der Zähler Ziffern, so werden die zur Bezeichnung des Nenners durch das Komma fehlenden Ziffern linker Hand durch Nullen ersetzt; ausserdem schreibt man vor das Komma noch eine Null.

So wird z. B. $\frac{51}{1000}$, 0,051 geschrieben, und 0,72 ist gleich $\frac{72}{100}$.

Im Gegensatz zu den Decimalbrüchen nennt man alle anderen Brüche **gemeine** Brüche.

Bekanntlich unterscheidet man bei den Brüchen **echte** und unechte, je nachdem dieselben kleiner oder grösser als 1 sind. Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner, bei einem unechten grösser als der Nenner. Für Decimalbrüche ergiebt sich hieraus leicht die Regel: Ein Decimalbruch ist ein echter, wenn vor dem Komma nur eine Null, ein unechter, wenn vor dem Komma eine Zahl steht, die grösser als Null ist.

Die unechten Brüche können durch Absonderung der in ihnen enthaltenen ganzen Zahlen nach der Regel

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c}$$

in sogenannte gemischte Zahlen verwandelt werden. Für Decimalbrüche ergiebt sich hieraus: Die vor dem Komma stehende Zahl ist gleich der ganzen Zahl, die hinter dem Komma stehenden Ziffern liefern den Zähler der entsprechenden gemischten Zahl. So ist beispielsweise $4,2583 = 4\frac{2583}{10000}$, denn $\frac{42583}{10000} = \frac{40000}{10000} + \frac{2583}{10000}$.

Man kann ferner in dem vorstehenden Beispiel

$$\frac{2583}{10000} = \frac{2000}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{80}{10000} + \frac{3}{10000}$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{3}{10000}$$

setzen, und da sich dieses Verfahren allgemein anwenden lässt, so folgt, dass die erste Ziffer rechts vom Komma Zehntel der Einheit, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, u. s. w. enthält.

Hiernach lässt sich ein Decimalbruch auf vier verschiedene Arten lesen; so z. B. 72,318 wie folgt: Zweiundsiebenzig, Komma, drei, eins, acht, oder 72 Tausend, dreihundert und achtzehn Tausendtel, oder 72 Ganze und dreihundert und achtzehn Tausendtel, oder endlich 72 Ganze, drei Zehntel, ein Hunderttel und acht Tausendtel.

Bei einem Decimalbruch bezeichnet hiernach das Komma die Stelle der **Einer**, indem es diesen angehängt ist, und wie die Zehner die erste, die Hunderter die zweite, die Tausender die dritte Stelle vor den Einern u. s. w. einnehmen, wie also jede frühere Ziffer vor dem Komma sich auf eine zehn mal so grosse Einheit, als die folgende bezieht, so folgen in der ersten Stelle nach den Einern Zehntel, in der zweiten Hundertel, in der dritten Tausendtel u. s. w. In den Decimalbrüchen wird also das zehntheilige Zahlensystem durch die auf das Komma folgenden Ziffern in gleicher Weise von den Einern nach abwärts fortgesetzt, wie es in den ganzen Zahlen von den Einern zu den Zehnern, Hundertern u. s. w. aufsteigt.

Besonders einfache Beispiele hierzu bieten die neueren zehntheiligen Maasse, Münzen und Gewichte. Eine Strecke z. B. von 5 Kilometer, 3 Dekameter,

2 Meter, 7 Decimeter, 9 Centimeter und 8 Millimeter Länge kann bezeichnet werden durch 532,798 Meter. Dieselbe Strecke ist gleich 5,32798 Kilometer oder 53,2798 Dekameter oder 5327,98 Decimeter oder 53579,8 Centimeter oder endlich 532798 Millimeter. Ein Decimalbruch unterscheidet sich also von einer ganzen Zahl des dekadischen Zahlensystems nur dadurch, dass die Einer nicht die letzte Stelle rechts, sondern die dem Komma vorangehende Stelle einnehmen, während im Uebrigen die Rangordnung der Ziffern nach ihrer Stellung dieselbe bleibt.

Die auf das Komma folgenden Ziffern eines Decimalbruchs heissen die Decimalstellen desselben.

§ 23. Rechnen mit Decimalbrüchen.

1. Für die Rechnung mit Decimalbrüchen ergiebt sich aus dem Vorstehenden zunächst leicht, dass man bei der Addition von solchen ebenso die Zehntel zu den Zehnteln, die Hundertel zu den Hunderteln u. s. w. addiren kann, wie bei ganzen Zahlen die Einer zu den Einern, die Zehner zu den Zehnern, u. s. w. Entsprechendes gilt für die Subtraction. Hieraus folgt die praktische Regel: Um Decimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren, schreibe man dieselben so unter einander, dass Komma unter Komma kommt, addire oder subtrahire dann wie bei ganzen Zahlen und setze das Komma im Resultat an dieselbe Stelle, wie in den einzelnen Gliedern.

Der praktische Rechner gewöhne sich übrigens auch hier daran, dass er nicht nöthig habe, die Zahlen wirklich unter einander zu schreiben, sondern dass er auch ohne dies die Ganzen zu den Ganzen, die Zehntel zu den Zehnteln addire u. s. w.

Hängt man an einen Decimalbruch nach der letzten Ziffer rechts eine Null an, so wird sowol der Zähler als der Nenner mit 10 multiplicirt, der Werth des Bruches bleibt also unverändert. So ist z. B. $1{,}5 = 1{,}50$, denn $1{,}50 = \frac{150}{100} = \frac{15}{10}$. Durch wiederholte Anwendung dieser Regel ergiebt sich der Satz: Durch Anhängen beliebig vieler Nullen an einen Decimalbruch wird derselbe mit 10 oder 100, 1000 u. s. w. erweitert, sein Werth also nicht verändert. Umgekehrt darf man Nullen, welche am Ende eines Decimalbruchs stehen, unbeschadet des Werthes des letzteren weglassen. Der Decimalbruch wird hierdurch mit 10 oder 100, 1000 u. s. w. gehoben.

Hiernach kann man ungleichnamige Decimalbrüche gleichnamig machen, indem man denselben so viele Nullen anhängt, dass alle gleich viele Decimalstellen erhalten.

Auch jede ganze Zahl kann in Form eines Decimalbruchs geschrieben werden, indem man hinter dieselbe ein Komma setzt und auf dieses beliebig viele Nullen folgen lässt.

Die auf solche Weise gleichnamig gemachten Decimalbrüche können dann nach bekannter Regel mittelst Addition oder Subtraction ihrer Zähler addirt oder subtrahirt werden. Bei diesem Addiren oder Subtrahiren können die angehängten Nullen wieder weggelassen werden; man gelangt auf diese Weise zu derselben Regel für die Addition und Subtraction von Decimalbrüchen, welche schon oben angegeben ist.

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 17{,}384 \\ +\ 0{,}1562 \\ +\ 315{,}74 \\ \hline 333{,}2802 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 5{,}318 \\ -\ 1{,}9465 \end{array}\right\} - \quad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0{,}41276 \\ \hline 0{,}58724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}3715 \end{array}$$

2. Verschiebt man das Komma eines Decimalbruchs um eine Stelle nach rechts, so bleibt der Zähler unverändert, während der Nenner durch 10 dividirt wird. Der Bruch wird also hierbei mit 10 multiplicirt. So geht z. B. 1,583 durch eine solche Verschiebung in 15,83, also $\frac{1583}{1000}$ in $\frac{1583}{100}$ über. Durch Wiederholung, bezw. durch Umkehrung dieses Verfahrens ergiebt sich die Regel: Um einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. zu multipliciren, verschiebe man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach rechts; um ihn durch 10, 100, 1000 u. s. w. zu dividiren, verschiebe man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach links.

Um einen Decimalbruch mit einem Decimalbruch zu multipliciren, multiplicire man dieselben ohne Rücksicht auf das Komma, wie ganze Zahlen, indem man mit der höchsten Ziffer des Multiplicators beginnt und die auf einander folgenden Theilprodukte um je eine Stelle weiter nach rechts hinaus rückt. Bei der Multiplication mit den Einern des Multiplicators bestimme man die Stelle des Kommas, indem man dasselbe vor so viele Stellen setzt, als der Multiplicandus nach dem Komma hat. An die entsprechende Stelle setze man nach der Addition der Theilprodukte das Komma im Resultat.

Beispiele:	5,426 · 17,41	0,134 · 0,0598
	54 26	0,000
	37,982	670
	2 1704	1206
	5426	1072
	94,46666	0,0080132

Die Begründung dieser Regel ergiebt sich daraus, dass die Multiplication ohne Berücksichtigung des Kommas gleichbedeutend ist mit der Multiplication der Zähler der Brüche, durch welche der Zähler des Produkts ermittelt wird, während der Nenner des Produkts durch die Stelle der Einer bestimmt werden kann, welche sich bei der Multiplication mit den Einern des Multiplicators ergiebt. Da nämlich der Nenner des Produkts stets wieder durch eine Eins mit angehängten Nullen geschrieben werden kann, so genügt zu seiner Bestimmung in der That diejenige der Stelle der Einer des Resultats.

Die vorstehende Form der Regel für die Multiplication zweier Decimalbrüche ist der gebräuchlichen vorzuziehen, welche sich aus der Anwendung des Satzes $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ergiebt, und welche, wie folgt, ausgesprochen werden kann:

Man multiplicire die Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma, also wie ganze Zahlen, und schneide im Produkt so viele Stellen von rechts nach links durch das Komma ab, als die Faktoren zusammen enthalten.

Der Grund für die Bevorzugung der ersteren Regel ergiebt sich im Folgenden bei der »abgekürzten Multiplication«.

Ist der eine Faktor ein Decimalbruch, der andere eine ganze Zahl, so ändert sich die vorstehende Regel nicht.

3. Soll ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so dividire man ohne Rücksicht auf das Komma, also wie bei zwei ganzen Zahlen, und setze im Resultat das Komma vor eine gleiche Anzahl von Decimalstellen, wie im Dividendus. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus der Regel, dass man einen Bruch durch eine Zahl dividiren kann, indem man den Zähler durch die Zahl dividirt und den Nenner unverändert lässt.

In dem folgenden Beispiel ist die in § 8 angegebene Methode der Division ganzer Zahlen benutzt:

63,7978 : 517 = 0,1234
12 09
1 757
2068
000

Um dagegen durch einen Decimalbruch zu dividiren, multiplicire man — entsprechend der allgemeinen Regel für die Division durch einen Bruch — den Dividendus mittelst Verschiebung des Kommas mit dem Nenner und dividire das Produkt in der vorher gezeigten Weise durch den Zähler.

Beispiel: 16,30936 : 4,78 = 1630,936 : 478 = 3,412
196 9
5 73
956.

§ 24. Unendliche Decimalbrüche.

1. Bleibt bei der Division eines Decimalbruchs durch einen Decimalbruch oder durch eine ganze Zahl ein Rest, so kann man dem Dividendus beliebig viele Nullen anhängen und hiernach mit der Ausführung der Division beliebig weit fortfahren. Doch ist vor dem Anhängen der Nullen das Komma im Resultat nach der im § 23 angegebenen Regel zu bestimmen.

Ist der Dividendus eine ganze Zahl, so kann man derselben ebenfalls nach Bestimmung des Kommas im Resultat beliebig viele Nullen als Decimalstellen anhängen.

Beispiel: 17 : 5,12 = 1700 : 512 = 3,3203125
1640
1040
1600
640
1280
2560

Hierbei ist es möglich, dass die Division erst spät oder gar nicht aufgeht. Dass der letztere Fall stattfinden kann, ergiebt sich aus Folgendem: Das Anhängen der Nullen ist gleichbedeutend mit einem Erweitern des Bruches mit einer der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. Da nun die Division von Decimalbrüchen, abgesehen von der Bestimmung des Kommas, mit einer Division ganzer Zahlen identisch ist, so kann die vorliegende Frage dahin gefasst werden, unter welcher Bedingung eine ganze Zahl b, die sich in eine andere gegebene Zahl a nicht ohne Rest dividiren lässt, in ein Produkt von a mit einer der Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. ohne Rest aufgehe. Unter der stets erfüllbaren Voraussetzung, dass a und b keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, kann der Quotient $\frac{a \cdot 1000\ldots}{b}$ nur dann eine ganze Zahl sein, wenn b ein Faktor von 1000 . . . ist. Hieraus folgt, dass nach dem Anhängen von Nullen die Division nur dann ohne Rest »aufgehen« kann, wenn der Divisor b keine anderen Faktoren als 2 oder 5 enthält.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist der Quotient ein Decimalbruch mit unendlich vielen Decimalstellen und kann daher selbstverständlich nie vollständig hingeschrieben werden. Da nun bei jeder Theildivision ein Rest bleiben muss,

welcher kleiner als der — als ganze Zahl dargestellte — Divisor ist, so ist die Anzahl der möglichen verschiedenen Reste um 1 kleiner als dieser Divisor. Es muss also nach höchstens $b-1$ Theildivisionen mit dem Divisor b ein Rest erscheinen, welcher schon einmal dagewesen ist, und sofern an beide Reste auch dieselbe Ziffer (Null) angehängt wird, muss sich von da an das Divisionsverfahren in derselben Weise, wie von jenem ersten Reste ab, wiederholen. Es muss sich also auch im Quotienten von einer bestimnten Stelle an stets dieselbe Zifferngruppe in derselben Weise wiederholen.

Beispiel: 15,3182 : 0,27 = 1531,82 : 27 = 56,73407407 . . .

181
198
92
110
200
110
200

Es kehrt hierbei die Zifferngruppe 407 fortwährend wieder.

Decimalbrüche, welche unendlich viele Decimalstellen haben, werden kurz **unendliche** Decimalbrüche genannt. Kehrt dabei dieselbe Zifferngruppe in derselben Ordnung immer wieder, so heisst der unendliche Decimalbruch ein **periodischer**, und jene Zifferngruppe seine **Periode**. Beginnt die erste Periode mit der ersten Decimalstelle; wie z. B. in 0,757575 . . ., so heisst der Decimalbruch ein **rein** periodischer, gehen aber der ersten Periode Decimalstellen vorher, welche also nicht dem Gesetze derselben folgen, so heisst er ein **gemischt** periodischer.

Jede Division mit Decimalbrüchen, welche nicht aufgeht, führt also nach Obigem auf einen periodischen Decimalbruch als Resultat.

2. Auch die Division zweier ganzen Zahlen kann, wenn dieselbe nicht aufgeht, indem man dem Dividendus ein Komma und nach demselben beliebig viele Nullen anhängt, in der obigen Weise behandelt werden. Daher lässt sich auch jeder gemeine Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, indem man den Nenner in den Zähler dividirt. So ist

$\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3} = 0{,}33\ldots$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$, $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$, u. s. w.

Umgekehrt lässt sich jeder Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln. Für endliche Decimalbrüche versteht sich dies von selbst; es ist hier nur eine Formverwandlung vorzunehmen, indem man den durch das Komma bestimmten Nenner als solchen wirklich hinschreibt oder ausspricht und allenfalls, wenn möglich, den Bruch noch durch den grössten gemeinsamen Faktor des Zählers und Nenners hebt. So ist $0{,}47 = \frac{47}{100}$; $3{,}125 = \frac{3125}{1000} = \frac{25}{8}$, u. dgl. m.

Ist dagegen der Decimalbruch ein unendlicher, periodischer, so kann man nach Anleitung folgender Beispiele verfahren:

1) $x = 0{,}801801\ldots$; $1000\,x = 801{,}801\ldots$, also $1000\,x - x = 801$, mithin $x = \frac{801}{999} = \frac{89}{111}$

2) 3,151515 . . . Man setze $x = 0{,}1515\ldots$, also $100\,x = 15{,}15\ldots$, $100\,x - x = 15$, $x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$; mithin ist der gegebene Bruch gleich $3\frac{5}{33} = \frac{104}{33}$.

3) 0,14 2186 2186 . . . Man setze $x = 0{,}2186\,2186\ldots$ und bestimme wie vorher $x = \frac{2186}{9999}$, so ist der gegebene Bruch gleich $\frac{14{,}2186\,2186\ldots}{100} = 14\frac{2186}{9999} : 100 = \frac{142172}{9999} : 100 = \frac{71081}{499950}$.

Durch Verallgemeinerung dieser Beispiele lassen sich leicht allgemeine Regeln ableiten, welche die Wiederholung des ganzen Verfahrens in jedem einzelnen Fall überflüssig machen.

§ 25. Abgekürzte Decimalzahlen.

1. Die Anzahl der Ziffern der Periode eines durch Division zweier Zahlen entstehenden unendlichen Decimalbruchs muss, wie bemerkt, mindestens um 1 kleiner als der (als ganze Zahl genommene) Divisor sein. Sie ist im einzelnen Fall möglicherweise mehr oder minder erheblich geringer, als dieser Grenzwerth, kann aber auch denselben erreichen. Beispielsweise erhält man aus einem gemeinen Bruche, dessen Nenner 99 ist, nicht eine 98stellige, sondern nur eine zweistellige Periode; dagegen hat die Periode für den Nenner 7 stets die volle Anzahl von 6 Stellen. Hieraus geht hervor, dass man, wenn der Divisor nicht eine verhältnissmässig kleine Zahl ist, bis zur Feststellung der Periode eine grosse Anzahl von Decimalstellen zu bestimmen haben kann. Abgesehen von der Unmöglichkeit, einen unendlichen Decimalbruch vollständig hinzuschreiben, liegt hierin für das praktische Rechnen eine grosse Unbequemlichkeit. Es entsteht daher die Frage, ob in solchen Fällen nicht eine Abkürzung möglich sei.

In der Praxis ist es nie möglich, die den Rechnungen zu Grunde liegenden Messungen mit absoluter Genauigkeit auszuführen, da weder die dazu gebrauchten Messinstrumente noch auch die menschlichen Sinne so vollkommen sind, um eine solche Genauigkeit zuzulassen. Auch gestatten die Bedürfnisse der Praxis stets das Ausserachtlassen von Grössen, die eine gewisse durch den jedesmal beabsichtigten Zweck bestimmte Grenze nicht übersteigen. Es ist daher in solchen Fällen auch gestattet, mit Zahlen zu rechnen, welche mehr oder minder fehlerhaft sind, wenn nur der daraus entstehende Fehler des endlichen Resultats nicht über die im einzelnen Fall gestattete Grenze hinausgeht.

Eine solche fehlerhafte Zahl entsteht, wenn man bei einem Decimalbruch nur eine bestimmte Anzahl der vorhandenen Decimalstellen benutzt und alle folgenden vernachlässigt. Es fragt sich zunächst, welches die Grenzen der dabei begangenen Fehler sind. Da nun die erste Decimalstelle die Zehntel, die zweite die Hundertel, die dritte die Tausendtel enthält u. s. w., so ergiebt sich, dass der Fehler bei dem Weglassen aller Decimalstellen weniger als eine ganze Einheit, bei dem Weglassen der auf die erste folgenden Decimalstellen weniger als $\frac{1}{10}$, bei dem Beibehalten von 2, 3, 4, . . . Decimalen weniger als $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, . . . beträgt. Allgemein ist, wenn man n Decimalstellen beibehält und die folgenden weglässt, der Fehler kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle, d. h. kleiner als $\frac{1}{10^n}$, wo 10^n ein Produkt von n Faktoren bedeutet, die sämmtlich gleich 10 sind.

Eine schärfere Begründung dieses Satzes folgt daraus, dass der durch Weglassen aller Decimalstellen begangene Fehler nicht grösser als der Werth des periodischen Decimalbruchs 0,999 . . ., der bei Beibehaltung nur einer Decimalstelle entstehende Fehler nicht grösser als 0,0999 . . . sein kann, u. s. w.

2. Einen Decimalbruch (oder auch eine ganze Zahl), welcher durch Weglassen von Decimalstellen abgekürzt ist, nennt man eine **abgekürzte** oder eine **unvollständige** Decimalzahl. Bei dem Abkürzen ist, wenn die erste weggelassene Ziffer 5 oder mehr als 5 beträgt, die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit zu erhöhen, denn in diesem Falle würde ohne die Erhöhung der Fehler über eine halbe Einheit der letzten Stelle betragen, während er bei der Erhöhung

weniger als eine solche halbe Einheit beträgt. Man darf hiernach bei jeder unvollständigen Zahl annehmen, dass der Fehler derselben weniger beträgt als die Hälfte einer Einheit der letzten angegebenen Stelle. Ist diese Stelle erhöht worden, so ist der unvollständige Bruch zu gross, im anderen Falle ist er zu klein.

Da hiernach der Fehler mit jeder Decimalstelle, welche mehr angegeben wird, zehnmal so klein wird, als vorher, so kann man die Abkürzung immer so vornehmen, dass eine durch die praktischen Anforderungen an die betreffende Rechnung bestimmte Fehlergrenze nicht überschritten wird.

Da es überflüssig und zeitraubend ist, mit Decimalstellen zu rechnen, welche in der Anwendung keinen Gebrauch finden und werthlos sind — sei es, weil die den Rechnungen zu Grunde liegenden Messungen nicht mit entsprechender Genauigkeit ausgeführt wurden, sei es, weil die Praxis die betreffende Genauigkeit des Resultats nicht verwerthet, so wird der praktische Rechner nicht nur alle vorkommenden unendlichen Decimalbrüche, sondern überhaupt alle, welche mehr Decimalstellen haben, als gebraucht werden, abkürzen. Das Rechnen mit solchen unvollständigen Zahlen erfordert aber, dass man stets über die Grenzen der begangenen Fehler, auch in den Resultaten, orientirt bleibe, damit dieselben nicht das im einzelnen praktischen Fall erlaubte Maass übersteigen.

Man hat daher bei praktischen Rechnungen das Rechnen mit unvollständigen Zahlen von dem Rechnen mit vollständigen Zahlen durchaus zu unterscheiden. Das erstere soll wegen seiner besonderen praktischen Wichtigkeit im Folgenden noch näher erörtert werden.

§ 26. Addition und Subtraction unvollständiger Decimalzahlen.

1. Unter der Voraussetzung der Unvollständigkeit bedeutet nach dem Vorhergegangenen beispielsweise

1715	eine	Zahl	zwischen	1714,5	und	1715,5,
5,728	„	„	„	5,7275	„	5,7285,
5,7280	„	„	„	5,72795	„	5,72805,
500	„	„	„	499,5	„	500,5,
5 Hundert	„	„	„	450	„	550,
$3\frac{5}{6}$	„	„	„	$3\frac{9}{12}$	„	$3\frac{11}{12}$

Man darf daher z. B. in der unvollständigen Zahl 3,400 die Nullen am Ende nicht weglassen; da 3,4 bedeuten würde, dass die dritte und vierte Decimale weggelassen, die für dieselben zu setzenden Ziffern also nicht bekannt seien, während durch 3,400 gesagt wird, dass die Hundertel und Tausendtel bekannt und mit in Rechnung gezogen sind.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit einer Zahlangabe genügt nicht die Kenntniss der Anzahl der angegebenen Decimalstellen. Beispielsweise ist die Zahl 573 Centimeter ebenso genau als die Zahl 5,73 Meter, denn die Fehlergrenze beträgt bei beiden Zahlenangaben — die ja überhaupt sachlich identisch sind — $\frac{1}{2}$ Centimeter. Entsprechend ist die Zahl 5329 genauer als die Zahl 0,173, denn ein Fehler von 0,5 ist im Verhältniss zu der Zahl 5329 geringer als ein Fehler von 0,0005 im Verhältniss zur Zahl 0,173; im ersteren Fall beträgt der Fehler nur $\frac{1}{10658}$, im letzteren $\frac{1}{346}$ der betreffenden Zahl.

Man hat daher unter der Genauigkeit einer Zahlangabe das Verhältniss der Zahl zu ihrer Fehlergrenze, also zu 5 Einheiten der ersten nicht angegebenen Stelle zu verstehen.

Andere setzen dieselbe gleich dem Verhältniss der Zahl zu einer Einheit der letzten angegebenen Stelle, da die Unsicherheit der Zahl insofern bis zu einer solchen Einheit geht, als der Fehler von einer halben Einheit sowol positiv als negativ sein kann. In diesem Falle ist also z. B. die Genauigkeit der Zahl 5,74 gleich 5,74 : 0,01 = 574, die Genauigkeit von 0,00574 gleich 0,00574 : 0,00001 = 574, also ebenso gross, die von 83 gleich 83 : 1, dagegen die von 0,045 nur 0,045 : 0,001 = 45 : 1.

2. Bei der Addition unvollständiger Zahlen werden alle Summanden auf die gleiche Anzahl von Stellen abgekürzt angenommen, denn anderen Falls würden im Resultat doch nicht mehr Stellen verbürgt sein, als der am meisten abgekürzte Summand enthält. Sind z. B. 0,15274 und 3,481 zu addiren, so sind im Resultat die Zehntausendtel und die Hunderttausendtel nicht zu bestimmen, weil sie in dem zweiten Summanden fehlen. Man kürzt daher den ersten zu 0,153 ab.

Zur Bestimmung der Fehlergrenze der Summe ist, da die Fehler aller einzelnen Summanden möglicherweise in demselben Sinne wirken können, eine halbe Einheit der letzten benutzten Decimale mit der Anzahl der Summanden zu multipliciren. Werden z. B. zwölf fünfstellige Decimalbrüche addirt, so kann die Summe bis zu 6 Einheiten der fünften Decimale zu gross oder zu klein sein. Hiernach lässt sich umgekehrt leicht bestimmen, wieviel Decimalstellen die Summanden haben müssen, auf wieviele man letztere also abzukürzen hat, falls sie genauer gegeben sind, damit der Fehler in der Summe eine vorher angegebene Grenze nicht übersteige. Um die $n$te Decimale in der Summe sicher zu haben, sodass also der Fehler der Summe eine halbe Einheit dieser $n$ten Stelle nicht übersteigt, muss man, wenn die Zahl der Summanden unter 10 ist, $n + 1$stellige Zahlen addiren; bei mehr als 10 und weniger als 100 Summanden müssen die letzteren $n + 2$stellig sein.

Für genauere Rechnungen mit abgekürzt gegebenen Zahlen fügt man der Summe die Angabe ihrer genaueren Fehlergrenze hinzu. Hierbei können, wenn von den verschiedenen Summanden verschiedene Anzahlen von Stellen bekannt sind, die überzähligen Ziffern zu einer Verminderung der anzunehmenden Fehlergrenze von Nutzen sein. Ist z. B. die Summe folgender Zahlen zu berechnen

0,38721
5,369
4,1276,

so erhält man nach Abkürzung des ersten und des dritten Summanden auf je drei Stellen die Summe 9,884 mit der Fehlergrenze ± 0,0015. Benutzt man dagegen die Kenntniss auch der vierten Stelle in zwei Summanden, so erhält man zwar die Summe ebenfalls nur auf drei Decimalstellen verbürgt, aber zur Fehlergrenze nur ± 0,0006, da man die Fehler jener beiden Summanden genauer kennt.

Bei der Subtraction unvollständiger Zahlen gilt Entsprechendes, wie bei der Addition. Die Fehlergrenze der Differenz zweier $n$stelligen Decimalbrüche ist, da auch hier die Fehler der einzelnen Glieder sich summiren können, gleich einer ganzen Einheit der $n$ten Stelle. Um also n Stellen verbürgt zu erhalten, müssen der Minuend und der Subtrahend $n + 1$stellig genommen werden.

§ 27. Abgekürzte Multiplication.

Um den Fehler bei der Multiplication zweier unvollständiger Zahlen zu beurtheilen, sei angenommen, dass eine $m$stellige Zahl mit einer $n$stelligen

multiplicirt werden solle. Bei vollständiger Ausrechnung erscheinen dann im Resultat $m+n$ Decimalstellen; man sieht jedoch leicht ein, dass dieselben, wenn die Faktoren abgekürzte Zahlen waren, nur zum Theil brauchbar sind; denn fügte man jenen Faktoren noch eine oder mehrere Decimalstellen hinzu, so würden auch die letzten Ziffern des vorigen Resultats anders ausfallen. Vergleicht man z. B. die beiden Rechnungen

```
0,2182 · 0,243          0,21823 · 0,2434
0,04364                 0,043646
   8728                    87292
    6546                    65469
0,0530226                    87292
                        0,053117182
```

miteinander, so erkennt man leicht, dass, wenn die Faktoren des ersteren Produkts durch Abkürzung aus denen des zweiten entstanden sind, von dem ersten Resultat nur 0,053 richtig ist. Die Berechnung der übrigen Stellen war daher in diesem Falle überflüssig.

Auch wenn die beiden Faktoren genaue Zahlen sind, im Resultat jedoch keine so grosse Genauigkeit, als es in diesem Falle bietet, verlangt ist, entsteht die Aufgabe, durch ein *abgekürztes Multiplications-Verfahren* die Berechnung der überflüssigen Ziffern zu ersparen. Genügt z. B. für die praktische Anwendung die Genauigkeit von drei Decimalen, und multiplicirt man zwei genaue dreistellige Decimalbrüche, so erhält man im Resultat sechs Decimalen, von denen die drei letzten wieder gestrichen werden, so dass also ihre Berechnung nicht nöthig war.

Man beachte für den vorliegenden Zweck, dass ein Produkt unvollständiger Zahlen *höchstens* mit derjenigen Genauigkeit angegeben werden kann, welche das Produkt des minder genauen Faktors mit der höchsten Stelle des genaueren Faktors erhält. Daher nehme man den ungenaueren Faktor (also i. A. denjenigen, welcher die wenigsten geltenden Ziffern hat) zum Multiplicandus. Multiplicirt man dann auf die schon früher empfohlene Art, bei welcher man mit der höchsten Ziffer des Multiplicators beginnt, so hat man nur die nach rechts auszurückenden Stellen der folgenden Theilprodukte wegzulassen, und nur zu beachten, ob in Folge dieses Weglassens die letzte bleibende Ziffer zu erhöhen ist. Man verkürzt also den Multiplicandus für jedes folgende Theilprodukt um eine Stelle, wie das nachstehende Beispiel zeigt:

```
 5,274 · 8,165
42,192
   527
   316
    26
43,061
```

Für das erste Theilprodukt ist hier 5,274 mit 8 multiplicirt; dann ist in 5,274 die letzte Ziffer 4 weggelassen, also 527 mit 1 multiplicirt; darauf ist auch 7 weggelassen und also für das dritte Theilprodukt nur $5{,}2 \cdot 6$ berechnet, jedoch dabei beachtet, dass die weggelassene Ziffer 7 durch ihr Produkt mit 6 noch das Theilprodukt um die »im Sinne behaltene« 4 erhöht; endlich ist 5 mit 5 multiplicirt und das Theilprodukt um die aus $5 \cdot 2$ im Sinne behaltene 1 vermehrt. In dem Produkte ist (in der Regel nur) die letzte Stelle unsicher, da die Fehler der letzten Stellen der Theilprodukte dieselbe beeinflussen können.

Um jedoch die Fehlergrenze des abgekürzten Produktes näher zu bestimmen, unterscheiden wir den Fall, in welchem die gegebenen Faktoren genaue, und denjenigen, in welchem sie abgekürzte Zahlen sind. Im ersteren Fall entsteht eine Ungenauigkeit des Produktes nur dadurch, dass die einzelnen Theilprodukte — mit Ausnahme des ersten — abgekürzt worden sind; die Unsicherheit beträgt also so oft eine halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle, als die um 1 verminderte Anzahl der geltenden Ziffern des Multiplicators angiebt. Man kann selbstverständlich diese Unsicherheit verringern, wenn man bei der Multiplication auch den Betrag der jedesmal zuerst weggelassenen Ziffer des Produkts berücksichtigt.

Sind dagegen die Faktoren abgekürzte Zahlen, so multiplicire man jeden der Faktoren mit der ersten fehlenden Stelle des anderen Faktors, für welche, falls sie unbekannt ist, 5 genommen werden muss, und addire die beiden Produkte. Denn ist z. B. eine vierstellige Zahl a mit einer dreistelligen b zu multipliciren, so hat man

$$(a \pm 0{,}00005)\,.\,(b \pm 0{,}0005) = ab \pm 0{,}00005\,.\,b \pm 0{,}0005\,.\,a \pm 0{,}000000025.$$

Vernachlässigt man — was praktisch gestattet ist — das gegen die übrigen kleine letzte Glied dieser Entwicklung, so sieht man, dass das Produkt ab um $\pm\,(0{,}00005\,.\,b + 0{,}0005\,.\,a)$ unsicher ist.

Für die Praxis genügt meist schon Folgendes: Man multiplicire die erste fehlende Stelle jedes Faktors, für welche eventuell 5 angenommen wird, mit der höchsten geltenden Ziffer des anderen Faktors; dasjenige dieser beiden Produkte, welches den höheren Werth hat, bestimmt die höchste unsichere Ziffer. Für das Produkt $2{,}1457\ldots \times 8837{,}42$ beispielsweise hat man $0{,}00005\,.\,8000 = 0{,}4$; $2\,.\,0{,}005 = 0{,}010$; die Unsicherheit beträgt also jedenfalls mehr als 0,4 und reicht also schon bis in die Ordnung der Zehntel. Ebenso erhält man z. B. für $0{,}4236\ldots \times 9{,}84253\ldots$ zunächst $0{,}00005\,.\,10 = 0{,}0005$; $0{,}4\,.\,0{,}000005 = 0{,}000002$, als Fehlergrenze darf daher 0,0005 angenommen werden.

§ 28. Abgekürzte Division.

Für die Division mit unvollständigen Zahlen erhält man durch entsprechende Entwicklungen, wie bei der Multiplication Folgendes:

Es sei zunächst vorausgesetzt, dass Divisor und Dividendus genaue Zahlen sind, und nur das Resultat bis auf eine bestimmte Anzahl von Stellen abgekürzt erscheinen soll: Man bestimme die erste geltende Stelle des Quotienten wie gewöhnlich und kann dann auch noch beliebig viele folgende Ziffern desselben in gleicher Weise berechnen, ehe man das abgekürzte Divisionsverfahren beginnt. Bei diesem hängt man an den jedesmal vorher gebliebenen Rest nicht die betreffende Ziffer des Dividendus oder eine Null an, sondern streicht jedesmal die letzte vorhandene Ziffer des Divisors, berücksichtigt jedoch bei der Bildung des Theilprodukts diese weggelassene Ziffer noch in Gedanken, um das dabei »im Sinn Behaltene« zu verwerthen. Im Folgenden ist die genaue Division zweier Decimalbrüche mit der abgekürzten (in verschiedener Ausdehnung der Abkürzung) an einem Beispiel zur Vergleichung zusammengestellt:

$$20349{,}85 : 312{,}4 = 203498{,}5 : 3124$$

203498,5 : 3124 = 65,1403649 ..			
16058 . . .			
4385	203498,5 : 3124 = 65,1403649		
12610	16058		
11400	4385	203498,5 : 3124 = 65,1404	
20280	12610	16058 . . .	
15360	11400	4385	203498,5 : 3124 = 65,140
28640	2028	1261	16058
524	154	12	439
	29	0	127
	1		2

Um hierbei die Fehlergrenze des Quotienten zu bestimmen, beachte man zunächst, dass der Fehler bei der vollständigen Division, in Einheiten der letzten Stelle des Quotienten ausgedrückt, gleich dem Quotienten des zuletzt gebliebenen Restes durch den Divisor ist, im obigen Beispiel also gleich $\frac{524}{8134}$. Bei der abgekürzten Division ist der letzte Divisor die höchste Ziffer des ursprünglichen Divisors, der letzte Rest aber kann bis zu so vielen halben Einheiten der betreffenden Stelle ungenau sein, als die Anzahl der abgekürzt berechneten Theilprodukte beträgt. Man erhält hiernach die Fehlergrenze des Quotienten, wenn man den letzten Rest um diesen seinen möglichen Fehler vermehrt (bezw. vermindert) und das Resultat durch die erste geltende Ziffer des Divisors dividirt.

Sind ferner schon der Divisor und der Dividendus ungenaue Zahlen, so wird die erste Stelle des Quotienten, wie gewöhnlich, bestimmt und für die folgenden sogleich das abgekürzte Verfahren in der vorher angegebenen Weise angewendet, sodass also an keinen Rest eine weitere Ziffer des Dividendus oder eine Null angehängt wird. Ist der Divisor genauer als der Dividendus, so muss man den Divisor soweit abkürzen, bis das Produkt desselben mit der ersten Ziffer des Quotienten vom Dividendus abgezogen werden kann. In 0,527 : 471,39 z. B. oder

$$
\begin{array}{l}
52{,}7 : 47139 = 0{,}00112 \\
\;\;56 \\
\;\;\;\,9 \\
\;\;\;\,0
\end{array}
$$

sind an 52,7 nicht die fehlenden zwei Nullen anzuhängen, sondern 47139 ist durch Abstreichen von zwei Stellen abzukürzen, man subtrahirt also 471 von 527, streicht darauf im Divisor auch die 1 und dividirt also mit 47 in den vorher gebliebenen Rest 56. Darauf wird mit 4 in den Rest 9 dividirt, jedoch berücksichtigt, dass die weggelassene Ziffer 7 des Divisors noch eine im Sinne behaltene 1 zu dem Produkt $4 \cdot 2 = 8$ hinzufügt. Der letzte Rest ist also 0. Hierbei ist die letzte Stelle des Quotienten in Folge des möglichen Fehlers in dem letzten Reste unsicher.

Ist dagegen der Divisor ungenauer als der Dividendus, so ist letzterer auf so viele Stellen abzukürzen, als zur Subtraction des ersten Theilprodukts erforderlich sind, und dann ist wie vorher abgekürzt zu dividiren.

$$
\begin{array}{l}
\text{Beispiel: } 643{,}18 : 5{,}142 = 64318_{(0)} : 5142 = 125{,}1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 1290 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\; 262 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\;\;\;\, 5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\;\;\;\, 0.
\end{array}
$$

Das erste Theilprodukt $5142 \cdot 1 = 5142$ ist hier von 6431 abgezogen, die folgende Ziffer 8 wird abgestrichen und nur insofern berücksichtigt, als der Rest 1289 um 1 zu erhöhen ist. Dann wird im Divisor die 2 abgestrichen, darauf das Theilprodukt $2 \cdot 514{,}_2 = 1028$ vom Reste 1290 subtrahirt, dann auch die 4 im Divisor abgestrichen, das neue Theilprodukt $51{,}4 \cdot 5 = 257$ von dem vorigen Reste 262 subtrahirt, u. s. w.

Die genauere Bestimmung der Fehlergrenze ist hier umständlicher als vorher, weil nicht bloss die Ungenauigkeit des letzten Restes, sondern auch die des Divisors und des Dividendus zu berücksichtigen ist. Man kann folgende Regel aufstellen, welche daraus folgt, dass

$$\frac{a+\delta}{b-\varepsilon} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\delta - ab + a\varepsilon}{b(b-\varepsilon)} = \frac{b\delta + a\varepsilon}{b(b-\varepsilon)} > \frac{b\delta + a\varepsilon}{b^2} \text{ oder } > \left(\delta + \frac{a}{b}\varepsilon\right) : b$$

ist: Man multiplicire eine halbe Einheit der letzten Stelle des Divisors mit dem (auf seine erste geltende Ziffer abgekürzten) Quotienten, addire zum Produkt eine halbe Einheit der letzten Stelle des Dividendus und dividire die Summe durch den Divisor (bezw. die höchste geltende

Stelle des letzteren). Der Fehler ist kleiner als das hierbei entstehende Resultat. In dem vorher berechneten Beispiel 643,18 : 5,142 hat man also, da 643,18 auf 643,2 abgekürzt wird, (0,0005 . 100 + 0,05) : 5 = 0,02, in dem diesem vorhergehenden Beispiel 0,527 : 471,39, welches auf 0,527 : 471 abgekürzt wurde, (0,5 . 0,001 + 0,0005) : 500 = 0,000002.

§ 29. Beispiele für die Anwendung der abgekürzten Rechnungen.

1. Das Licht gebraucht 8,22 Minuten, um den Weg von der Sonne bis zur Erde (20658000 geogr. Meilen) zurückzulegen. Wieviel Meilen durchläuft es in jeder Secunde?

8,22 Min. = 8,22 · 60 Sec. = 493,2 Sec.

20658 (0000) : 4932 = 4189_0.
930
437
43
— 1

Also 41890 Meilen.

2. Ein Mondmonat, d. h. die Zeit von einem Neumonde bis zum nächsten, dauert 29,530588 Tage. Wieviel Mondmonate verfliessen in 19 Sonnenjahren, wenn jedes der letzteren zu 365,24222 Tagen gerechnet wird?

365,24222 · 19	69396022 : 295305,88 = 234,997099
3652,4222	10334846
3287 1800	1475670
6939 6022	294447
	28672
	2095
	28
	2
	0.

Noch weiter, auf 2 Decimalen abgekürzt, ist also das Resultat 235,00 Monate.

3. Man berechne den Flächeninhalt eines Kreises ($F = r^2\pi$), wenn der Radius gleich 2^m,178 gegeben ist.

2,178 · 2,178	4,743 · 3,142
4,356	14,229
218	474
152	190
17	9
4,743	14,902; also $F = 14{,}902$ □^{m}.

4. Man berechne, wieviel Tage, Stunden, Minuten und Secunden ein Jahr hat, wenn dasselbe 365,24222 Tage enthält.

0,24222 · 24	0,8133 · 60	0,798 · 60
4,8444	48,798	47,8(8)
9689		
5,8133.		

Also ist 1 Jahr = 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Minuten, 47,9 Secunden.

Kapitel 3.

Potenzirung.

§ 30. Begriff der Potenz.

Ein Produkt, dessen Faktoren einander gleich sind, wird eine Potenz genannt und kürzer durch

$$a^b$$

bezeichnet, wobei a ein einzelner der gleichen Faktoren, b die Anzahl dieser Faktoren ist und a die Basis (auch die Grundzahl oder der Dignand), b der Exponent der Potenz genannt wird. Man liest den obigen Ausdruck »a zur $b$ten Potenz« oder »a hoch b.«

Beispielsweise ist also $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Die Berechnung des Werthes einer Potenz, als einer neuen Verbindungsart zweier Zahlen a und b wird als eine neue Operation mit dem Namen Potenziren bezeichnet.

Bei derselben ergiebt sich sogleich eine wesentliche Abweichung von den beiden vorhergehenden directen Operationen, der Addition und der Multiplication. Denn während bei diesen die Grundgesetze $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ Geltung hatten, zeigt bei der Potenzirung jedes beliebige Beispiel (mit Ausnahme von 2^4 und 4^2), dass

$$a^b \text{ nicht gleich } b^a$$

ist. Daher erhalten hier die Basis und der Exponent auch keinen gemeinschaftlichen Namen, und die beiden umgekehrten Operationen, welche aus der Potenzirung hervorgehen, nämlich die Bestimmung von x in den Gleichungen $x^b = c$ und $a^x = c$, können nicht mit einander vertauscht werden.

Die zweite Potenz a^2 einer Zahl a wird auch das Quadrat dieser Zahl genannt und »a im Quadrat« oder abgekürzt »aQuadrat« gelesen. Die dritte Potenz a^3 heisst auch der Cubus, die vierte das Biquadrat von a.

Zwischen dem Begriff der Potenz a^b und dem Begriff des durch Ausführung der Rechnung entstehenden Werthes derselben bestehen analoge Bestimmungen, wie früher in den entsprechenden Fällen. Basis, Exponent und Potenz können sämmtlich nur unbenannte Zahlen, der Exponent kann nach der obigen Definition ausserdem nur eine ganze, positive Zahl sein. — Heis, § 5.

§ 31. Gesetze des Potenzirens.

Zur Entwicklung der Gesetze des Potenzirens lassen wir zuerst die Basis a einen mittelst der bekannten Operationen zusammengesetzten Ausdruck sein und erhalten folgende Regeln:

Für die Potenzirung einer Summe oder Differenz ergiebt die Ausführung der Multiplikation in $(a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) \ldots$ nach (19) im § 11, dass

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
u. s. w.,

und entsprechend

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
u. s. w.

ist. Man ersieht schon hieraus, dass die Aufgabe, allgemein eine Formel für die

Entwicklung von $(a \pm b)^n$ aufzustellen, zu keinem Resultate führen kann, welches hinreichend einfach ist, um an dieser Stelle Erörterung finden zu können. Es empfiehlt sich daher, vorläufig bei Ausdrücken von der Form $(a \pm b)^n$ diese letztere unverändert zu lassen, bezw. bei Zahlenbeispielen die Ausrechnung des Resultats dieser Form entsprechend vorzunehmen. Ausser den oben stehenden einfachsten Fällen merke man sich ausserdem, dass $(a \pm b)^n$ nicht gleich $a^n \pm b^n$ gesetzt werden darf, wozu eine vermeintliche Analogie mit $(a \pm b) \cdot n$ Anfänger irrthümlich verleiten könnte.

Für die Potenzirung eines Produkts folgt dagegen aus

$$(ab)^n = (ab)(ab)(ab)\ldots = (aaa\ldots{}^n)\cdot(bbb\ldots{}^n).$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad (35)$$

und dieses Gesetz lässt sich leicht auf Produkte mit beliebig vielen Faktoren ausdehnen, die also potenzirt werden können, indem man jeden Faktor einzeln potenzirt und dann die Theilpotenzen multiplicirt.

In entsprechender Weise ergiebt sich für die Potenzirung eines Quotienten aus

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots = \frac{aaa\ldots}{bbb\ldots}, \text{ dass } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (36)$$

oder dass eine Potenz eines Quotienten gleich dem Quotient aus den entsprechenden Potenzen des Dividendus und des Divisors ist.

So ist beispielsweise auch $\left(\frac{abc}{def}\right)^n = \frac{a^n b^n c^n}{d^n e^n f^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{c^m}{d^m}$ $= \frac{a^n \cdot c^m}{b^n d^m}$, u. dergl. m. Ferner ist beispielsweise $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$, $(\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8}$. Man sieht leicht ein, dass die Potenzen echter Brüche hiernach um so kleiner, die Potenzen unechter Brüche um so grösser werden, je grösser der Exponent ist.

Um endlich auch eine Potenz a^b zu potenziren, hat man (35) wiederholt anzuwenden und findet

$$(a^b)^n = (a \cdot a \cdot a \ldots{}^b)^n = a^n \cdot a^n \cdot a^n \ldots{}^b = (a^n)^b.$$

Ausserdem kann man

$$(a^b)^n = (aaa\ldots{}^b)\cdot(aaa\ldots{}^b)\cdot(aaa\ldots{}^b)\ldots$$

setzen und erkennt leicht, dass man nach Entfernung der Klammern ein Produkt erhält, dessen Faktoren sämmtlich gleich a sind, und in welchem die Anzahl der Faktoren gleich $b \cdot n$ ist, sodass dasselbe als Potenz a^{bn} geschrieben werden darf. Somit ist

$$(a^b)^n = (a^n)^b = a^{bn} \quad (37).$$

Man kann also die Exponenten in der Reihenfolge vertauschen, oder auch die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziren. Dieselbe Regel lässt sich durch Wiederholung auf mehr als zwei aufeinander folgende Exponenten ausdehnen. So ist beispielsweise

$$[(a^2)^3]^4 = [(a^3)^2]^4 = (a^6)^4 = (a^4)^6 = a^{24} \text{ u. dergl. m.}$$

§ 32. Fortsetzung.

Während im Vorstehenden für die Basis einer Potenz ein zusammengesetzter Ausdruck gesetzt war, soll nun angenommen werden, dass der Exponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder ein Quotient sei.

Soll a im Ganzen $m + n$ mal als Faktor gesetzt werden, so kann man das

Produkt in zwei Abtheilungen von bezüglich m und n Faktoren trennen, also

$$a^{m+n} = \overset{m}{aaa\ldots} \cdot \overset{n}{aaaa\ldots}$$

setzen, sodass also

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad (38)$$

erhalten wird. So ist beispielsweise $3^7 = 3^{2+5} = 3^2 \cdot 3^5$, ferner $a^{x+y+z} = a^{x+y} \cdot a^z = a^x \cdot a^y \cdot a^z$, und allgemein eine Potenz, deren Exponent eine Summe ist, gleich dem Produkt aus sämmtlichen Potenzen der Basis mit den einzelnen Summanden als Exponenten.

Ist der Exponent dagegen eine Differenz $m - n$, und setzt man die Basis a zunächst $m$mal als Faktor, so hat die entstandene Potenz a^m jenen Faktor $n$mal mehr als verlangt war. Die n überzähligen Faktoren können durch Division mit a^n wieder entfernt werden, und somit ist

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad (39).$$

So ist z. B. $a^{5-3} = \frac{aaaaa}{aaa} = \frac{a^5}{a^3} = a^2$.

Ist also der Exponent einer Potenz eine Differenz, so kann man die Basis mit dem Minuend und mit dem Subtrahend einzeln potenziren und dann die erstere dieser beiden Potenzen durch die letztere dividiren. Hierbei ist, da $m - n$ eine positive Zahl sein muss, vorausgesetzt, dass der Minuend m grösser ist als der Subtrahend n.

Ist ferner der Exponent ein Produkt mn, so ergiebt sich, indem man das letztere als eine Summe $m + m + ..^n$ oder $n + n + n + ..^m$ darstellt, aus (38), oder auch durch Umkehrung von (37)

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m. \quad (40)$$

Ist also der Exponent ein Produkt, so kann man mit den Faktoren desselben nach einander, und zwar in beliebiger Reihenfolge potenziren.

Der Fall endlich, in welchem der Exponent ein Quotient ist, kann nach der obigen Erklärung der Potenz nur dann eintreten, wenn der Dividendus ein Vielfaches des Divisors ist. Die Erledigung dieses Falles geschieht besser an einer späteren Stelle, wo auch die Frage zu erwägen sein wird, ob es möglich sei, die gedachte Beschränkung aufzuheben. Auch der noch zu erwähnende Fall, in welchem der Exponent wieder eine Potenz ist, führt hier zu keiner einfachen Entwicklung.

§ 33. Fortsetzung.

Zu der im Vorstehenden behandelten Aufgabe, die Gesetze des Potenzirens mit zusammengesetzten Zahlen zu entwickeln, tritt nun die fernere hinzu, die verschiedenen Rechnungsarten auf Potenzen anzuwenden, also zu fragen, wie man Potenzen addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren oder potenziren kann.

Für die Addition und Subtraction beliebiger Potenzen lassen sich keine einfachen Gesetze entwickeln. Ausdrücke, wie $a^m \pm b^n$, können also nicht durch gleichwerthige von anderer, einfacher Form ersetzt, und müssen bei bestimmten Zahlenbeispielen unverändert ausgerechnet werden. Dass man sich insbesondere zu hüten hat, etwa $a^n \pm b^n = (a \pm b)^n$ zu setzen, folgt aus dem in § 31 Gesagten. Auch ein Produkt beliebiger Potenzen gestattet keine einfache Umformung. Dagegen ist eine solche möglich, wenn entweder die Basen oder die Exponenten einander gleich sind, und dasselbe gilt für Quotienten von Potenzen. Man erhält

nämlich schon durch blosse Umkehrung der früheren Formeln (35) bis (39) die folgenden

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, \\ a^m \cdot b^m &= (ab)^m, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \qquad (41) \\ \frac{a^m}{b^m} &= \left(\frac{a}{b}\right)^m \end{aligned}$$

Man kann hiernach Potenzen, deren Basen gleich sind, mittelst Addition der Exponenten multipliciren und mittelst Subtraction der Exponenten dividiren, dagegen Potenzen, deren Exponenten gleich sind, mittelst Multiplication der Basen multipliciren und mittelst Division der Basen dividiren.

Daher ist auch $a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}$, $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$,

$$\frac{a^x \cdot a^y}{a^z} = a^{x+y-z}, \text{ u. dgl. m.}$$

Die Potenzirung einer Potenz ist bereits durch (37) erledigt.

§ 34. Potenzen mit Null oder negativen Zahlen.

Dieselben können nach der Erklärung der Potenz nur insofern vorkommen, als die Basis gleich Null oder negativ sein kann. Ist die Basis o, so folgt aus $o \cdot o = o$ leicht, dass jede Potenz derselben gleich Null ist. Ist die Basis negativ, so folgt aus

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2; \quad (-a)^3 = (-a)^2 \cdot (-a) = -a^3,$$
$$(-a)^4 = (-a)^3 \cdot (-a) = +a^4; \quad (-a)^5 = (-a)^4 \cdot (-a) = -a^5,$$

u. s. w., allgemein

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}; \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, \qquad (42)$$

d. h. man potenzirt eine negative Zahl, indem man ihr Glied potenzirt und der Potenz bei geradem Exponenten das Vorzeichen +, bei ungeradem Exponenten das Vorzeichen — giebt. Für positive Zahlen ist selbstverständlich stets $(+a)^n = +a^n$.

Obgleich nun der Exponent einer Potenz nach der Erklärung der letzteren in § 30 nie Null oder negativ sein kann, so lässt sich doch diese Erklärung dergestalt erweitern, dass der Begriff der Potenz ein allgemeiner, auch für die genannten Fälle gültigbleibender wird. Betrachtet man nämlich die Reihe der Potenzen einer Zahl a,

$$a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots a^n, a^{n+1}, \ldots,$$

so erkennt man, dass jede derselben aus der ihr folgenden durch Division mit a abgeleitet werden kann. Setzt man die Reihe nach dem gleichen Bildungsgesetz nach rückwärts, also über ihren Anfang hinaus fort, so wird man zunächst darauf geführt, unter a^1 (welcher Ausdruck als Produkt mit nur einem Faktor nach dem Früheren streng genommen auch keinen Sinn haben würde) den Werth von $\frac{a^2}{a}$, d. i. a selbst, dann unter a^0 den Werth von $\frac{a}{a}$ oder 1, unter a^{-1} den Werth von $\frac{1}{a}$ u. s. w. zu verstehen, also $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, u. s. f. zu setzen. Benutzt man also jenes Bildungsgesetz zu einer erweiterten Definition des Potenzbegriffs, oder setzt man, was auf dasselbe hinauskommt, fest, dass allgemein

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

sein solle, welches auch der Werth der Differenz $m - n$ sein möge, so erhält man insbesondere

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^0 &= 1 \\ a^{-b} &= \frac{1}{a^b}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Es ist also die Potenz a^0 nicht durch ein keinmaliges Setzen der Zahl a als Faktor, sondern dahin zu erklären, dass alle vorhanden gedachten Faktoren a durch Division mit einer gleichen Anzahl derselben wieder entfernt gedacht werden. Die Regel, dass jede Zahl mit 0 potenzirt zum Werth der Potenz 1 gebe, hat jedoch eine Ausnahme in dem Fall, dass die Basis a selbst gleich Null ist, denn aus $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m}$ geht für den Fall $a = 0$ die Form $\frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$ hervor, und es ist daher a^0 ebenso wie $\frac{0}{0}$ ein unendlich vieldeutiger Ausdruck.

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist nach dem Vorhergehenden gleich dem reciproken Werth der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. Statt dessen kann man auch sagen, eine solche Potenz sei gleich der entsprechenden Potenz des reciproken Werthes der Basis mit positivem Exponenten, oder

$$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b.$$

Die im Früheren abgeleiteten Rechnungsregeln für Potenzen gelten, wie sich mittelst der vorstehenden Erklärungen leicht für jede einzelne Formel zeigen lässt, auch für den erweiterten Begriff der Potenz, also allgemein. So ist z. B. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ auch dann, wenn m und n negativ sind, denn

$$a^{-b} \cdot a^{-c} = \frac{1}{a^b} \cdot \frac{1}{a^c} = \frac{1}{a^b \cdot a^c} = \frac{1}{a^{b+c}} = a^{-(b+c)}$$

Heis, § 34—40, Bardey XI, XII.

Kapitel 4.

Vom Radiciren.

§ 35. Begriff der Wurzel.

Als erste Umkehrung des Potenzirens behandeln wir die Aufgabe, zu dem gegebenen Werthe einer Potenz und ihrem Exponenten die Basis zu berechnen, oder mit anderen Worten, den Werth von x in der Gleichung

$$x^b = c$$

zu bestimmen. Man nennt diese Rechnungsart Radiciren oder Wurzelausziehen, den gegebenen Werth c der Potenz den Radicanden, den gegebenen Exponenten b auch hier den Exponenten (Wurzelexponent im Gegensatz zu Potenzexponent) und die gesuchte Basis die Wurzel oder Radix. Für die letztere schreibt man

$$x = \sqrt[b]{c}$$

und liest diesen Ausdruck »die $b$te Wurzel aus c«.

Eine Wurzel ist also gleich derjenigen Zahl, deren Potenz mit dem Wurzelexponenten als Exponenten dem Radicand gleich ist. Diese Erklärung kann durch folgende Formel dargestellt werden:

$$\left(\sqrt[b]{c}\right)^b = c. \quad (44)$$

Die zweite Wurzel aus einer Zahl heisst auch die **Quadratwurzel**, die dritte die **Kubikwurzel** aus derselben. Bei Quadratwurzeln pflegt man den Wurzelexponenten wegzulassen; $\sqrt{a}$ hat also dieselbe Bedeutung wie $\sqrt[2]{a}$

So ist beispielsweise $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $3^2 = 9$, $2^3 = 8$, u. dgl. m. Ebenso ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$, u. s. w.

Aus der Erklärung der Wurzeln folgt ohne Weiteres

$$\sqrt[b]{c^b} = c, \quad (45)$$

d. h. radicirt man eine Potenz mit ihrem Exponenten, so erhält man ihre Basis.

§ 36. Irrationale Zahlen.

Wie bei der Subtraction und der Division, so entsteht auch bei der Radicirung die Frage, ob dieselbe auch dann immer ausführbar ist, wenn die Werthe des Radicanden und des Exponenten nicht durch Umkehrung einer wirklich ausgeführten Potenzirung entstanden sind, sondern wenn für dieselben willkürlich bestimmte Zahlen gesetzt werden. Zur Erleichterung dieser Untersuchung setzen wir zunächst nur absolute Zahlen als vorkommend voraus.

Man sieht zunächst leicht ein, dass nach der Erklärung der $b$ten Wurzel aus a nicht nur der Wurzelexponent b eine **ganze** Zahl sein muss, sondern dass auch der Radicand nicht beliebig angenommen werden kann. Beispielsweise sind 4, 16, 25, ... und ebenso $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{16}{25}$, $2\frac{1}{4}$ vollständige zweite Potenzen und daher die Quadratwurzeln aus denselben möglich, dagegen ist $\sqrt{7}$ im bisherigen Sinne unmöglich, da sich unter den bisher bekannten Zahlformen keine Zahl finden lässt, deren Produkt mit sich selbst gleich 7 ist. Zunächst ist nämlich einleuchtend, dass in der Reihe der Quadrate der ganzen Zahlen: 1, 4, 9, 16 ... die Zahl 7 nicht enthalten ist, und es bliebe somit nur die Möglichkeit, dass $\sqrt{7}$ durch eine gebrochene Zahl angegeben werden könnte. Nimmt man nun an, dass $\frac{c}{d}$ dieser Bruch und in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt sei, sodass also c und d relative Primzahlen seien, so müsste $\frac{c^2}{d^2} = 7$, also c^2 durch d^2 theilbar sein, was nach § 17 unmöglich ist.

Es ist nicht schwer, diese Schlussfolgerung zu verallgemeinern. Soll $\sqrt[b]{a}$ berechnet werden, und ist a eine ganze Zahl, so gehört a entweder der Reihe der $b$ten Potenzen aller ganzen Zahlen 1^b, 2^b, 3^b, ... an, oder liegt zwischen zwei Gliedern dieser Reihe, kann also selbst keine ganze Zahl sein. Wäre in diesem Falle $\sqrt[b]{a}$ einer gebrochenen Zahl $\frac{c}{d}$ gleich, so erhielte man in derselben Weise wie vorher die unmögliche Folgerung, dass c^b durch d^b_a theilbar sein müsse, auch wenn d und c relative Primzahlen sind.

Ebensowenig kann behauptet werden, dass, wenn a eine gebrochene Zahl ist, $\sqrt[b]{a}$ immer in dem bisherigen Sinne möglich sei. Denn setzt man $\sqrt[b]{\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{m}{n} = \frac{c^b}{d^b}$, und sind

$\frac{m}{n}$ und $\frac{c}{d}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, also auch c^b und d^b relative Primzahlen, so muss $m = c^b$ und $n = d^b$, also $c = \sqrt[b]{m}$, $d = \sqrt[b]{n}$ sein, womit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt ist.

Die Form $\sqrt[b]{a}$ führt nun für den Fall, dass a keine vollständige $b$te Potenz einer der bisher bekannten Zahlen ist, auf eine neue Erweiterung des Zahlenbegriffs, welche zunächst an einem Beispiel erläutert werden soll:

Es sei die Aufgabe gestellt, $\sqrt{2}$ zu berechnen, also eine Zahl zu ermitteln, die mit sich selbst multiplicirt, zum Produkt 2 gebe. Da nun $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ ist, so nehme man zunächst an, die gesuchte Zahl liege zwischen 1 und 2. Berechnet man nun nach einander $1{,}1^2$, $1{,}2^2$, $1{,}3^2$ u. s. w., so ergiebt sich $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$, und man kann hiernach annehmen, dass die gesuchte Zahl zwischen 1,4 und 1,5 liege. Geht man in dieser Weise weiter fort, berechnet also zunächst die Quadrate von 1,41, von 1,42 u. s. w., so findet man $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$, ebenso weiterhin $1{,}414^2 = 1{,}999396$ und $1{,}415^2 = 2{,}002225$, u. s. w. Man sieht nun bereits, dass man in dieser Weise die Reihe der gefundenen Zahlen 1; 1,4; 1,41; 1,414 . . . immer weiter fortsetzen kann, so dass das Quadrat einer jeden folgenden Zahl dieser Reihe näher an die Zahl 2 kommt, als das der vorhergehenden, und dass man also den Werth von $\sqrt{2}$ durch einen Bruch — zwar niemals absolut genau, aber doch — bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung darstellen kann.

Derartige Zahlen nennt man irrationale, und im Gegensatz zu ihnen die im Früheren behandelten ganzen und gebrochenen Zahlen rationale.

Eine irrationale Zahl ist also eine Zahl, welche zwischen zwei rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ so eingeschlossen ist, dass man die beiden letzteren ohne Ende einander nähern — d. h. ihre Differenz $\frac{1}{n}$ mit unendlichem Wachsen von n unendlich klein machen kann — ohne gleichwol den Werth der irrationalen Zahl auf diese Weise vollständig zu erreichen.

Eine klare Einsicht in das Wesen einer irrationalen Zahl liefert die geometrische Veranschaulichung. In der Planimetrie wird gezeigt, dass bei der Vergleichung der Längen zweier Strecken $AB = a$, $CD = b$ folgende Fälle möglich sind: 1. Man kann die kleinere Strecke b wiederholt auf der grösseren a abtragen, ohne dass zuletzt ein Rest bleibt. In diesem Falle ist a ein (ganzes) Vielfaches von b und setzt man $a = p \cdot b$, so ist p eine ganze Zahl. 2. Bei dem wiederholten Abtragen der Strecke b von der Strecke a bleibt zuletzt ein Rest, welcher kleiner als b ist, aber man kann eine dritte Strecke c finden, welche sich sowol auf b als auf a ohne Rest abtragen lässt. Es ist also a ein Vielfaches eines aliquoten Theiles, z. B. das $m$fache des $n$ten Theiles von b, und in $a = p \cdot b$ ist also p eine gebrochene Zahl. 3. Es giebt auch keine dritte Strecke c, welcher ein aliquoter Theil beider gegebenen Strecken zugleich ist. Nimmt man in diesem Falle einen beliebigen aliquoten Theil von b, etwa $\frac{1}{n}b$, an und trägt denselben so oft als möglich auf a ab, so bleibt zuletzt ein Rest, welcher kleiner als ein solcher Theil sein muss. Hat hierbei eine $m$malige Abtragung stattgefunden, so ist a grösser als $\frac{m}{n}b$ und kleiner als $\frac{m+1}{n}b$. Da man nun den Werth von n so gross machen kann, als man will, so kann man auch

die beiden eben angegebenen Grenzwerthe, zwischen welchen der von a liegen muss, einander so nahe bringen als man will. In $a = p \cdot b$ ist p jetzt eine irrationale Zahl, deren zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ liegender Werth durch eine dieser letzteren Zahlen um so genauer angegeben wird, je grösser n, je kleiner also die Differenz $\frac{1}{n}$ dieser Zahlen ist.

Stellt man, wie früher geschehen, die Reihe der ganzen Zahlen durch eine Reihe von Punkten einer Geraden dar, welche in gleichen Abständen auf einander folgen, die gebrochenen Zahlen also durch zwischen den ersteren eingeschaltete Punkte, so bleiben nach dem Vorigen noch immer Punkte übrig, deren Abstand vom Anfangspunkt der Zählung auf diese Weise nicht erhalten werden kann, weil er mit dem die Einheit darstellenden Abstand kein gemeinschaftliches Maass hat. Diese Punkte versinnlichen also die irrationalen Zahlen, und durch sie wird nun die bisher eine Reihe unterbrochener (wenn auch noch so nahe aneinanderstehender) Punkte bildende Darstellung der Zahlenreihe zur continuirlichen Zahlenlinie, denn es kann keinen Punkt auf dieser Linie geben, dessen Abstand vom Anfangspunkt sich nicht entweder durch eine rationale oder durch eine irrationale Zahl ausdrücken lässt.

Die irrationalen Zahlen sind, obgleich durch rationale nicht genau angebbar, doch wie diese, genau bestimmte Zahlen. Sie sind bei der Anwendung auf benannte Grössen nur mit der gewählten Einheit nicht durch ganze oder gebrochene Zahlen zu vergleichen, und dieselbe Grösse — z. B. eine Strecke — die in Beziehung auf eine bestimmte Einheit durch eine irrationale Maasszahl gemessen wird, kann in Beziehung auf eine andere Einheit rational erscheinen.

Sind z. B. die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleich a, so ist zufolge des pythagoräischen Lehrsatzes die Hypotenuse gleich $\sqrt{2a^2}$. Nimmt man also die Länge der Kathete zur Einheit an, so ist die der Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$. Diese irrationale Zahl ist also hier durch eine ganz bestimmte, construirbare Länge dargestellt. Dieselbe Länge aber erhält eine rationale Maasszahl, wenn man z. B. die Hälfte oder das Drittel u. s. w. der Hypotenuse zur Einheit nimmt, und in diesem Fall wird umgekehrt die Maasszahl der Kathete irrational.

Es erscheint als selbstverständlich, dass man auch von positiven und negativen Irrationalzahlen reden, oder dass die Stetigkeit der Zahlenlinie nach beiden Richtungen vom Anfangspunkt aus erreicht werden kann.

§ 37. Rechnen mit irrationalen Zahlen.

Es entsteht nun zunächst die Frage, ob die bisherigen Erklärungen und Rechnungsregeln, welche nur unter der Voraussetzung rationaler Zahlen aufgestellt oder abgeleitet waren, auch auf irrationale Zahlen angewendet werden dürfen. Dass dies nicht ohne Weiteres geschehen kann, folgt schon daraus, dass die früheren Erklärungen der Summe, Differenz u. s. w. von der Entstehung der Zahlen aus der Einheit ausgingen, bei den Irrationalzahlen aber eine Zerlegung derselben in Einheiten nicht möglich ist. Gleichwol müssen jene Erklärungen sich auch auf die neue Zahlform ausdehnen lassen, wie beispielsweise das Vorkommen von Irrationalzahlen als Maasszahlen von Strecken zeigt; denn offenbar kann man eine gegebene Strecke auch um eine ihr incommensurabele verlängern und die Maasszahl der entstehenden ganzen Strecke als die Summe der Maasszahlen der beiden Theile betrachten, u. dgl. m.

Für den hier vorliegenden Zweck dürfte zur Vermeidung weitläufiger abstracter

Erörterungen folgende Darstellung in Betreff der aufgeworfenen Frage genügen: Jede irrationale Zahl kann nach dem Vorigen durch eine rationale Zahl a annähernd dargestellt, und letztere kann durch fortgesetzte Annäherung in $a + \frac{1}{n}$ oder $\frac{an+1}{n}$ übergehend gedacht werden, wobei der letztere Ausdruck von der Irrationalzahl selbst um so weniger verschieden ist, je grösser n gedacht wird, und bei dem Wachsen von n bis in's Unendliche in diesen Ausdruck selbst als Grenze übergeht. Während also eine gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ die Bildung von b Theileinheiten aus der ursprünglichen ganzen Einheit verlangte, erfordert die Irrationalzahl eine Theilung der letzteren in unendlich viele gleiche, daher an Grösse unendlich kleine Theile der Einheit. Eine solche Theilung kann nicht wirklich ausgeführt werden, denn sonst müsste dieselbe ein Ende haben, allein sie kann gleichwol ausgeführt gedacht werden. Weil aber die Erklärungen der Rechnungsarten und die Ableitungen der Gesetze für gebrochene Zahlen völlig unabhängig waren von der Grösse der Nenner, also von der Anzahl der Theile, in welche die Einheit getheilt gedacht wurde, so müssen sie auch gültig bleiben, wenn diese Anzahl bis in's Unendliche wächst.

Denkt man sich beispielsweise eine Irrationalzahl durch einen Decimalbruch annähernd dargestellt, so muss die Anzahl der Decimalstellen des letzteren um so mehr zunehmen, je geringer seine Abweichung von der Irrationalzahl selbst sein soll. Die irrationale Zahl selbst könnte aber nur durch einen Decimalbruch von unendlich vielen Stellen angegeben werden. Obgleich es nun unmöglich ist, einen solchen zu schreiben, so kann doch die Existenz eines solchen gedacht, und es können auch solche Decimalbrüche unter sich oder mit endlichen Decimalbrüchen addirt, subtrahirt, multiplicirt u. s. w. gedacht werden, indem man die gleichstelligen Ziffern derselben bis in's Unendliche addirt oder subtrahirt denkt, u. s. w., ohne dass es nöthig wäre, diese Operationen wirklich auszuführen. Auch ohne dies lässt sich gewiss zu zwei unendlichen Decimalbrüchen ein dritter unendlicher Decimalbruch denken, dessen einzelne Stellen bis in's Unendliche durch Addition der entsprechenden Stellen der beiden ersteren entstehen würden.

Es mag übrigens hier besonders erwähnt werden, dass nicht jeder unendlich vielstellige Decimalbruch eine Irrationalzahl ist. Die periodischen Decimalbrüche sind gemeinen Brüchen gleich, also rational.

§ 38. Gesetze des Rechnens mit Wurzelgrössen.

Die besonderen Gesetze des Rechnens mit Wurzelgrössen (und also auch mit Irrationalzahlen) ergeben sich leicht aus dem Begriff der Wurzel, bezw. durch Umkehrung der Potenzregeln. Auch für die Wurzeln aus Summen und Differenzen giebt es keine einfachen Umformungen. Dagegen kann eine Wurzel aus einem Produkt gefunden werden, indem man die einzelnen Faktoren mit demselben Exponenten radicirt und die entstehenden Wurzeln multiplicirt, oder es ist

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad (46)$$

eine Regel, die sich leicht auf Produkte von beliebig vielen Faktoren ausdehnen lässt, und deren Richtigkeit sich daraus ergiebt, dass

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \sqrt[n]{a}^{\,n} \cdot \sqrt[n]{b}^{\,n} = ab \text{ (nach (35) und (44))},$$

also in der That die rechte Seite der Gleichung derjenigen Zahl gleich ist, deren Potenz mit n den Werth ab hat.

Der vorstehende Satz findet eine nützliche Anwendung zunächst zur praktischen

Berechnung von Wurzeln, deren Radicanden sich in Faktoren zerlegen lassen, für welche die betreffenden Wurzeln bekannt sind. So ist z. B.

$$\sqrt{6084} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2} = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78;$$
$$\sqrt[3]{74088} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42,$$
$$\sqrt[5]{a^5 b^{10} c^{15}} = \sqrt[5]{a^5 \cdot b^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot c^5 \cdot c^5} = a b^2 c^3.$$

Auch wenn der Radicand sich nicht vollständig in zu diesem Verfahren geeignete Faktoren zerlegen lässt, kann das Ausziehen der Wurzeln aus einzelnen solchen Faktoren zur Vereinfachung einer Rechnungsaufgabe dienen. So kann man z. B.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2}, \text{ oder } \sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = 2\sqrt[3]{7},$$
$$\text{oder } \sqrt{4a^3 b} = \sqrt{4a^2 \cdot ab} = 2a\sqrt{ab} \text{ setzen u. dgl. m.}$$

Da umgekehrt das Produkt zweier Wurzeln, welche gleiche Exponenten haben, gleich der entsprechenden Wurzel aus dem Produkt der Radicanden sein muss, so kann man beispielsweise

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a b a^{n-1} c} = \sqrt[n]{a^n b c} = a \sqrt[n]{bc},$$
$$\text{oder } \sqrt[n+1]{a^4 b c} \cdot \sqrt[n+1]{a^6 b^n c^{5-n}} \cdot \sqrt[n+1]{a^{n-9} b^0 c^{2n-5}} =$$
$$\sqrt[n+1]{a^{n+1} \cdot b^{n+1} \cdot c^{n+1}} = abc \text{ setzen,}$$

und auch Faktoren vor einem Wurzelzeichen unter das letztere schaffen, wie in folgenden Beispielen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b},$$
$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$
$$p\sqrt{\frac{q}{p}} = \sqrt{p^2 \frac{q}{p}} = \sqrt{p \cdot q}; \quad 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}.$$

Für die Wurzeln aus Quotienten erhält man entsprechend

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad (47)$$

d. h. man kann eine Wurzel aus einem Quotienten berechnen, indem man die entsprechende Wurzel aus dem Dividendus und die aus dem Divisor berechnet und die erstere durch die letztere dividirt.

Umgekehrt kann man zwei Wurzeln, die gleiche Exponenten haben, dividiren, indem man ihre Radicanden dividirt und aus dem Quotienten die entsprechende Wurzel zieht.

Der Beweis der Formel (47) ergiebt sich, entsprechend dem vorigen aus

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a}^n}{\sqrt[n]{b}^n} = \frac{a}{b}.$$

Beispielsweise ist also $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$; $\sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{p^2 q^2}} = \frac{abc}{pq}$, $\sqrt{\frac{a^4 b^3 c^2}{m n^2}} = \frac{a^2 bc}{n}\sqrt{\frac{b}{m}}$;

und umgekehrt $\sqrt{a^3} : \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{2} : 2 = \sqrt{2 : 4} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$;

$$a : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}, \text{ u. dgl. m.}$$

Man kann auf diese Weise stets bewirken, dass die Ausziehung einer Wurzel aus einem Bruche wieder zu einem Bruche führt, dessen Nenner rational ist, denn man hat nur nöthig den Radicanden so zu erweitern, dass der Nenner desselben eine dem Wurzelexponenten entsprechende vollständige Potenz wird, also z. B. für $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ zu setzen

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}, \text{ oder z. B. } \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}, \text{ u. dgl. m.}$$

Ueberhaupt kann man Brüche, deren Nenner irrational sind, in gleiche mit rationalem Nenner verwandeln, wie folgende Beispiele zeigen mögen:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}; \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \quad \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}; \quad \frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{7}.$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+c} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c)} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{\sqrt{b}^2-c^2} = \frac{a(\sqrt{b}-c)}{b-c^2};$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5}{2}(\sqrt{3}+1); \quad \frac{1}{5+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{25-5} = \frac{5-\sqrt{5}}{20};$$

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-\sqrt{c}^2} = \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+2\sqrt{ab}+b-c}$$

$$= \frac{x(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

$$\frac{1}{a-\sqrt{a-\sqrt{a}}} = \frac{a+\sqrt{a-\sqrt{a}}}{a^2-a+\sqrt{a}} = \frac{(a+\sqrt{a-\sqrt{a}})(a^2-a-\sqrt{a})}{(a^2-a)^2-a.} \text{ u. s. w.}$$

Um eine Wurzel aus einer Potenz zu ziehen, werde zuerst vorausgesetzt, dass der Potenzexponent ein Vielfaches des Wurzelexponenten sei. Da nämlich der Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$ verlangt, dass die Potenz a^m in n gleiche Faktoren zerlegt werde, so ergiebt sich für den vorausgesetzten Fall eine Lösung sehr leicht dahin, dass für $m = p \cdot n$ ein solcher Faktor gleich a^p ist. Es ist nämlich dann $a^m = a^{pn} = (a^p)^n$ und $\sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p$, oder, wenn man für p die Form $\frac{m}{n}$ einführt,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad (48).$$

Diese Regel liefert umgekehrt die im Früheren vorbehaltene Umformung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten, jedoch unter dem Vorbehalt, dass der Dividendus m ein Vielfaches von n sei. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, also $\frac{m}{n}$ ein Bruch im engeren Sinne, so hat $a^{\frac{m}{n}}$ nach der früheren Erklärung der Potenz überhaupt keinen Sinn, führt aber zu einer Erweiterung dieser Erklärung, durch welche die obige Formel (48) die Bedeutung einer allgemeinen Definition des Potenzbegriffs erhält, und somit selbst allgemein gültig wird. Setzt man nämlich, um die dem Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ nothwendig beizulegende allgemeine Bedeutung zu ermitteln, zunächst die Basis a statt $\frac{m}{n}$mal, $m$mal als Faktor, so hat man a zu oft gesetzt, d. h. die Anzahl der gesetzten Faktoren ist $n$mal zu gross. Um also den wirklich verlangten Ausdruck zu erhalten, muss man die genannte Potenz $\overset{m}{aaa\cdots}$ in n gleiche Faktoren zerlegen. Dies ist aber nach dem Früheren nicht bloss dann möglich, wenn m ein Vielfaches von n ist, sondern mit Hülfe der Wurzelausziehung und der neuen Zahlform der Irrationalzahlen ganz allgemein.

Hiernach ist also beispielsweise der Ausdruck $5^{\frac{3}{2}}$ dahin zu deuten, dass eine Zahl gesucht werden solle, welche, zweimal als Faktor gesetzt, den Werth $5 \cdot 5 \cdot 5$ ergebe, oder dass letzteres Produkt in zwei gleiche Faktoren zu zerlegen sei.

Dies ist zwar nicht durch Angabe einer ganzen Anzahl der vorhandenen Faktoren 5, wol aber durch die der $\sqrt{125}$ gleiche Irrationalzahl möglich.

Hiernach führt also die consequente Weiterentwicklung der bisherigen Begriffe mit Nothwendigkeit zu der Erklärung, dass unter $a^{\frac{m}{n}}$ in jedem Fall die n te Wurzel aus a^m verstanden werden solle.

Da man hierbei den Quotienten $\frac{m}{n}$ beliebig erweitern oder heben kann, so führt die obige Formel (48) weiter zu den folgenden:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}. \qquad (49)$$

Potenz-Exponent und Wurzelexponent stehen also in einer ähnlichen gegenseitigen Beziehung, wie Zähler und Nenner eines Bruches. Wie diese, so darf man auch jene durch gemeinschaftliche Faktoren dividiren, also z. B.

$$\sqrt[12]{a^{30}} = \sqrt{a^5}; \quad \sqrt[mnp]{a^{npq}} = \sqrt[m]{a^q}$$

setzen, und umgekehrt. Die Multiplication beider Exponenten mit demselben Faktor führt zu der Möglichkeit, zwei gegebene solche Wurzeln so umzuformen, dass beide denselben Potenzexponent, oder dass beide denselben Wurzelexponent erhalten. Der gemeinschaftliche Exponent wird hierbei ebenso bestimmt, wie der sogen. Generalnenner bei dem Gleichnamigmachen von Brüchen. Sind z. B.

$$\sqrt[5]{a^2}, \ \sqrt[8]{a^3}, \ \sqrt[10]{a^9}, \ \sqrt[12]{a^5}$$

gegeben, so erhält man gleiche Wurzelexponenten, indem man $5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$ zum gemeinsamen Exponenten macht, also bezw.

$$\sqrt[120]{a^{48}}; \ \sqrt[120]{a^{45}}; \ \sqrt[120]{a^{108}}; \ \sqrt[120]{a^{50}}$$

setzt, dagegen gleiche Potenzexponenten mittelst $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$, also

$$\sqrt[225]{a^{90}}; \ \sqrt[240]{a^{90}}; \ \sqrt[100]{a^{90}}; \ \sqrt[216]{a^{90}}.$$

Da nun Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten sich nach (46), bezw. (47) multipliciren und dividiren lassen, so erhält man auf diesem Wege die Möglichkeit, allgemein die Multiplication und Division von Wurzeln auszuführen. So ist

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[r]{a^s} = \sqrt[nr]{a^{mr}} \cdot \sqrt[nr]{a^{ns}} = \sqrt[nr]{a^{mr+ns}}; \quad \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^{20} \cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{29}};$$

$$\sqrt[xy]{a^m} \cdot \sqrt[yz]{a^n} = \sqrt[xyz]{a^{mz+nx}}; \quad \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[24]{a^{29}}.$$

Als ein besonderer Fall der Anwendung der obigen Regel kann auch die Umformung von $\sqrt[n]{a^m}$ in $\sqrt[n:m]{a^{m:m}}$, d. h. die weitere Formel

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a} \qquad (50)$$

gelten. In der Praxis findet dieselbe namentlich Anwendung, wenn n ein Vielfaches von m ist. So ist z. B.

$$\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \text{ u. dgl. m.}$$

Zugleich ergiebt diese Formel die Bedeutung, welche einer Wurzel mit gebrochenem Exponenten ganz allgemein beizulegen ist.

Da jede Zahl als Potenz mit dem Exponenten 1 geschrieben werden kann, so lässt sich jeder Wurzel die Form einer Potenz geben. Es ist also

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \qquad (51)$$

also z. B. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, und umgekehrt $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; $8^{\frac{1}{3}} = 2$, $8^{\frac{2}{3}} = 4$, u. s. w.

Es lässt sich auch leicht zeigen, dass alle früher für Potenzen im engeren Sinne, also für solche mit ganzen Exponenten abgeleiteten Regeln auch für die

neue, erweiterte Bedeutung der Potenz richtig bleiben, sodass also das Rechnen mit Wurzeln ohne Weiteres auch auf ein Rechnen mit Potenzen zurückgeführt werden kann. So ist z. B. auch $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, denn $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p}$ $= \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Umgekehrt kann man auch jede Potenz in Form einer Wurzelgrösse schreiben,

$$\text{z. B. } a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

Der Ausdruck $\sqrt[n]{a^m}$ gestattet endlich noch eine andere Umformung, welche sich auf die Reihenfolge der Operationen bezieht und in der Formel

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (52)$$

ausgesprochen ist. Man kann also statt der Potenz die Basis derselben radiciren und die entstandene Wurzel mit dem Potenzexponenten potenziren. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich daraus, dass

$$[(\sqrt[n]{a})^m]^n = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m \text{ ist.}$$

So ist z. B. $\sqrt[3]{8^7} = 2^7$; $\sqrt{25^3} = 5^3$.

Umgekehrt kann man hiernach eine Wurzel potenziren, indem man ihren Radicanden potenzirt.

Um endlich eine Wurzel zu radiciren, findet man die Formel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (53),$$

d. h. man kann die beiden Wurzelexponenten mit einander vertauschen, oder auch statt der zweimaligen Wurzelausziehung eine einmalige mit dem Produkt der beiden Exponenten setzen.

Der Beweis ergiebt sich wieder aus dem Begriff der Wurzel:

$$\text{Es ist } \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}, \text{ und auch } \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[\frac{mn}{m}]{a} = \sqrt[n]{a}.$$

Umgekehrt zeigt die Formel (53), wie man eine Zahl mit einem Produkt als Exponenten radiciren kann.

So ist also beispielsweise $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$, $\sqrt[n]{a \cdot \sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m b}} = \sqrt[nm]{a^m b}$.

Heis § 41—46. Bardey XIII, XVI.

§ 39. Fortsetzung.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze des Rechnens mit Wurzeln aus zusammengesetzten Radicanden lieferten zugleich diejenigen für Wurzeln mit zusammengesetzten Exponenten. Ist der Exponent eine Summe oder Differenz, so giebt es keine einfache Umformung der Wurzel. Ist derselbe ein Produkt oder ein Quotient, so findet die Formel (53), bezw. (48) Anwendung. Ist der Exponent eine Potenz oder wieder eine Wurzel, so finden ebenfalls keine einfachen Umformungen statt.

Ebenso sind im § 38 die Gesetze für die Verbindung zweier Wurzeln durch eine der bisherigen Operationen enthalten. Für die Summe oder Differenz zweier Wurzeln giebt es keine einfachen Umformungen, für das Produkt oder den Quotienten zweier Wurzeln finden die Regeln (46) und (47) Anwendung, für die Potenz einer Wurzel, oder die Wurzel aus einer Wurzel waren die Regeln (52) und (53) abgeleitet.

Es bleibt somit nur noch die Untersuchung derjenigen Fälle übrig, in welchen der Exponent oder der Radicand einer Wurzel gleich Null oder eine algebraische Zahl ist.

Ist der Radicand gleich 0, so folgt aus $0^n = 0$ umgekehrt $\sqrt[n]{0} = 0$. Ist der Exponent gleich 0, so erhält zufolge der allgemeineren Erklärungen der Potenz und Wurzel der Ausdruck $\sqrt[0]{a}$ die Bedeutung $a^{\frac{1}{0}}$. Die Division einer Zahl durch Null führt, wie früher erwähnt, auf besondere Schwierigkeiten, und da Ausdrücke dieser Art in den Anwendungen der Elementar-Mathematik nicht vorkommen werden, und ihre Erörterung mit den Hülfsmitteln der höheren Mathematik leichter und genauer auszuführen ist, so dürfen wir von einer näheren Untersuchung an dieser Stelle absehen und uns auf die praktische Regel beschränken, dass man innerhalb der Elemente, wie die Quotienten mit dem Divisor Null, so auch die Wurzeln mit dem Exponenten Null vermeiden solle.

Ist der Exponent eine negative Zahl, so hat man

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ also } \sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad (54).$$

Ist dagegen der Radicand eine algebraische Zahl, so hat man zu beachten, dass zwar $(+a)^n$ stets gleich $+(a^n)$, dagegen $(-a)^n$, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist, entweder gleich $+(a^n)$ oder gleich $-(a^n)$ ist.

Hieraus folgt umgekehrt, dass $\sqrt[n]{+a^n}$, falls n eine ganze Zahl und gerade ist, sowol gleich $+a$, als auch gleich $-a$, dagegen wenn n ungerade ist, nur gleich $+a$ sei, sowie dass $\sqrt[n]{-a^n}$ für ein gerades n nicht möglich, für ein ungerades gleich $-a$ sei. So ist z. B. $(-2)^2 = (+2)^2 = +4$, $(-2)^3 = -8$, daher kann $\sqrt{4}$ sowol gleich $+2$, als auch gleich -2 sein, während $\sqrt[3]{8}$ nur gleich $+2$, und $\sqrt[3]{-8} = -2$ zu setzen ist. Dagegen giebt es unter den bisher bekannten Zahlen keine, deren zweite Potenz negativ ist, und $\sqrt{-4}$ erscheint also als unmöglich.

Ist der Exponent keine ganze Zahl, so kann die Wurzel nach dem Früheren stets auf eine solche zurückgeführt werden, bei welcher dies der Fall ist. So hat man beispielsweise

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{-4} = \sqrt[2]{(-4)^3} = \sqrt{-64}; \quad \sqrt[-\frac{3}{2}]{-8} = \sqrt[-3]{(-8)^2} = \sqrt[-3]{64} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}.$$

Man kann sich daher auf den Fall, in welchem der Wurzelexponent eine ganze positive Zahl ist, beschränken, und also folgende Regeln aufstellen:

Um eine Wurzel aus einer algebraischen Zahl auszuziehen, kann man im Allgemeinen die gleiche Wurzel aus dem Gliede derselben ausziehen und das Vorzeichen der letzteren, wie folgt, bestimmen:

Ist der Wurzelexponent ungerad, so erhalt die Wurzel das Vorzeichen des Radicanden.

Ist der Wurzelexponent gerad, so erhalt die Wurzel bei positivem Radicanden beide Vorzeichen. Dieselbe hat also zwei Werthe (ist zweideutig). Ist dagegen der Radicand negativ, so entspricht in diesem Falle der Wurzel keine der bisher bekannten Zahlformen.

Es ist also $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$; $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$,

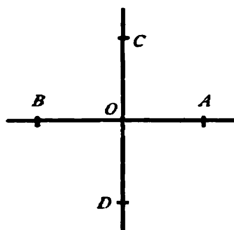
dagegen $\sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}$; $\sqrt[2n]{-a}$ unmöglich.

Insbesondere ist also $\sqrt{a^2} = \pm a$, $\sqrt[3]{+a^3} = +a$, $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

HEIS, § 47, 48.

§ 40. Imaginäre Zahlen.

Daraus, dass $\sqrt[2n]{-a}$ durch keine der bisherigen Zahlformen angegeben werden kann, darf ebensowenig wie in ähnlichen früheren Fällen gefolgert werden, dass ein solcher Ausdruck überhaupt keinen Sinn haben könne, sondern es ist zu untersuchen, ob nicht auch in diesem Falle eine Erweiterung des bisherigen Zahlenbegriffs es ermögliche, auch für diese Ausdrücke einen Sinn zu erhalten. Hierfür bietet uns wieder die Veranschaulichung der Zahlen durch Strecken ein Hülfsmittel, wobei wir uns auf den einfachsten und in den späteren Anwendungen fast ausschliesslich vorkommenden Fall der Quadratwurzel aus negativen Zahlen beschränken dürfen.



Die Zahl $+1$ wurde früher durch eine Strecke OA veranschaulicht, welche von einem Anfangspunkte O aus nach einer bestimmten, als die positive angenommenen Richtung auf einer unendlichen Geraden abgetragen war. Entsprechend stellte die an Länge der OA gleiche, nach der entgegengesetzten Richtung abgetragene Strecke OB die Zahl -1 dar. Errichtet man nun auf der durch A und B gehenden Zahlenlinie im Anfangspunkte O die senkrechte Gerade und trägt auf letzterer nach der einen Richtung OC, nach der anderen OD ab, sodass $OC = OD = OA$ ist, so ist nach geometrischen Sätzen OC die mittlere geometrische Proportionale zwischen OA und OB, also $OC^2 = OA \cdot OB$. Man kann daher $OC^2 = (+1) \cdot (-1) = -1$, und somit $OC = \sqrt{-1}$ setzen. Das Gleiche gilt von OD, und da die Richtungen von OC und OD einander entgegengesetzt sind, so wird man die eine dieser Strecken gleich $+\sqrt{-1}$, die andere gleich $-\sqrt{-1}$ setzen dürfen. Man kann nun OC als die Einheit einer zweiten Zahlenlinie betrachten, welche zu der ersten senkrecht steht, und aus dieser Einheit durch Wiederholung, bezw. Theilung derselben ebenso, wie bei der ersten Zahlenlinie die übrigen Zahlen der zweiten Zahlenlinie ableiten. Diese letzteren Zahlen sollen **imaginäre** heissen, und die Zahl $\sqrt{-1}$ die **imaginäre Einheit**. Im Gegensatz dazu heissen die bisher behandelten Zahlen der ersten Zahlenlinie **reelle**. Da nun $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = a\sqrt{-1}$ gesetzt werden kann, so erhält jede Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl die Bedeutung einer imaginären Zahl.

Imaginäre Zahlen sind also solche, welche sich weder durch Wiederholung noch durch Theilung — selbst wenn letztere bis in's Unendliche fortgesetzt gedacht wird — aus der ursprünglichen Einheit (oder aus der dieser entgegengesetzten negativen Einheit) ableiten lassen, sondern welche aus einer Einheit anderer Art hervorgehen. Während die negative Zahl $-a$ aus der entgegengesetzten $+a$ durch Umkehrung der Richtung, also in gewissem Sinne durch Drehung des positiven Strahls der reellen Zahlenlinie um 180^0 entstehend gedacht werden kann, entsteht die imaginäre Zahl $+a\sqrt{-1}$ oder $-a\sqrt{-1}$ durch eine solche Drehung um 90^0. Welche der beiden Richtungen der imaginären Zahlenlinie man als die positive, welche als die negative annehmen will, bleibt hierbei,

ähnlich wie bei der reellen Zahlenlinie, unbestimmt. Hat man eine dieser Richtungen als die positive angenommen, so wird dadurch die entgegengesetzte zur negativen. Die imaginäre Zahlenlinie ist nicht an sich, sondern nur durch ihre Beziehung zur reellen imaginär. Würden die auf *CD* gemessenen Strecken als die ursprünglichen angesehen, so wären die betreffenden Zahlen als reelle und im Gegensatz dazu die der Zahlenlinie *AB* als die imaginären zu betrachten. — Die Null ist beiden Zahlenarten gemeinschaftlich, da beide Linien einander in dem Anfangspunkt der Zählung schneiden.

Ebenso wie früher in praktischen Aufgaben ein negatives Resultat die Unmöglichkeit der Auflösung bezeichnen konnte, wenn für die Zahlen der Aufgabe ein Richtungs-Gegensatz nicht existirte, oder wie das Gleiche bei einer gebrochenen Zahl der Fall war, wenn die Einheit keine Theilung zuliess, so sagt in Aufgaben des praktischen Lebens, wo nur reelle Resultate einen Sinn haben, ein imaginäres Resultat, dass die Auflösung nicht möglich sei. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass in der Rechnung selbst keine imaginären Zahlen vorkommen dürften, denn es kann auch aus solchen bei weiterer Rechnung ein reelles Resultat hervorgehen, wie z. B. aus $\sqrt{-a}$ durch Erhebung in's Quadrat der Radicand $-a$.

§ 41. Rechnen mit imaginären Zahlen.

Bei dem Rechnen mit imaginären Zahlen bezeichnet man nach dem Vorgange von Gauss die imaginäre Einheit $+\sqrt{-1}$ allgemein durch den Buchstaben i.

Da alle früher abgeleiteten Rechnungsgesetze unter der Voraussetzung reeller Zahlen entwickelt worden sind, so können dieselben nicht ohne Weiteres auf imaginäre Zahlen angewendet werden, und es ist also zunächst nachzuweisen, ob dies erlaubt ist, oder welche neuen Gesetze bei imaginären Zahlen an die Stelle der früheren treten.

Da nun die imaginären Zahlen ganz in derselben Weise aus der imaginären Einheit entstehen, wie die reellen aus der reellen Einheit, so lassen sich imaginäre Zahlen unter sich, ebenso wie reelle unter sich addiren und subtrahiren, und da ferner auch hier das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Summanden gelten muss, so sind auch die Rechnungsregeln, welche früher für die Addition und Subtraction reeller Zahlen (auf Grund dieser Vertauschbarkeit) abgeleitet wurden, in gleicher Weise für die Addition und Subtraction imaginärer Zahlen gültig. Es ist also

$$ai + bi = (a + b)\,i\,;\quad ai - bi = (a - b)\,i\,,$$
$$o + ai = + ai\,;\quad o - ai = - ai$$
$$(+ ai) + (- ai) = o\ .$$

Eine Summe von gleichen imaginären Summanden führt ferner auf den Begriff des Produkts einer imaginären mit einer reinen (absoluten, reellen, unbenannten) Zahl. Es ist

$$(+ ai)\cdot b = + ai + ai + \ldots = + (a + a + \ldots)\,i = + (ab)\,i,$$

und entsprechend $(- ai)\cdot b = (- ai) + (- ai) + \ldots = - (ab)\,i.$

Ebenso findet der frühere Begriff der Multiplication mit einem negativen reellen Multiplicator hier Anwendung, wonach mit $-b$ multipliciren gleichbedeutend ist mit der Multiplication mit b und Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Es ist also $(+ ai)\cdot(- b) = - (ab)\,i\,;\,(- ai)\cdot(- b) = + (ab)\,i.$

Man kann entsprechend erklären, dass mit einer imaginären Zahl multipli-

ciren gleichbedeutend sei mit der Multiplication mit der entsprechenden reellen Zahl und Versetzung des Resultats in die andere (imaginäre) Zahlenlinie. Hiernach ist

$$(+a)\cdot(+bi)=+(ab)i;\ (+a)\cdot(-bi)=-(ab)i$$
$$(-a)\cdot(+bi)=-(ab)i;\ (-a)\cdot(-bi)=+(ab)i,$$

und die Vergleichung mit den vorhergehenden Resultaten zeigt, dass auch hier das Gesetz von der Vertauschung der Faktoren gilt.

Entsprechend lässt sich nun auch einem Produkt zweier imaginärer Zahlen eine Bedeutung beilegen. Die Aufgabe $(ai)\cdot(bi)$ bedeutet, dass ai mit b multiplicirt und dass ausserdem das Resultat in die andere Zahlenlinie versetzt werden soll, sodass letzteres jetzt reell wird. Es bleibt hierbei aber noch unbestimmt, in welche Richtung der anderen Zahlenlinie das Produkt zu verlegen, also ob dasselbe positiv oder negativ zu nehmen ist. Diese Frage erledigt sich dadurch, dass

$$i\cdot i=\sqrt{-1}^2=-1$$

gesetzt werden muss, und dass hiernach

$(+i)\cdot(+i)=-1;\ (+i)\cdot(-i)=(-i)\cdot(+i)=+1;\ (-i)\cdot(-i)=-1$ zu setzen ist. Man ist also zu folgender Erklärung genöthigt:

Unter einem Produkt zweier imaginären Zahlen ist diejenige Zahl zu verstehen, welche man durch Multiplication der entsprechenden reellen Zahlen erhält, und zwar die positiv reelle, wenn die beiden imaginären Faktoren ungleiche, die negativ reelle, wenn die Faktoren gleiche Vorzeichen haben. Es ist also:

$$(+ai)\cdot(+bi)=-ab;\ (+ai)\cdot(-bi)=-(ai)\cdot(+bi)=+ab;$$
$$(-ai)\cdot(-bi)=-ab.$$

Die Regel »gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —« verwandelt sich also hier in die entgegengesetzte.

Entsprechende Regeln für die Division mit imaginären Grössen ergeben sich durch Umkehrung aus denen für die Multiplication. Es ist hiernach

$$\frac{+ai}{+b}=+\frac{a}{b}i;\ \frac{-ai}{+b}=-\frac{a}{b}i;\ \frac{+ai}{-a}=-\frac{a}{b}i;\ \frac{-ai}{-b}=+\frac{a}{b}i;$$
$$\frac{+ai}{+bi}=+\frac{a}{b};\ \frac{+ai}{-bi}=-\frac{a}{b};\ \frac{-ai}{+bi}=-\frac{a}{b};\ \frac{-ai}{-bi}=+\frac{a}{b};$$

dagegen $\frac{+a}{+bi}=-\frac{a}{b}i;\ \frac{+a}{-bi}=+\frac{a}{b}i;\ \frac{-a}{+bi}=+\frac{a}{b}i;\ \frac{-a}{-bi}=-\frac{a}{b}i.$

Die vorstehenden Multiplications- und Divisions-Regeln lassen sich, wie folgt, merken: Die Verwandlung einer reellen Zahl a in eine imaginäre ai kann aufgefasst werden als eine Richtungsveränderung der ersteren, welche durch eine Drehung aus der Zahlenlinie um 90° hervorgebracht wird. Hierbei wird man sich die Drehung so denken, dass $+a$ in $+ai$, $-a$ in $-ai$ übergeht. Die imaginäre Grösse ai wieder imaginär nehmen, heisst diese Drehung um 90° in demselben Sinne wiederholen. Hierdurch geht offenbar die positiv imaginäre Zahl $+ai$ in die negativ reelle $-a$ und ebenso die negativ imaginäre $-ai$ in die positiv reelle $+a$ über, denn beide Drehungen ergeben zusammen eine solche von 180°. Mit $+bi$ multipliciren, heisst nun mit b multipliciren und in dem gedachten Sinne die Richtung um 90° verändern; mit $-bi$ multipliciren heisst mit b multipliciren und die Richtung im umgekehrten Sinne verändern. Daher wird aus $(+a)\cdot(+bi)$ wieder $+(ab)i$, aus $(+a)\cdot(-bi)$ dagegen $-(ab)i$, ferner aus $(+ai)\cdot(+bi)$, weil zweimalige Drehung um 90° eine solche um 180° hervorbringt, $-ab$, u. s. w. — Die Divisionsregeln ergeben sich durch einfache Umkehrung dieses Gedankenganges. Soll z. B. $\frac{+a}{+bi}$ berechnet, also der Faktor gesucht werden, womit $+bi$ zu multipliciren ist, um die positiv reelle Zahl $+a$ zu geben, so muss dieser Faktor negativ imaginär sein, denn ein positiv imaginärer würde ein negativ reelles Resultat geben, u. s. w.

Man hüte sich also in Aufgaben, wie $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$ nach den Regeln für reelle Zahlen etwa $\sqrt{(-a)\cdot(-b)}=\sqrt{+ab}=\pm ab$ zu rechnen. Von dem hierbei erhaltenen doppelten Resultat ist nur das eine $-ab$ richtig.

Die vorstehenden Regeln gelten auch, wenn a oder b gebrochene oder irrationale Zahlen sind, da in diesem Fall die früher an den entsprechenden Stellen ausgeführten Entwicklungen sich ebenfalls anwenden lassen.

Auch ergiebt sich die allgemeine Richtigkeit des Satzes, dass bei Produkten von beliebig vielen (reellen oder imaginären) Faktoren die Reihenfolge der einzelnen Multiplicationen für das Resultat gleichgültig ist.

Für die Potenzirung einer imaginären Zahl gehen aus dem Vorstehenden leicht folgende Regeln hervor: Zunächst ist für die imaginäre (positive) Einheit:

$$i^2=-1;\quad i^3=-i;\quad i^4=+1;\quad i^5=+i;\quad i^6=-1,\ \text{u. s. w.},$$

allgemein $i^{4n}=+1,\ i^{4n+1}=+i,\ i^{4n+2}=-1;\ i^{4n+3}=-i.$

Ferner ist $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i;\ i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1;\ i^{-3}=\frac{1}{i^3}=-\frac{1}{i}=+i,$

$$i^{-4}=\frac{1}{i^4}=+1,\ \text{u. s. w.},$$

allgemein $i^{-4n}=+1;\ i^{-(4n+1)}=-i;\ i^{-(4n+2)}=-1;\ i^{-(4n+3)}=+i.$

Ferner ist allgemein $(ai)^n=a^n\cdot i^n$, also $(ai)^2=-a^2;\ (ai)^3=-a^3i;$

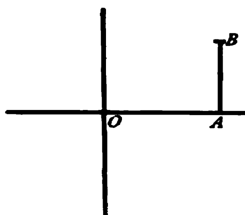
$$(ai)^4=+a^4;\ (ai)^5=+a^5i,\ \text{u. s. w.}$$

Die allgemeinere Behandlung der Potenzirung imaginärer Zahlen, auch für den Fall dass der Exponent eine gebrochene, irrationale oder selbst wieder eine imaginäre Zahl ist, bietet grössere Schwierigkeiten und übersteigt die Grenzen der Elementar-Mathematik. Die vorstehenden Entwicklungen werden übrigens für das Folgende ausreichen.

Auch die Behandlung von vierten, sechsten Wurzeln aus negativen Zahlen u. s. w. muss einer anderweiten eingehenderen Untersuchung überlassen bleiben.

§ 42. Die complexen Zahlen.

Während im Vorigen imaginäre Zahlen sowol unter sich, als mit reellen durch Multiplication oder Division verbunden werden konnten, erschien bei der Addition und Subtraction nur eine Verbindung imaginärer Zahlen unter sich, nicht aber mit reellen möglich, weil beide Arten von Zahlen sich auf nicht vergleichbare Einheiten beziehen. Ein Ausdruck von der Form $a+bi$ z. B. erscheint also hiernach als unmöglich, falls es nicht auch hier gelingt, durch eine neue Erweiterung des Zahlbegriffs demselben eine Bedeutung beizulegen. In diesem Falle muss freilich die Zahl aufhören, nur als die zusammenfassende Angabe einer bestimmten Anzahl völlig gleichartiger Grössen zu gelten, und man muss annehmen, dass es auch möglich sei, Einheiten verschiedener Arten zu einer einzigen Zahl zusammenzusetzen. Inwiefern dies gestattet sein könne, zeigt wieder beispielsweise eine geometrische Veranschaulichung: Man kann zu einer nach bestimmter Richtung erfolgten Bewegung nicht bloss eine weitere Bewegung in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung, sondern auch eine nach irgend einer anderen Richtung hinzufügen und die Grössen der zurückgelegten Wege nicht bloss nach der absoluten Länge, sondern auch zugleich nach den verschiedenen Richtungen zu einer Bewegungsgrösse vereinigt denken. In dieser Weise kann die sogenannte complexe Zahl $a+bi$ dadurch geometrisch dargestellt werden, dass zuerst auf der reellen Zahlenlinie eine Strecke $OA=a$ und dann von A aus



in einer zu OA senkrechten Richtung (also in der imaginären) eine Strecke $AB = b$ abgetragen wird. Man gelangt so, statt zu einem Punkte der reellen oder der imaginären Zahlenlinie, zu einem Punkte B, welcher seitlich von diesen in der Ebene liegt, und umgekehrt lässt sich die Lage eines jeden Punktes der Ebene durch eine Zahl von der Form $a + bi$ (wobei a und b selbstverständlich auch negativ sein können) darstellen. Die Zahlenlinie ist also durch die complexen Zahlen zur Zahlenebene erweitert.

Während also, allgemeiner dargestellt, die reellen Zahlen zur Bezeichnung der Stellen von gleichartigen Grössen dienen, wenn die letzteren sich in eine einzige Reihe ordnen lassen, reichen dieselben nicht hin um auch die Stellen solcher Grössen zu bezeichnen, bei welchen diese Anordnung in eine einfache Reihe nicht möglich ist, welche sich vielmehr nur in verschiedenen Reihen neben einander ordnen lassen. Hier treten die complexen Zahlen an ihre Stelle, welche übrigens die reellen, wie die einfachen imaginären als besondere Fälle ein schliessen, denn $a + bi$ wird reell für $b = o$ und einfach imaginär für $a = o$.

Eine vollständige Behandlung der Eigenschaften complexer Zahlen und der Gesetze des Rechnens mit denselben übersteigt ebenfalls die Grenzen der Elementarmathematik und muss daher einer anderen Stelle vorbehalten bleiben. Wir führen hier nur noch Folgendes an:

Zwei complexe Zahlen, welche sich von einander nur durch das Vorzeichen des imaginären Gliedes unterscheiden, wie $a + bi$ und $a - bi$, heissen einander conjugirt.

Zwei complexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ sind einander gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist, da imaginäre und reelle Einheiten nicht mit einander so vereinigt werden können, dass erstere an Stelle von letzteren oder umgekehrt treten könnten.

Die Summe zweier complexen Zahlen $a + bi$ und $c + di$ setzt man gleich $(a + c) + (b + d) i$, und entsprechend die Differenz derselben gleich $(a - c) + (b - d) i$.

Das Produkt zweier complexen Zahlen $(a + bi) \cdot (c + di)$ kann nach der Regel für das Produkt zweier Binome entwickelt werden, da sich reelle Zahlen mit imaginären multipliciren lassen. Man erhält so für dasselbe

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad) i.$$

Das Produkt zweier conjugirten complexen Zahlen ist hiernach

$$(a + bi) (a - bi) = a^2 + abi - abi + b^2, \text{ d. h.}$$

$$(a + bi) (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Auch der Quotient zweier complexen Zahlen lässt sich, wie die Summe, die Differenz oder das Produkt derselben, wieder als eine complexe Zahl darstellen. Erweitert man einen Quotienten, dessen Divisor complex ist, mit der demselben conjugirten Zahl, so wird der Divisor reell. So erhält man

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Heis § 49, Bardey XVII.

§ 43. Das praktische Ausziehen der Wurzeln.

Die Berechnung des vollständigen oder angenäherten Werthes einer in bestimmten Zahlen ausgedrückten Wurzelgrösse ergiebt sich durch Umkehrung der entsprechenden Potenzirungsaufgabe:

a. Quadratwurzeln: Die Quadrate aller einzifferigen ganzen Zahlen liegen zwischen $1^2 = 1$ und $10^2 = 100$, sind also ein- oder zweizifferig; die Quadrate aller zweizifferigen ganzen Zahlen liegen zwischen $10^2 = 100$ und $100^2 = 10000$, sind also drei- oder vierzifferig, u. s. w. Allgemein liegen die Quadrate der n zifferigen ganzen Zahlen zwischen $(10^{n-1})^2$ und $(10^n)^2$, d. h. zwischen 10^{2n-2} und 10^{2n}, sind also $2n - 1$- oder $2n$ zifferig.

Hieraus folgt, dass umgekehrt die Quadratwurzel aus einer $2n - 1$- oder $2n$ zifferigen Zahl — oder, falls erstere irrational ist, die nächst kleinere ganze Zahl — n zifferig sein muss.

Die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweizifferigen Zahl ist also einzifferig, und kann daher mittelst des Ein-mal-Eins gefunden werden.

Die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierzifferigen Zahl ist zweizifferig, kann also in der Form $10a + b$ geschrieben werden. Dann ist der Radicand gleich

$$(10a + b)^2 = (10a + b) \cdot (10a + b) = 100a^2 + 2 \cdot 10a \cdot b + b^2.$$

Daher erhält man umgekehrt aus diesem Radicanden die gesuchte Wurzel, indem man zuerst jenen in zwei Gruppen theilt, deren zweite aus den beiden letzten Ziffern besteht, und dann die Ziffer a so bestimmt, dass a^2 entweder gleich der die erste Gruppe bildenden Zahl ist, oder kleiner als dieselbe und ihr möglichst nahe kommend. Nachdem man dann $100a^2$ von dem ganzen Radicanden subtrahirt hat, dividire man in den Rest mit $20a$; der Quotient liefert die Ziffer b. Nachdem $20ab$ von dem Reste subtrahirt ist, hat man endlich noch b^2 von dem hierbei gebliebenen Reste zu subtrahiren. Ergiebt sich, dass letzterer zu klein hierfür ist, so hat man vorher b zu gross angenommen und muss die Rechnung mit einem um eine Einheit kleineren Werthe wiederholen. Ist der letzte Rest gleich b^2, so ist die Wurzel rational und vollständig berechnet. Ist endlich der letzte Rest grösser als b^2, so ist die Wurzel irrational und man hat den nächstkleineren ganzen Grenzwerth gefunden.

Beispiele: $\sqrt{7\,29} = \overset{a}{2}(8)\overset{b}{7}$

$100a^2 =$	400		
$20a = 40$	329		329
$20ab =$	320	$20ab =$	280
	9		49
$b^2 =$	64	$b^2 =$	49

Man sieht leicht ein, dass man bei dieser Rechnung die Nullen an $100a^2$ und an $20ab$ weglassen und demnach, wie folgt, nach der Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

rechnen kann:

$\sqrt{7\,29} = \overset{a}{2}\ \overset{b}{7}$

$a^2 = 4$

$2a = 4 \mid 32 \mid b = 7$

$2ab = 28$

49

$b^2 = 49$

$\sqrt{79 \mid 36} = \overset{a}{8}\ \overset{b}{9}$

$a^2 = 64$

$2a = 16 \mid 153 \mid b = 9$

$2ab = 144$

96

$b^2 = 81$

Rest: 15

Bei einiger Uebung in diesem Verfahren wird man endlich die Berechnung von $2ab$ und die von b^2 mit einander verbinden, also $2ab\,(10) + b^2$, indem man mit b^2 beginnt, als eine einzige Zahl bestimmen und dann subtrahiren. Die vorstehenden Beispiele gestalten sich dann wie folgt:

```
               a b
√7|29      =   2 7               √79|36 = 89
  a² = 4                            64
 2a = 4|32|9 | b = 7             16|153|6
2ab + b² = 32 9                      1521
                                       15
```

In dem zweiten Beispiele ist also, wie folgt, gerechnet: $2a = 16$; $b = 9$; $b^2 = 81$, also wird 1 hingeschrieben und 8 im Sinn behalten; $16 \cdot 9 = 144$, $144 + 8 = 152$.

Die Quadratwurzel aus einer 5- oder 6zifferigen Zahl ist dreizifferig und hat also die Form $100a + 10b + c$ oder $10 \cdot (10a + b) + c$. Setzt man also $10a + b = a_1$, so erhält man die vorige Form $10a_1 + c$, und der Radicand muss gleich $100\,a_1^2 + 2 \cdot 10a_1 \cdot c + c^2$ sein. Hieraus folgt die Regel: Man theile den Radicanden von rechts nach links in Gruppen zu je zwei Ziffern — die erste Gruppe links kann ein- oder zweizifferig sein —, bestimme zu den beiden ersten Gruppen, wie vorher gezeigt, die zweizifferige Zahl $10a + b$, setze dieselbe gleich a_1; und entwickele nun mittelst dieses a_1 und der dritten Gruppe in gleicher Weise wie vorher $2 \cdot 10a_1 \cdot c + c^2$. Die genauere Ausführung zeigen folgende Beispiele:

```
                    a
                  a b c
√32|94|76     =   5 7 4            √4|20|27 = 205
  a² = 25                            4
 2a = 10  79|4                      (4)0 20 27
2ab + b² = 74 9                          20 25
   2a = 114 |457|6                           2
2ac + c² = 457 6
```

Für Quadratwurzeln aus mehr als 6-zifferigen Zahlen ergiebt sich leicht die Ausdehnung des vorstehenden Verfahrens. Ist z. B. die Wurzel vierzifferig, so denke man sich dieselbe wieder in der Form $z = 1000a + 100b + 10c + d$ und setze $10a + b = a_1$, $10a_1 + c = a_2$, also $z = 10a_2 + d$. Im folgenden Beispiel ist noch die Abänderung getroffen, dass die Werthe von $2a$, $2a_1$ u. s. w. über die entsprechenden Zahlen a, a_1 u. s. w. des Resultats geschrieben sind, wodurch eine kleine Bequemlichkeit für ihre successive Berechnung erreicht wird.

```
                      4628
√5|35|69|10|25  =    23145
 4
 1 35
 1 29
     6 69
     4 61
     2 08 10
     1 84 96
       23 14 25
       23 14 25
```

In den sämmtlichen vorstehenden Beispielen ist die gebräuchliche Schreibweise bei der Division, bezw. Subtraction angewendet worden, um das Verfahren mit hinreichender Klarheit deutlich zu machen. Bei Anwendung der im Früheren empfohlenen Methoden der Division und Subtraction vermindert sich die Anzahl der hinzuschreibenden Ziffern, wie die folgende Wiederholung des vorstehenden Beispiels zeigt.

```
                 4628
√5 35 69 10 25 = 23145
 1 35
   6 69
   2 08 10
     23 14 25
         00 00
```

Hier ist, wie folgt, gerechnet worden: $a = 2$, also $a^2 = 4$; $4 + 1 = 5$. Die Heranziehung der nächsten Gruppe ergiebt also 135. Nun ist $2a = 4$; $13 : 4$ liefert $b = 3$, also $b^2 = 9$; $9 + 6 = 15$; $3 \cdot 4 + 1 = 13$, $13 + 0 = 13$. Es bleibt also nur der Rest 6, und die Heranziehung der nächsten Gruppe liefert 669. Nun ist $a = 23$, $2a = 46$; $66 : 46$ liefert $b = 1$; $b^2 = 1$; $1 + 8 = 9$; $1 \cdot 6 = 6$; $6 + 0 = 6$; $1 \cdot 4 = 4$, $4 + 2 = 6$. Es bleibt also der Rest 208, und die Heranziehung der nächsten Gruppe liefert 20810; dazu ist $a = 231$, $2a = 462$, $b = 4$, u. s. w.

Ist der Radicand eine gebrochene Zahl, so kann man nach (47) die Wurzel aus dem Zähler und aus dem Nenner einzeln ausziehen und dann die erstere durch die letztere dividiren. Bei einem Decimalbruch ist die Quadratwurzel aus dem Nenner dann ein vollständiges Quadrat einer Potenz von 10, wenn die Anzahl der Decimalstellen gerade ist. Dies lässt sich nun immer bewirken, da man nöthigenfalls dem Decimalbruch eine Null anhängen kann. Dann ist also die Wurzel wieder ein Decimalbruch, und dieser hat halb soviele Decimalstellen, als der Radicand, oder ebenso viele, als Gruppen von Zifferpaaren in letzterem auf das Komma folgen. So ist z. B. $\sqrt{14,4} = \sqrt{14,40} = \sqrt{\frac{1440}{100}} = \frac{\sqrt{1440}}{10}$, u. s. w. — Hieraus ergiebt sich folgende praktische Regel für die Berechnung von Quadratwurzeln aus Decimalbrüchen:

Man theile den Radicanden in Gruppen von je zwei Ziffern, und zwar vom Komma aus nach rechts und nach links, und ergänze die letzte Gruppe, falls dieselbe einzifferig ist, durch eine Null. Man radicire dann, wie bei ganzen Zahlen, also ohne Rücksicht auf das Komma, setze aber in dem Resultat das Komma, sobald man bei dem Fortschreiten von Gruppe zu Gruppe dasselbe im Radicanden überschreiten muss.

Ist der Radicand keine vollständige Quadratzahl, bleibt also schliesslich ein Rest, so kann man durch Anhängen beliebig vieler Nullen an den Radicanden die Fortsetzung der Rechnung ermöglichen, und so für den irrationalen Wurzelwerth so viele Decimalstellen bestimmen, bis die für den vorliegenden Fall erforderliche Genauigkeit erreicht ist. Dieses letztere Verfahren findet auch Anwendung auf die Berechnung von irrationalen Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen, da man auch letzteren ein Komma und beliebig viele Nullen als Decimalstellen anfügen kann. So hat man z. B.

```
      (2)34640
√3 = 1,73205
 200
  1100
    7100
     1760000
       2797500
```

Um im Resultat n Decimalstellen zu erhalten, erscheint hiernach die Kenntniss, bezw. Anwendung von $2n$ Decimalstellen im Radicanden nothwendig. Dies ist jedoch nur scheinbar richtig, denn da das Quadrat der zuletzt gefundenen Wurzel-Ziffer auf eine Anzahl der folgenden Ziffern ohne Einfluss ist, und soweit unberücksichtigt bleiben darf, so kann man nach Berechnung irgend einer Anzahl

von Stellen der Wurzel das Heranziehen neuer Stellen des Radicanden unterlassen, und jedesmal bloss das Glied $2ab$ berechnen und subtrahiren, indem man bei jeder folgenden Division mit $2a$ eine Ziffer von rechts aus vom Divisor abstreicht. Man kann auf diese Weise, wenn n Ziffern der Wurzel vorher bestimmt waren, noch $n - 1$ bis n weitere Ziffern derselben berechnen. Das nachfolgende Beispiel wird dieses Verfahren der sogenannten **abgekürzten** Ausziehung von Quadratwurzeln erläutern. Es wird daselbst zunächst wie vorher $\sqrt{15}$ auf 3 Decimalen berechnet, und von da an abgekürzt verfahren.

$$\sqrt{15} = 3{,}872983$$

```
          9
   6 |  600
        544
  76 | 5600
       5369
 774 | 23100
       15484
7744 | 76160
       69704
 774 | 7456
       6195
  77 | 261
       232
        29
```

Ist der Radicand selbst ein abgekürzter Decimalbruch, so ergiebt sich aus dem Vorstehenden, wie weit die Wurzel aus demselben genau gefunden werden kann. Für eine genauere Bestimmung dürfen selbstverständlich nicht Nullen an den Radicanden angehängt, sondern es müssen die nächstfolgenden Stellen des letzteren ermittelt werden.

Die Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruch wird nach der Regel (47) im § 38 nur dann bequem gefunden, wenn die Wurzel aus dem Nenner rational, bezw. eine ganze Zahl mit möglichst wenigen Ziffern ist. Es empfiehlt sich andernfalls, den Nenner nach § 38 rational zu machen, also z. B. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ nicht mittelst $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ zu berechnen, sondern vorher in $\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ umzuformen. Noch bequemer ist in der Regel die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Decimalbruch und Radicirung des letzteren, also im vorliegenden Beispiel die Berechnung von $\sqrt{0{,}666\ldots}$

Um endlich die Quadratwurzel aus einem Buchstaben-Polynom zu berechnen, ordne man letzteres zunächst nach den Potenzen einer Hauptgrösse und bestimme dann in analoger Weise, wie bei bestimmten Zahlen, nach einander die Grössen a, b, c, u. s. w. entsprechend der Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Als Beispiel hierzu diene das Folgende:

$$\sqrt{81x^{10m-14} + 126x^{8m-10} + 103x^{6m-6} + 42x^{4m-2} + 9x^{2m+2}} = 9x^{5m-7} + 7x^{3m-3} + 3x^{m+1}$$

$$a^2 = 81x^{10m-14}$$
$$2a = 18x^{5m-7}$$
$$2ab = +126x^{8m-10}$$
$$b^2 = +49x^{6m-6}$$
$$2a = 18x^{5m-7} + 14x^{3m-3} \quad | \quad +54x^{6m-6} + 42x^{4m-2} + 9x^{2m+2}$$
$$2ab = +54x^{6m-6} + 42x^{4m-2}$$
$$b^2 = +9x^{2m+2}$$

Heis § 50, 51, Bardey XIV.

b. Kubikwurzeln. Die dritte Potenz einer einzifferigen Zahl liegt zwischen $1^3 = 1$ und $10^3 = 1000$, ist also ein-, zwei- oder dreizifferig; die dritte Potenz einer zweizifferigen Zahl liegt zwischen 1000 und 1000000, ist also vier- bis sechszifferig; allgemein ist die dritte Potenz einer $n$zifferigen Zahl $3n-2$-, $3n-1$- oder $3n$ zifferig.

Ferner ist $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Die Umkehrung beider Sätze nach Analogie des Verfahrens bei den Quadratwurzeln führt auf folgende Regel für das Ausziehen von Kubikwurzeln.

Man theile die Ziffern des Radicanden von den Einern aus (also bei einer ganzen Zahl von rechts nach links, bei einem Decimalbruch vom Komma aus nach beiden Seiten) in Gruppen zu je drei Ziffern — wobei die erste Gruppe links auch zwei- oder einzifferig werden kann. Man bestimme zu dieser ersten Gruppe den Werth von a so, dass a^3 gleich dieser Gruppe oder der nächst kleineren ganzen Kubikzahl ist, schliesse an den Rest die erste Ziffer der nächsten Gruppe an, bilde $3a^2$ und dividire die vorher erhaltene Zahl durch $3a^2$; die für den Quotienten erhaltene ganze Zahl nehme man zur zweiten Ziffer b des Resultats, bilde $3a^2b$, subtrahire letzteres von der vorher erhaltenen Restzahl, ziehe zu dem jetzt bleibenden Rest die zweite Ziffer der betr. Gruppe herunter, subtrahire von der entstehenden Zahl $3ab^2$, ziehe die dritte Ziffer der betr. Gruppe herunter und subtrahire b^3. Ergiebt eine der gedachten Subtractionen einen Subtrahend, welcher grösser als der Minuend ist, so war für b ein zu grosser Werth angenommen, und die Rechnung ist mit dem nächst kleineren Werthe von b zu wiederholen. — Man betrachte sodann die aus den Ziffern a und b bestehende Resultatzahl als ein neues a, die bisherige Berechnung als die des Gliedes a^3 der Formel, bestimme mit Hülfe der nächsten Gruppe und des Gliedes $3a^2b$ durch Division ein neues b und fahre, wie vorher, fort. Sind alle Gruppen des Radicanden in dieser Weise benutzt und bleibt noch ein Rest, so kann man mittelst Anhängen von Nullen bis zur Erreichung jeder verlangten Genauigkeit weiter rechnen. Ist der Radicand selbst abgekürzt, so dürfen keine Nullen angehängt werden; man kann auch hier statt dessen abgekürzt rechnen. Die Ausführung des Verfahrens zeigen folgende Beispiele:

$$\sqrt[3]{12{,}812904} = \overset{a_1}{\overset{a}{2}\ \overset{b}{3}}\ \overset{b_1}{4}$$

$a^3 =$	8	
$3a^2 = 12$	48	$b = 3$*)
$3a^2b =$	36	
	121	
$3ab^2 =$	54	
	672	
$b^3 =$	27	
$3a_1^2 = 1587$	6459	$b_1 = 4$
$3a_1^2\,b_1 =$	6348	
	1110	
$3a_1\,b_1^2 =$	1104	
	64	
$b^3 =$	64	

*) $b = 4$ ergiebt sich nachher als zu gross.

$$\sqrt[3]{9|300|947|727} = 2103$$

	8
12	13
	12
	10
	6
	40
	1
1323	399
132 300	399 477
	396 900
	257 72
	56 70
	201 027
	27
	201 000

Kürzer als die vorstehende ausführliche Rechnungsweise ist es, jedesmal nach Bestimmung von b die drei Glieder $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 nicht einzeln nach einander zu subtrahiren, sondern die Summe $3a^2b\,(\cdot\,100) + 3ab^2\,(\cdot\,10) + b^3$ zu berechnen und also nur einmal zu subtrahiren, wobei man sich zur Berechnung dieser Summe noch verschiedener Abkürzungen, wie z. B. der Absonderung des gemeinsamen Faktors b, bedienen kann. Wir unterlassen die Ausführung von Beispielen hierzu, da man in der Praxis das immerhin umständliche Verfahren meist durch die später zu entwickelnde Methode der Berechnung mit Logarithmen ersetzen wird. — Die Ausziehung der Kubikwurzel aus Decimalbrüchen u. s. w. geschieht in analoger Weise wie bei den Quadratwurzeln.

Für Wurzeln, deren Exponent grösser als 3 ist, kann man nach Anleitung des bei den Quadrat- und Kubikwurzeln eingeschlagenen Verfahrens, also mit Hülfe der durch Ausführung der Multiplication für die betreffende Potenz von $10a + b$ zu entwickelnden Formeln, entsprechende Methoden ableiten. Doch ist die Anwendung derselben nicht zu empfehlen, wenn der Exponent keine Primzahl ist, denn in diesem Falle kann man die Wurzel auf solche niederer Grade zurückführen, was unter allen Umständen bequemer ist. So ist z. B. $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, und entsprechend lassen sich 8te Wurzeln durch dreimaliges Ausziehen einer Quadratwurzel, 6te durch Ausziehung einer Kubikwurzel aus einer Quadratwurzel berechnen, u. s. w. Man vergl. übrigens auch hierfür Kapitel 5.

HEIS § 52—55, BARDAY XV.

Kapitel 5.

Vom Logarithmiren.

§ 44. Begriff des Logarithmus.

Die zweite Umkehrung des Potenzirens verlangt die Lösung der Aufgabe, zu dem gegebenen Werthe einer Potenz und ihrer Basis den Exponenten zu berechnen, oder mit anderen Worten, den Werth von x in der Gleichung

$$a^x = c$$

zu bestimmen. Man nennt diese Rechnungsart Logarithmiren, den gegebenen Werth c der Potenz den Logarithmand, auch den Numerus oder die Zahl schlechthin, die gegebene Potenzbasis a die Basis des Logarithmus und den gesuchten Exponenten x den Logarithmus. Für den letzteren schreibt man

$$x = {}^a\!log\, c$$

und liest diesen Ausdruck »Logarithmus von c zur Basis a.«

Dieser Logarithmus ist also diejenige Zahl, mit welcher die Basis potenzirt werden muss, um den Numerus zu erhalten. Diese Erklärung kann durch folgende Formel dargestellt werden:

$$a^{{}^a\!log\, c} = c \qquad (55)$$

So ist beispielsweise ${}^2\!log\, 8 = 3$, denn $2^3 = 8$; ${}^3\!log\, 81 = 4$, denn $3^4 = 81$, dagegen ${}^9\!log\, 81 = 2$ und ${}^{81}\!log\, 81 = 1$. Ferner ist ${}^{16}\!log\, 4 = \frac{1}{2}$, denn $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$; ${}^{\frac{2}{3}}\!log\, \frac{4}{9} = 2$, denn $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$; ${}^2\!log\, \frac{1}{8} = -3$; ${}^{25}\!log\, \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$, ${}^{\frac{2}{3}}\!log\, \frac{27}{8} = -3$, u. s. w.

Aus der Erklärung des Logarithmus folgt ohne Weiteres

$$^{a}log\,(a^{b}) = b. \qquad (56)$$

Insbesondere ist

$$^{a}log\,a = 1,$$

d. h. der Logarithmus der Basis ist stets gleich 1. Dagegen ist

$$^{a}log\,1 = 0,$$

d. h. der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0, denn $a^0 = 1$. Eine Ausnahme von beiden Regeln macht

$$^{1}log\,1 = \frac{0}{0},$$

d. h. der Logarithmus von 1 zur Basis 1 kann jede beliebige Zahl sein, da jede Potenz von 1 gleich 1 ist.

Der Logarithmus einer Zahl a, welche nicht gleich 1 ist, zur Basis 1 ist nicht angebbar. Die Zahl 1 eignet sich daher nicht zur Basis von Logarithmen. Ueberhaupt entsteht auch hier die Frage, ob die Logarithmirung auch dann in allen Fällen möglich ist, wenn dieselbe nicht aus der Umkehrung einer wirklich ausgeführten Potenzirung hervorgegangen, sondern wenn für die Basis und den Numerus willkürliche Zahlenwerthe gesetzt sind. Eine allgemeine Beantwortung dieser Frage ist hier schon deshalb nicht möglich und muss weitergehenden Studien überlassen bleiben, weil bereits bei der Potenzirung die Fälle, in welchen die Basis oder der Exponent imaginär oder complex waren, keine elementare Behandlung finden konnten. Für den innerhalb der Elemente fallenden Gebrauch der Logarithmen ist aber auch eine derartige allgemeine Theorie der letzteren durchaus entbehrlich; es genügt hier zunächst die Annahme, dass die Basis, wie der Numerus reelle Zahlen seien, und diese Voraussetzung soll daher im Folgenden festgehalten werden.

Ist die Basis negativ, so sind die Logarithmen aller positiven Zahlen, welche ungerade Potenzen der Basis sind, und ebenso diejenigen aller negativen Zahlen, welche gerade Potenzen der Basis sind, nicht reell. So sind z. B. $^{-2}log\,(-4)$ und $^{-2}log\,8$ nicht durch reelle Zahlen angebbar. Um den hieraus erwachsenden Schwierigkeiten zu entgehen, sollen im Folgenden nur positive reelle Zahlen, ausgenommen 0 und 1, als Basen von Logarithmen angewendet und vorausgesetzt werden.

In diesem Fall sind die Logarithmen aller negativen Zahlen nicht reell, von jeder positiven Zahl dagegen giebt es einen reellen Logarithmus.

Um dieses nachzuweisen, beachte man zuerst, dass keine reelle Potenz einer positiven Zahl negativ sein kann, sodann, dass man aus a^x durch die Annahme $x = 0$, $x = 1$, u. s. w., bezw. $x = -1$, $x = -2$ u. s. w. eine Reihe von Zahlen

$$\ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, \ldots$$

erhält, welche nach der einen Seite bis in's Unendliche wächst, nach der anderen bis in's Unendliche abnimmt. Ist nun $^{a}log\,c = x$ zu bestimmen, soll also $a^x = c$ sein, so müssen sich für reelle positive Werthe von a und c stets zwei Zahlen jener Reihe angeben lassen, zwischen welchen c liegt — vorausgesetzt, dass c nicht eine der Zahlen jener Reihe selbst, x also ohne Weiteres als ganze Zahl bestimmt sei.

Es seien α und $\alpha + 1$ jene beiden Zahlen, so kann man

$$a^x = a^{\alpha + \frac{y}{10}} = a^\alpha \cdot a^{\frac{y}{10}}, \text{ mithin } a^{\frac{y}{10}} = \frac{c}{a^\alpha}, \; a^y = \left(\frac{c}{a^\alpha}\right)^{10}$$

setzen, und wiederum für y zwei ganze Werthe $\beta, \beta + 1$ bestimmen, sodass

$\left(\frac{c}{a^\alpha}\right)^{10}$ zwischen a^β und $a^{\beta+1}$ liegt, dann $y = \beta + z$ setzen, und in dieser Weise fortfahren.

Es sei beispielsweise $x = {}^2log\, 7$ gesucht, so hat man $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$, u. s. w., also kann man $7 = 2^x = 2^{2+\frac{y}{10}} = 4 \cdot 2^{\frac{y}{10}}$

$$2^{\frac{y}{10}} = \frac{7}{4}, 2^y = \left(\frac{7}{4}\right)^{10}$$

setzen. Da nun $\left(\frac{7}{4}\right)^{10} = 269,38\ldots$ und $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, so kann man $y = 8 + \frac{z}{10}$ setzen und erhält

$$2^{8+\frac{z}{10}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{10};\ 2^{\frac{z}{10}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{10} : 256;\ 2^z = \left[\left(\frac{7}{4}\right)^{10} : 256\right]^{10},$$

woraus wieder $z = 0 + \frac{u}{10}$ folgt, u. s. w. Es ist also

$${}^2log\, 7 = 2,80\ldots.$$

Auf diese Weise muss man für jeden derartigen Logarithmus einen Werth erhalten, welcher entweder eine ganze oder gebrochene Zahl ist, oder durch einen unendlich vielstelligen Decimalbruch dargestellt gedacht werden kann, also als irrational betrachtet werden muss. [Heis § 56.]

§ 45. Rechnen mit Logarithmen.

Für das Rechnen mit Logarithmen sind folgende Sätze von besonderer Wichtigkeit:

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividendus und des Divisors,

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus ihrer Basis,

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radicanden (als Dividend) und aus dem Wurzelexponent (als Divisor),

wobei jedesmal die Logarithmen für dieselbe Basis angenommen werden, oder in Formeln:

$$\begin{aligned} {}^xlog\,(ab) &= {}^xlog\, a + {}^xlog\, b \\ {}^xlog\, \frac{a}{b} &= {}^xlog\, a - {}^xlog\, b \\ {}^xlog\,(a^b) &= b \cdot {}^xlog\, a \\ {}^xlog\, \sqrt[b]{a} &= \frac{{}^xlog\, a}{b}. \end{aligned} \qquad (57)$$

Diese Formeln können als Umkehrungen entsprechender Potenzregeln betrachtet und bewiesen werden. So besagt z. B. die erste derselben nichts anderes, als dass der Exponent, mit welchem die Basis x potenzirt werden müsse, um $a \cdot b$ zu erhalten, gleich der Summe der Exponenten sei, mit welchen x potenzirt werden müsse, um a und b einzeln zu erhalten. In der That ist

$$x^{{}^xlog\, a + {}^xlog\, b} = x^{{}^xlog\, a} \cdot x^{{}^xlog\, b} = a \cdot b.$$

In entsprechender Weise gehen die drei folgenden Formeln bezüglich aus den Gleichungen (39), (40) im § 32 und (48) im § 38 hervor.

Ist man im Stande die Logarithmen aller (reellen) Zahlen für irgend eine

(reelle, positive) Basis b anzugeben, und soll der Logarithmus einer Zahl für eine andere Basis c gefunden werden, ist also $x = {}^c\log a$ gesucht, so folgt aus den bekannten Logarithmen

$$ {}^b\log c = \gamma \text{ und } {}^b\log a = \alpha, $$

$$ b^\gamma = c,\ b^\alpha = a, \text{ also } c^{\frac{1}{\gamma}} = b,\ c^{\frac{\alpha}{\gamma}} = b^\alpha = a, $$

mithin $\frac{\alpha}{\gamma} = {}^c\log a$ oder

$$ {}^c\log a = \frac{{}^b\log a}{{}^b\log c} \quad (58) $$

Man findet also aus den Logarithmen der Zahlen für eine Basis b die Logarithmen der Zahlen für eine andere Basis c, indem man erstere durch den Logarithmus der neuen Basis für die alte dividirt.

Hiermit ist die Aufgabe der Berechnung der Zahlenwerthe von Logarithmen zurückgeführt auf die Aufgabe, diese Zahlenwerthe für irgend eine bestimmte Basis zu berechnen.

Die Gesammtheit der Logarithmen aller (absoluten) Zahlen für eine und dieselbe bestimmte Basis nennt man ein Logarithmensystem.

Hat man eine Tabelle (Logarithmentafel) berechnet, welche gestattet, von jeder vorkommenden (absoluten) Zahl den Logarithmus für irgend ein System aufzuschlagen, so kann man mit Hülfe dieser Tafel nach dem vorstehenden Lehrsatz leicht die Logarithmen für jedes beliebige andere System berechnen.

Dass, und auf welche Weise die Berechnung einer solchen Tabelle möglich ist, geht schon aus der Entwicklung im § 44 dieses Abschnittes hervor. Das daselbst angegebene Verfahren ist freilich so überaus mühsam und zeitraubend, dass die praktische Ausführung jener Berechnung nach demselben schwerlich von Jemand auch nur versucht werden dürfte. Man hat deshalb bessere elementare Methoden für jene Berechnung entwickelt, und nach denselben auch Tafeln der gedachten Art berechnet, allein die Arbeit bleibt auch dann noch eine ausserordentlich mühsame. Da die höhere Mathematik im Gegensatz hierzu Methoden der Berechnung der Logarithmen darbietet, welche verhältnissmässig sehr bequem sind, und deshalb in der Gegenwart kein Berechner von Logarithmen jene mühseligen alten Methoden anwenden wird, und da auch die von den verschiedensten Seiten berechneten und allgemein zugänglichen logarithmischen Tafeln für die gewöhnlichen praktischen Zwecke die Berechnung von Logarithmen gänzlich überflüssig machen, so darf hier von einer näheren Ausführung und Begründung jener elementaren Methoden Abstand genommen werden.

Für jene Tabellenwerke entsteht die Frage, welche Basis für dieselben zu wählen sei. In der sogenannten algebraischen Analysis gebraucht man ein Logarithmensystem, dessen Basis die irrationale Zahl

$$ e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = 2{,}71828\ \ldots $$

ist, weil sich die Logarithmen desselben — wie dort sich zeigt — am einfachsten berechnen lassen. Aus diesen Logarithmen, welche natürliche (auch hyperbolische oder NEPER'sche) genannt werden, berechnet man dann nach dem oben angegebenen Verfahren die Logarithmen der anderen (künstlichen) Systeme. Für den elementaren Gebrauch, welcher im Folgenden erörtert werden soll, bedient man sich aus sogleich anzugebenden Gründen der sogenannten gemeinen Logarithmen, deren Basis die Zahl 10 ist, und welche nach ihrem Erfinder auch BRIGGische Logarithmen genannt werden. Der Kürze halber werden letztere

ohne Angabe der Basis geschrieben, sodass also unter *log a* schlechthin stets der gemeine Logarithmus der Zahl *a* zu verstehen ist.

HEIS § 57.

§ 46. Gebrauch der Logarithmentafeln.

Der Besitz einer Tafel der Logarithmen, welche es ermöglicht *a)* zu jeder vorkommenden Zahl den Logarithmus zu der betreffenden Basis und *b)* zu jedem solchen Logarithmus die Zahl aufzuschlagen, gestattet eine wesentliche Erleichterung des praktischen Rechnens, namentlich bei mehrstelligen (abgekürzten) Decimalzahlen.

Soll nämlich ein Produkt $a \cdot b$ zweier (oder mehrerer) solcher Zahlen berechnet werden, so kann man nach Anleitung der ersten Formel (57) in § 45 zuerst die Logarithmen der Faktoren aufschlagen, dann diese addiren und zuletzt zu der Summe als dem Logarithmus des Resultats wieder die Zahl suchen. Hierdurch ist die Multiplication, abgesehen von der Arbeit des Aufschlagens in den Tafeln, auf die wesentlich einfachere Aufgabe einer Addition zurückgeführt.

In gleicher Weise kann man mittelst der übrigen Formeln (57) im § 45 jede Division auf eine Subtraction der betreffenden Logarithmen, jede Potenzirung auf eine Multiplication, jede Wurzelausziehung auf eine Division zurückführen.

Für diese praktisch überaus wichtige Anwendung der Logarithmen wird man nun ein solches Logarithmensystem wählen, dessen Basis nicht sowol eine möglichst bequeme Berechnung der Logarithmen selbst, als ein möglichst bequemes Aufschlagen derselben, bezw. ihrer Numeri in der Tafel gestattet. Die hierfür bequemste Basis ist die Zahl 10, wie aus Folgendem hervorgeht:

$$\text{Da } \log 1 = 0, \ \log 10 = 1, \ \log 100 = 2, \text{ u. s. w.,}$$

so sind die Zahlenwerthe der Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, d. h. aller einzifferigen ganzen Zahlen, zwischen 0 und 1, diejenigen der Zahlen zwischen 10 und 100, d. h. der zweizifferigen Zahlen, zwischen 1 u. 2 enthalten, u. s. w. Allgemein folgt aus $\log 10^{n-1} = n - 1$ und $\log 10^n = n$, dass die Logarithmen der n-zifferigen ganzen Zahlen zwischen $n-1$ und n enthalten sind.

Da diese Logarithmen sich im Allgemeinen in Form von Decimalbrüchen werden darstellen lassen, die je nach der bei den vorkommenden Rechnungen erforderlichen Genauigkeit auf eine mehr oder minder grosse Anzahl von Decimalstellen abgekürzt sind, so kann man an einem solchen Logarithmus die vor dem Komma stehende ganze Zahl von dem auf letzteres folgenden echten Decimalbruche unterscheiden. Jene wird die Kennziffer oder die Charakteristik, dieser die Mantisse des Logarithmus genannt. Für die gemeinen Logarithmen besteht sonach die Regel, dass die Kennziffer eines solchen aus der Anzahl der Ziffern des Numerus, wenn dieser eine ganze Zahl ist, bestimmt werden kann, indem dieselbe um 1 kleiner als diese Anzahl ist.

Die zweite Eigenthümlichkeit der gemeinen Logarithmen besteht darin, dass jede Zahl, welche sich aus einer anderen durch blosses Anhängen von Nullen ableiten lässt, mit jener dieselbe Mantisse haben muss, so dass die Logarithmen beider sich nur durch die — nach der vorstehenden Regel ohnehin bekannte — Charakteristik unterscheiden. Denn ist z. B. $\log 2 = 0{,}30103$ bekannt, so hat man

$$log\,20 = log\,(2 \cdot 10) = log\,2 + log\,10 = log\,2 + 1 = 1{,}30103,$$
$$log\,200 = log\,(2 \cdot 100) = log\,2 + log\,100 = log\,2 + 2 = 2{,}30103.$$
$$log\,2000 = log\,(2 \cdot 1000) = log\,2 + log\,1000 = log\,2 + 3 = 3{,}30103,$$
u. s. w.

Allgemein ist $log\,(a \cdot 10^n) = log\,a + log\,10^n = log\,a + n$; der zweite Summand n ist hier eine ganze Zahl, wirkt also nur auf die Charakteristik, sodass die Mantisse unverändert bleibt.

Aus den beiden vorstehend erörterten Eigenthümlichkeiten der BRIGGischen Logarithmen folgt: Eine Tafel, welche die Logarithmen aller ganzen Zahlen bis zu einer bestimmten durch die höchste in den Rechnungen vorausgesetzte Zifferzahl bedingten Grenze angeben soll, braucht nicht die Charakteristiken, sondern nur die Mantissen dieser Logarithmen zu enthalten. Da aber die Mantissen aller Zahlen, welche nicht die höchste vorkommende Anzahl von Ziffern besitzen, sich bei denjenigen höchstzifferigen Zahlen wieder finden, welche aus jenen durch Anhängen von Nullen entstehen, so ist es überhaupt nur nöthig, in der Tafel die Mantissen der höchstzifferigen Zahlen anzugeben.

Soll z. B. die Tafel die Logarithmen der Zahlen bis zu den vierzifferigen einschliesslich enthalten, so kann man die Mantisse zu $log\,2$ bei derjenigen von $log\,2000$ aufsuchen, und die Charakteristik 0 dazu ergiebt sich aus dem betreffenden Lehrsatze. Ebenso findet man die Mantisse zu $log\,52$ bei der Zahl 5200, die zu 352 bei 3520. Hierdurch wird der äussere Umfang der Tafel nicht unbedeutend verkleinert und das Aufsuchen eines bestimmten Logarithmus erleichtert.

Der Logarithmus eines Bruches wird aus der Tafel der Logarithmen der ganzen Zahlen gefunden, indem man nach (57) den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahirt. Für einen Decimalbrucb, also wenn der Nenner eine Potenz von 10 ist, ist der Logarithmus des Nenners eine ganze Zahl und wirkt daher nur auf die Charakteristik. Man findet also die Mantisse zu einem Decimalbruch, indem man das Komma unberücksichtigt lässt und somit wie bei einer ganzen Zahl verfährt. Hat der Decimalbruch p Stellen vor dem Komma und n Decimalstellen, also der Zähler desselben $p + n$ Ziffern, so ist die Charakteristik des Zählers gleich $p + n - 1$. Ferner ist der Nenner gleich 10^n, also der Logarithmus des Nenners gleich n, mithin die Charakteristik für den Decimalbruch gleich $(p + n - 1) - n = p - 1$. Die Charakteristik bestimmt sich also nach der bekannten Regel aus der Anzahl der Ziffern der Ganzen des Decimalbruchs. Hierbei ist aber vorausgesetzt, dass dem Komma geltende Ziffern vorausgehen. Ist dies nicht der Fall, ist also der Decimalbruch ein echter, so ist der Logarithmus n des Nenners grösser als der Logarithmus des Zählers, und der Logarithmus des Bruches mithin negativ. So ist z. B.

$$log\,0{,}2 = log\tfrac{2}{10} = log\,2 - log\,10 = 0{,}30103 - 1 = -\,0{,}69897,$$
$$log\,0{,}02 = log\tfrac{2}{100} = 0{,}30103 - 2 = -\,1{,}69897, \text{ u. s. w.}$$

Man ist übereingekommen, in solchen Fällen die Mantisse positiv zu lassen und derselben eine negative Charakteristik anzuhängen, sodass also die Mantisse immer diejenige der entsprechenden ganzen Zahl, d. h. des Zählers ist. Man schreibt also

$$log\,0{,}2 = 0{,}30103 - 1 \;;\; log\,0{,}02 = 0{,}30103 - 2,$$

u. s. w. und findet leicht die allgemein gültige Regel, dass für echte Decimalbrüche die Charakteristik negativ, und zwar gleich der Anzahl der den geltenden Ziffern des Zählers vorausgehenden Nullen ist (einschliesslich der Null vor dem Komma).

Entsprechend sind auch die Logarithmen gemeiner echter Brüche negativ und werden mit positiver Mantisse und angehängter negativer Charakteristik geschrieben. Um z. B. *log* $\frac{2}{3}$ zu bestimmen, hat man

$$log\,2 = 0{,}30103$$
$$log\,3 = 0{,}47712,$$

also *log* $\frac{2}{3} = log\,2 - log\,3 = 0{,}30103 - 0{,}47712$. Statt aber hierfür $-0{,}17609$ zu setzen, erhöht man behufs der Subtraction die Charakteristik des *log* 2 um 1 und fügt nach Ausführung der Subtraction diese 1 als negative Charakteristik zu, setzt also

$$log\,\tfrac{2}{3} = 0{,}82391 - 1$$

Ueberhaupt gilt die Regel: Soll ein grösserer Logarithmus von einem kleineren subtrahirt werden, so addirt man zu letzterem so viele ganze Einheiten, als nöthig sind, um eine positive Differenz zu erhalten und zieht dann die zuviel gerechneten Einheiten von letzterer wieder in Form einer negativen Charakteristik ab.

Die Einrichtung und der Gebrauch der von verschiedenen Verfassern herausgegebenen logarithmischen Tafeln sind im Uebrigen verschieden, und es muss daher in Betreff derselben auf die den einzelnen Tafeln beigegebenen Erklärungen und Anleitungen verwiesen werden. Für die meisten wissenschaftlichen Rechnungen genügen Tafeln, welche die Logarithmen als auf fünf Decimalstellen abgekürzte Decimalbrüche geben. Solche fünfstellige Tafeln sind von Schlömilch, August, Bremiker und Anderen herausgegeben. Von siebenstelligen Tafeln sind namentlich die von Bremiker (Vega) und die von Schrön zu nennen.

§ 47. Beispiele.

Unter der Voraussetzung, dass der Leser durch den Inhalt des vorigen Paragraphen und das Studium der in einer speciellen Logarithmentafel gegebenen Anleitung in den Stand gesetzt sei, zu jeder vorkommenden Zahl den Logarithmus, sowie umgekehrt zu jedem vorkommenden Logarithmus die Zahl aufzuschlagen, soll nun die Anwendung der Logarithmen zur Ausführung praktischer Rechnungen in der im Eingang des § 46 angegebenen Weise durch einige Beispiele erläutert werden:

Aufgabe 1: $2{,}746 \cdot 14{,}318 \cdot 7{,}459$ zu berechnen.

Auflösung:
$$log\,2{,}746 = 0{,}43870$$
$$log\,14{,}318 = 1{,}15588$$
$$log\,7{,}459 = 0{,}87268$$
$$2{,}46726 = num.\,log.\,293{,}26\,(7)$$

Aufgabe 2: $17{,}159 : 0{,}014$ zu berechnen.

Auflösung:
$$log\,17{,}159 = 1{,}23449$$
$$log\,0{,}014 = 0{,}14613 - 2$$
$$3{,}08836 = num.\,log.\,1225{,}6\,(3).$$

Aufgabe 3: $1{,}7485^9$ zu berechnen.

Auflösung:
$$log\,1{,}7485 = 0{,}24266\,(5)$$
$$9$$
$$2{,}18398\,(5) = num.\,log.\,152{,}75\,(2).$$

Aufgabe 4: $\sqrt[3]{123{,}456}$ zu berechnen.

Auflösung:
$$log\,123{,}456 = 2{,}09152$$
$$(2{,}09152 : 3 =)\ 0{,}69717 = num.\,log.\,4{,}9793.$$

Aufgabe 5: $\dfrac{1{,}235^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}076}}{\sqrt[4]{0{,}0058} : 71{,}43^2}$ zu berechnen.

Auflösung:

$$\begin{aligned}
\log 1{,}235 &= 0{,}09167; & \log 1{,}235^4 &= 0{,}36668 \\
\log 0{,}076 &= 0{,}88081 - 2; & \log\sqrt[3]{0{,}076} &= 0{,}62694 - 1 \\
&= 1{,}88081 - 3 & &\overline{0{,}99362 - 1} \\
\log 0{,}0058 &= 0{,}76343 - 3 & & \\
&= 1{,}76343 - 4; & \log\sqrt[4]{0{,}0058} &= 0{,}44086 - 1 \\
\log 71{,}43 &= 1{,}85388 & \log 71{,}43^2 &= 3{,}70776 \\
& & &\overline{0{,}73310 - 5}
\end{aligned}$$

$$[(0{,}99362 - 1) - (0{,}73310 - 5)] = 4{,}26052$$

Resultat: 18218 (,8).

Kommen in den zu berechnenden Ausdrücken Summen oder Differenzen vor, so sind diese — da keine Formel für $log(a \pm b)$ bekannt ist — vor der Anwendung der Logarithmen auszurechnen. Dies macht, falls nicht die Glieder des Binoms selbst, sondern ihre Logarithmen bekannt sind, das vorherige Aufschlagen der Numeri zu letzteren nöthig. Das Vorkommen der Zeichen + und — macht also, sobald die Addition und Subtraction nicht entweder vor dem Gebrauch der Logarithmen oder nach Beendigung desselben auszuführen ist, eine Unterbrechung der logarithmischen Rechnung nöthig. Um z. B. $0{,}1438 \cdot 1{,}5764 - 0{,}4825^3$ zu berechnen, müssen nachdem die Logarithmen der beiden ersten Zahlen addirt sind und der Logarithmus der dritten Zahl mit 3 multiplicirt ist, behufs Ausführung der Subtraction zu beiden Theilresultaten die Numeri aufgeschlagen und subtrahirt werden. Diese Subtraction geschieht hier am Schluss der Rechnung, ist dagegen der obige Ausdruck beispielsweise noch durch 4,7162 zu dividiren, so hat man behufs Fortsetzung der logarithmischen Rechnung zu jener Differenz als Numerus wieder den Logarithmus zu suchen. Man hat dann im Ganzen zur Berechnung des Ausdrucks achtmal in der Tafel aufzuschlagen, während, wenn statt des Zeichens — in demselben z. B. das Multiplicationszeichen stände, das Aufschlagen jener beiden Numeri und sodann wieder des Logarithmus des ganzen Zählers nicht nöthig wäre und daher ein fünfmaliges Aufschlagen in der Tafel genügen würde.

Das Vorkommen von Summen und Differenzen in logarithmisch zu berechnenden Ausdrücken macht hiernach, sofern dadurch die logarithmische Rechnung unterbrochen wird, die Arbeit umständlicher, und man sucht daher dasselbe möglichst zu vermeiden.

Wo dies nicht möglich ist, kann man sich zur Berechnung der Logarithmen von Summen und Differenzen aus den bekannten Logarithmen ihrer Glieder der von Gauss construirten Tafeln der Additions- und Subtractionslogarithmen bedienen, deren Erklärung jedoch erst in der Trigonometrie gegeben wird.

Heis § 58, 59a. Bardey XVIII.

II. Abschnitt.
Die Gleichungen.
Kapitel 6.
Von den Gleichungen überhaupt und den Bestimmungs-Gleichungen ersten Grades insbesondere.

§ 48. Eintheilung und Umformung der Gleichungen.
Heis § 60.

1. Jede Gleichung, deren Seiten unter allen Umständen einander gleich sind, die also bei vorkommenden unbestimmten Zahlen (Buchstaben-Grössen) für beliebige Werthe der letzteren richtig ist, heisst eine identische Gleichung oder eine Identität. So sind z. B. die Gleichungen

$$7 = 7$$
$$a = a,$$

ferner

$$5 + 7 = 20 - 8,$$
$$a + b = b + a$$
$$(a - b).\, c = ac - bc$$

und überhaupt alle im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen, welche die als allgemein gültig bewiesenen Gesetze der Arithmetik darstellen, identische.

Dagegen ist z. B. die Gleichung $a + 7 = 12$ nicht für jeden beliebigen Werth von a, sondern nur für $a = 5$ gültig, und daher keine identische. Dasselbe gilt u. A. auch von der Gleichung $x + y = 10$, welche zwar für unzählig viele verschiedene Werthe von x und y, wie z. B. $x = 1, y = 9$ oder $x = 2, y = 8$ oder $x = 0{,}5, y = 9{,}5$ richtig ist, jedoch nicht für alle für x und y zugleich willkürlich angenommenen Werthe gültig bleibt.

Bei einer solchen nicht identischen Gleichung entsteht die Aufgabe, diejenigen Werthe einer oder mehrerer von den in ihr enthaltenen unbestimmten Zahlen zu bestimmen, für welche die Gleichung richtig ist. Mit Rücksicht hierauf nennt man eine solche Gleichung eine Bestimmungsgleichung, und diejenigen Zahlen, für welche die bestimmten Werthe gesucht werden sollen, damit die Gleichung eine identische werde, heissen die unbekannten Grössen oder schlechthin die Unbekannten der Gleichung. Man bezeichnet die letzteren in der Regel durch die letzten Buchstaben, x, y, z, des Alphabets.

Diejenigen Werthe einer Unbekannten, welche einer gegebenen Bestimmungsgleichung genügen, werden die Wurzeln der letzteren genannt. Das Aufsuchen dieser Wurzeln nennt man das Auflösen der Gleichung.

2. Aus jeder gegebenen Gleichung, sie sei eine identische oder nicht, kann man durch Vornahme gleicher Operationen auf beiden Seiten neue Gleichungen ableiten, welche im Wesentlichen denselben Inhalt, wie jene haben und denselben nur in verschiedenen Formen darstellen. Solche Gleichungen kann man der ersten und unter einander congruent nennen. Die wichtigsten derartigen Umformungen sind folgende:

a) Aus dem Grundsatze »Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches,« folgt, dass man zu beiden Seiten einer jeden gegebenen Gleichung gleiche Glieder addiren darf. Addirt man insbesondere zu beiden Seiten ein Glied, welches auf einer Seite bereits durch Subtraction verbunden vorkommt, so fällt

in Folge der Addition dieses Glied auf jener Seite fort und erscheint auf der anderen mit dem Zeichen +. So erhält man z. B. aus

$$ax + b = cx - d,$$

indem man zu beiden Seiten d addirt,

$$ax + b + d = cx$$

Da man ferner in derselben Weise von beiden Seiten einer Gleichung gleiche Grössen subtrahiren darf, so folgt, dass man durch Subtraction eines vorher auf einer Seite durch + verbundenen Gliedes dieses letztere von jener Seite entfernen und auf der anderen mit dem Zeichen — verbinden kann.

Die beiden so entwickelten Regeln lassen sich in folgende zusammenfassen:

Jedes Glied einer Seite einer Gleichung kann auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen gesetzt werden.

So ergiebt sich z. B. aus $x + 7 = 15$, $x = 15 - 7$, also $x = 8$, aus $5x + 9 = 3x + 11$, $5x - 3x = 11 - 9$, aus $ax - b = d - cx$, $ax + cx = b + d$.

Insbesondere können Glieder einer Gleichung, welche auf beiden Seiten der letzteren zugleich und mit demselben Zeichen stehen, beiderseits weggelassen werden.

Ferner kann man mittelst der vorstehenden Regel jede Gleichung auf Null reduciren, d. h. bewirken, dass alle Glieder auf einer und derselben Seite stehen, für die andere Seite also Null zu setzen ist.

Beispiel: Aus $a - bx + c = dx - e + f$ wird abgeleitet

$$a - bx + c - dx + e - f = 0.$$

b) Da ferner Gleiches mit Gleichem multiplicirt und Gleiches durch Gleiches dividirt, Gleiches giebt, so kann man beide Seiten einer jeden gegebenen Gleichung mit derselben Zahl (ausgenommen 0 und ∞) multipliciren oder durch dieselbe dividiren, oder auch beide Seiten (falls nicht beide gleich Null oder Unendlich sind) in dieselbe Zahl dividiren.

Die Multiplication beider Seiten, also sämmtlicher einzelnen Glieder mit derselben Zahl bietet die Möglichkeit, jeden in einem Gliede vorkommenden Divisor durch Multiplication beider Seiten mit demselben wegzuschaffen. So geht z. B. die Gleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = m$$

durch Multiplication mit b über in die ihr congruente

$$a + \frac{bc}{d} = bm$$

Auf diese Weise lassen sich nach einander alle vorkommenden Divisionen wegschaffen. Einfacher schafft man aus einer gegebenen Gleichung die Nenner gleichzeitig fort, indem man beide Seiten mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der ersteren (dem Generalnenner) multiplicirt.

So ergiebt sich z. B. aus der Gleichung

$$\frac{a^2}{2x} + b + \frac{c}{3} + \frac{ef}{6x} = \frac{g}{5} - \frac{h^2}{10x}$$

durch Multiplication mit $30x$ die ihr congruente

$$15a^2 + 30bx + 10cx + 5ef = 6gx - 3h^2,$$

wobei jedoch vorauszusetzen ist, dass x nicht den Werth 0 habe.

Insbesondere kann man, wenn alle Glieder einer Gleichung denselben Divisor (oder einen und denselben Faktor im Divisor) haben, und dieser nicht gleich Null sein kann, den gemeinschaftlichen Divisor weglassen.

Ebenso kann durch Division aller Glieder mit derselben Zahl jeder denselben sämmtlich gemeinsame Faktor weggeschafft werden. So sind z. B. die Gleichungen

$$ax + ab = ac \text{ und } x + b = c$$

oder $5x + 20y = 30z - 15$ und $x + 4y = 6z - 3$ congruent.

c) Man kann endlich jede Seite einer Gleichung mit derselben Zahl, oder dieselbe Zahl mit jeder Seite potenziren, aus beiden Seiten dieselbe Wurzel oder von beiden Seiten den Logarithmus zu derselben Basis nehmen.

Insbesondere lassen sich in einer Gleichung vorkommende Wurzeln durch Potenzirung beider Seiten mit dem Wurzelexponenten wegschaffen, wenn man zuvor das Glied mit der zu entfernenden Wurzel auf eine Seite allein gebracht hat. So ergiebt die Gleichung

$$\sqrt{a + bx} + c = d$$

nach Umformung in

$$\sqrt{a + bx} = d - c$$

durch Erheben beider Seiten in's Quadrat

$$a + bx = (d - c)^2.$$

Bei allen diesen Umformungen ist jedoch vorauszusetzen, dass die Wurzelgrössen und die Logarithmen nicht auf der einen Seite eine grössere Anzahl von Deutungen erhalten, als auf der anderen. So besitzt z. B. die Gleichung

$$x^2 = 9$$

einen weiteren Umfang als die Gleichung $x = 3$, denn jene könnte, ausser aus dieser, auch aus $x = -3$ durch Potenziren beider Seiten abgeleitet werden.

3. Eine Gleichung heisst in Beziehung auf eine oder mehrere in ihr enthaltene unbestimmte oder unbekannte Grössen eine algebraische, wenn diese Grössen in ihr nur durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen oder Divisionen unter sich oder mit anderen Grössen verbunden, oder wenn dieselben als Potenz-Basis oder Radicand vorkommen. Alle anderen Gleichungen, also z. B. solche, in welchen eine oder mehrere jener Grössen in Potenz- oder Wurzelexponenten, als Logarithmand oder Basis eines Logarithmus u. dgl. m. vorkommen, heissen in Beziehung auf diese Grössen transscendent. Im Folgenden sollen zunächst nur algebraische Gleichungen als gegeben vorausgesetzt werden.

Wir setzen ferner voraus, dass alle in einer gegebenen Gleichung vorkommenden irrationalen Glieder, d. h. also diejenigen, welche eine oder mehrere jener Unbestimmten oder Unbekannten im Radicand einer Wurzel enthalten, durch Umformung der Gleichung in der eben angegebenen Weise rational gemacht seien, dass also die weiterhin zu behandelnde Gleichung keine jener Unbestimmten oder Unbekannten unter einem Wurzelzeichen enthalte.

Beispielsweise würde die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + ax = b, \text{ d. i. } \sqrt[3]{x^2} + ax = b$$

als in Beziehung auf x irrational, durch die Umformungen

$$x^{\frac{2}{3}} = b - ax,$$
$$x^2 = (b - ax)^3$$

umzugestalten sein. Dagegen ist die Gleichung

$$ax^2 + \sqrt{a - b} \cdot \sqrt{c} = d^3$$

in Beziehung auf x rational, da die Wurzeln die Grösse x nicht enthalten.

Eine den vorstehenden Bedingungen entsprechende Gleichung heisst in Beziehung auf die betreffenden Unbestimmten oder Unbekannten geordnet, wenn

mit derselben, soweit es erforderlich, folgende Umformungen mit Hülfe der vorstehenden Regeln vorgenommen sind:

a) es muss die Gleichung auf Null reducirt sein,

b) es müssen alle Divisoren, in welchen eine der Unbestimmten oder Unbekannten vorkam, weggeschafft sein,

c) es müssen alle Klammern, in welchen eine jener Unbestimmten oder Unbekannten vorkam, aufgelöst sein,

d) es müssen alle Glieder, welche eine jener Unbestimmten oder Unbekannten auf derselben Potenz, oder welche dasselbe Produkt von aus diesen Grössen bestehenden Faktoren enthalten, in je ein Glied zusammengefasst und endlich diese Glieder in bestimmter Aufeinanderfolge — nach abnehmenden Potenzen einer jener Grössen, bezw. nach der abnehmenden Anzahl der Faktoren jener Produkte — geordnet sein.

Um beispielsweise die Gleichung

$$3 = 12 - \frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right)$$

nach diesen Bestimmungen zu ordnen, leite man aus ihr nach einander die folgenden ab:

$$\frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right) + 3 - 12 = 0 \text{ oder } \frac{1}{3}\left(47 - \frac{60}{x}\right) - 9 = 0$$

$$47 - \frac{60}{x} - 27 = 0 \text{ oder } 20 - \frac{60}{x} = 0;\ 20x - 60 = 0.$$

Um die Gleichung

$$\frac{y}{x} - \frac{9\sqrt{x}}{y} - \frac{81}{xy} = (2y + 9)\frac{\sqrt{x}}{y}$$

zu ordnen, kann man aus ihr zunächst

$$0 = (2y + 9)\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{81}{xy} + \frac{9\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{x},$$

oder nach Vereinigung der beiden Glieder, welche den Divisor y haben,

$$(2y + 18)\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{81}{xy} - \frac{y}{x} = 0$$

ableiten, dann durch Multiplication mit dem Generalnenner xy,

$$(2y + 18)x\sqrt{x} + 81 - y^2 = 0$$

und hieraus, um $\sqrt{x}$ durch Quadriren wegschaffen zu können, zunächst

$$(2y + 18)x\sqrt{x} = y^2 - 81 \text{ und sodann } (2y + 18)^2 x^3 = (y^2 - 81)^2$$

finden. Durch Auflösen der Klammern erhält man dann

$$4x^3y^2 + 72x^3y + 324x^3 = y^4 - 162y^2 + 6561,$$

und durch Reduction auf Null und gleichzeitiges Ordnen nach den fallenden Exponenten von x, bezw. y endlich

$$4x^3y^2 + 72x^3y - y^4 + 324x^3 + 162y^2 - 6561 = 0.$$

Ein Glied einer geordneten Gleichung, welches ein Produkt von n unbekannten Faktoren enthält, heisst in Beziehung auf diese Unbekannten ein Glied $n$ten Grades oder $n$ter Dimension. So ist in der vorstehenden Gleichung das erste Glied in Beziehung auf die Unbekannten x und y von der fünften, das Glied $324x^3$ von der dritten, das Glied 6561 von der 0ten Dimension. In der vollständig geordneten Gleichung geht kein Glied von einer niederen Dimension einem solchen von höherer voran.

Eine Bestimmungsgleichung heisst eine solche $n$ten Grades, wenn in der geordneten Gleichung mindestens ein Glied vorkommt, welches in Beziehung auf die Unbekannten von der $n$ten Dimension, aber keins, welches von einer höheren Dimension ist.

Die obige Gleichung ist hiernach eine solche fünften, die Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ eine solche zweiten Grades. Gleichungen ersten Grades heissen auch lineare Gleichungen.

Bei der im Folgenden zu behandelnden Aufgabe der Auflösung gegebener Bestimmungs-Gleichungen auf die in ihnen enthaltenen Unbekannten darf man jede gegebene Gleichung durch jede ihr congruente ersetzen, da aus der Gültigkeit der ersteren auch die der letzteren für dieselben Werthe der Unbekannten, und für keine anderen hervorgeht. Wir dürfen daher im Folgenden auch insbesondere voraussetzen, dass die aufzulösenden Gleichungen geordnet seien.

§ 49. Die Auflösung der Gleichungen ersten Grades.

Heis, § 61—68, Bardey XXI—XXV.

1. Eine geordnete Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten kann nur ein Glied mit der ersten Potenz dieser Unbekannten x und ein Glied ohne Unbekannte enthalten, hat also die Form

$$ax + b = 0.$$

Die Auflösung geschieht, indem man das Glied b auf die andere Seite bringt, und dann beide Seiten der neuen Gleichung durch den Coefficienten a der Unbekannten dividirt. Man erhält

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Aus dieser Auflösung folgt auch, dass man aus einer solchen Gleichung stets einen und nur einen Werth der Unbekannten finden kann.

2. Enthält dagegen eine Gleichung ersten Grades zwei Unbekannte x und y, so kann man für irgend eine dieser Unbekannten jeden beliebigen Werth annehmen und nach Einsetzung desselben jedesmal durch Auflösen der entstehenden Gleichung auf die andere Unbekannte einen zugehörigen Werth für diese letztere finden. Die Aufgabe, eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten auf diese aufzulösen, ist also unbestimmt, d. h. sie gestattet unzählige Paare von zusammengehörigen Wurzelwerthen der Gleichung.

Ist dagegen noch eine zweite solche Gleichung zwischen denselben Unbekannten gegeben, welcher also diese gleichzeitig mit der ersten Gleichung genügen sollen, so hört, wie sogleich näher nachgewiesen werden soll, jene Unbestimmtheit auf. Da eine geordnete solche Gleichung die Form

$$ax + by + c = 0$$

haben muss, so dürfen wir allgemein die nachstehenden zwei Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

als die gegebenen voraussetzen. Behandelt man in einer derselben, z. B. in der ersten, eine der Unbekannten, z. B. y, wie eine bekannte Grösse, so findet man durch Auflösung auf die andere Unbekannte für letztere einen Ausdruck

$$x = -\frac{b_1y + c_1}{a_1},$$

welcher an Stelle derselben in die zweite Gleichung eingesetzt (substituirt) werden kann. Hierdurch geht diese über in

$$-a_2 \cdot \frac{b_1 y + c_1}{a_1} + b_2 y + c_2 = 0,$$

also in eine Gleichung, welche nur noch die eine Unbekannte y enthält, und daher nach 1. auf diese Unbekannte aufgelöst werden kann.

Man hat also aus den zwei gegebenen Gleichungen mit zwei Unbekannten eine dritte abgeleitet, welche eine von diesen Unbekannten nicht mehr enthält. Eine solche Wegschaffung einer unbekannten Grösse nennt man **Elimination** dieser letzteren, und die entstehende dritte Gleichung heisst die **Eliminationsgleichung**.

Durch dieses Verfahren kann jede der beiden Unbekannten gefunden werden, da es frei steht, welche derselben man eliminiren will. In vielen Fällen ist es kürzer, nach Auffindung des Werthes einer der Grössen x, y denselben in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen und dann die entstehende Gleichung auf die andere Unbekannte aufzulösen.

Es seien z. B. die gegebenen Gleichungen

$$3x + 5y - 21 = 0$$
$$7x - 4y - 2 = 0.$$

Will man zuerst y eliminiren, so kann man entweder aus der ersten Gleichung $y = \frac{21 - 3x}{5}$ in die zweite oder aus der zweiten $y = \frac{7x - 2}{4}$ in die erste einsetzen. In beiden Fällen erhält man selbstverständlich durch Auflösen der Eliminationsgleichung dasselbe Resultat $x = 2$. Setzt man nun diesen Werth für x beispielsweise in der ersten der obigen Gleichungen ein, so findet man

$$6 + 5y - 21 = 0; \; 5y = 15; \; y = 3.$$

3. Ausser dem im Vorstehenden erörterten Verfahren der Elimination giebt es noch andere Methoden für die Ableitung der Eliminationsgleichung. Die vorstehende führt den Namen der **Substitutions-Methode**. Ausserdem sind namentlich folgende im Gebrauch:

Die **Combinationsmethode** leitet aus beiden Gleichungen Ausdrücke für eine und dieselbe Unbekannte ab und setzt dann diese Ausdrücke einander gleich. Aus

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

ergiebt sich z. B.

$$x = -\frac{b_1 y + c_1}{a_1}$$

und

$$x = -\frac{b_2 y + c_2}{a_2},$$

also die Eliminationsgleichung

$$\frac{b_1 y + c_1}{a_1} = \frac{b_2 y + c_2}{a_2}.$$

In derselben Weise kann man selbstverständlich zwei Ausdrücke für y ableiten und combiniren.

Die **Additions- und Subtractions-Methode**, auch die **englische** Methode genannt, besteht darin, dass man die Glieder einer oder beider gegebener Gleichungen mit einem Faktor multiplicirt, der so gewählt ist, dass in den neuen Gleichungen die zu eliminirende Unbekannte gleiche Coefficienten erhält, und dann diese neuen Gleichungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die Glieder mit diesen Unbekannten entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Dass die Coefficienten einer Unbekannten in beiden Gleichungen dieselben werden, lässt sich stets dadurch bewirken, dass man die Seiten jeder der gegebenen Gleichungen mit dem Coefficienten jener Unbekannten aus der anderen Gleichung multiplicirt.

Soll z. B. in den obenstehenden allgemeinen Gleichungen y eliminirt werden, so multiplicire man zunächst die erste derselben mit b_2, die zweite mit b_1. Die entstehenden Gleichungen

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y + c_1 b_2 = 0$$
$$a_2 b_1 x + b_1 b_2 y + c_2 b_1 = 0$$

subtrahire man darauf, wodurch die Eliminationsgleichung

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x + (c_1 b_2 - c_2 b_1) = 0$$

entsteht.

Haben die Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten bereits einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird man die Seiten jeder Gleichung nur mit dem nicht gemeinschaftlichen Faktor aus dem Coefficienten in der anderen multipliciren. Für

$$6x - 10y + 21 = 0$$
$$15x + 2y - 83 = 0$$

z. B. wird man zur Elimination von x die Seiten der ersten Gleichung nur mit 5, die der zweiten mit 2, und zur Elimination von y überhaupt nur die der zweiten mit 5 multipliciren.

Ein sehr häufig vorkommendes System solcher Gleichungen liefert die Aufgabe: Zwei Zahlen zu finden, deren Summe s und deren Differenz d gegeben ist. Hier führt die vorstehende Methode unmittelbar durch Addition, bezw. Subtraction aus den Gleichungen

$$x + y = s$$
$$x - y = d$$

auf die Resultate: $x = \frac{1}{2}(s + d), y = \frac{1}{2}(s - d)$.

Bei Anwendung der französischen oder Bézout'schen Methode endlich wird eine der gegebenen Gleichungen mit einem Faktor k multiplicirt, dessen Werth vorläufig unbestimmt gelassen wird. Nachdem man darauf die entstandene Gleichung mit der anderen gegebenen durch Addition zu einer dritten verbunden hat, bestimmt man in letzterer den Werth jenes Faktors so, dass der Coefficient der zu eliminirenden Unbekannten gleich Null wird.

So ergiebt sich aus den obigen allgemeinen Gleichungen auf diese Weise leicht

$$(a_1 + k a_2)\, x + (b_1 + k b_2)\, y + (c_1 + k c_2) = 0,$$

und soll x eliminirt werden, so hat man hier

$$a_1 + k a_2 = 0, \text{ also } k = -\frac{a_1}{a_2}$$

zu setzen.

4. Die im Vorigen angegebenen Eliminations-Methoden ergeben sich bei näherer Betrachtung und Vergleichung als nur der Form nach verschieden. Welche dieser Formen im bestimmten einzelnen Fall die vortheilhafteste ist, hängt von der Beschaffenheit dieses Falles ab. In praktischer Hinsicht empfiehlt es sich jedoch, statt bei jedem neuen Zahlenbeispiel der Auflösung solcher Gleichungen auch das Eliminationsverfahren auf's Neue anzuwenden, lieber ein- für allemal dasselbe an den allgemeinen Gleichungen durchzuführen und dann in jedem besonderen Falle nur die besonderen Werthe der Grössen a_1, b_1 u. s. w.

in die Resultate einzusetzen. Man findet leicht zu den schon oben benutzten allgemeinen Gleichungen die Resultate

$$x = -\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$y = -\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

Das Bildungsgesetz dieser Formeln ist leicht zu erkennen und zu behalten: Der beiden gemeinsame Nenner ist aus den Coefficienten

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

der Unbekannten in den beiden Gleichungen so zusammengesetzt, dass jedes der beiden Produkte einen Coefficienten von jeder Unbekannten und aus jeder Gleichung enthält.

Man nennt den Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ die Determinante des Systems der vier in der vorstehenden Weise in zwei Horizontalreihen und zwei Vertikalcolonnen geschriebenen Coefficienten. — Auch die Zähler der beiden obigen Formeln sind solche Determinanten; sie entstehen aus dem Nenner, indem man jedesmal die Coefficienten der gesuchten Unbekannten durch die entsprechenden Glieder c_1, c_2 ersetzt.

Aus den vorstehenden Untersuchungen geht noch hervor, dass durch zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten diese letzteren, und zwar eindeutig bestimmt sind. Als selbstverständlich kann hierbei die Bedingung betrachtet werden, dass die beiden Gleichungen von einander unabhängig sein müssen, oder mit anderen Worten, dass dieselben nicht congruent sein dürfen. Wäre nämlich letzteres der Fall, so würden beide Gleichungen dieselbe Eigenschaft der Unbekannten angeben und nur die Bedeutung einer einzigen Gleichung besitzen. — Die Elimination einer Unbekannten aus zwei congruenten Gleichungen macht daher stets auch die andere Unbekannte verschwinden und führt somit auf eine identische Gleichung.

5. Werden drei oder mehr Unbekannte gesucht, so genügt auch die Angabe zweier Gleichungen für dieselben nicht mehr. Um die Frage nach der Anzahl der erforderlichen Gleichungen ganz allgemein zu entscheiden, wollen wir annehmen, dass p von einander unabhängige Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gegeben seien. Man kann dann stets aus diesen p Gleichungen eine Unbekannte eliminiren, indem man z. B. den aus einer jener Gleichungen abgeleiteten Ausdruck für diese Unbekannte in die anderen substituirt. Man kann sich zu demselben Zweck aber auch jeder anderen Eliminationsmethode bedienen, indem man jedesmal zwei der gegebenen Gleichungen mit einander verbindet. Hierbei ist nur zu beachten, dass man nicht zwei Gleichungen mit einander verbinden darf, welche schon mittelbar verbunden sind, z. B. nicht die zweite mit der dritten, wenn vorher schon die erste mit der zweiten und auch die erste mit der dritten verbunden war. Man würde anderenfalls Eliminationsgleichungen erhalten, welche nicht von einander unabhängig wären. Dieser Fehler wird vermieden sein, wenn jede der p gegebenen Gleichungen wenigstens einmal zur Elimination benutzt worden ist.

Auf jeden Fall kann man so aus p Gleichungen mit n Unbekannten durch Elimination $p-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten erhalten. Wiederholt man mit diesen dasselbe Verfahren, leitet also zunächst $p-2$ Gleichungen mit $n-2$ Unbekannten ab u. s. w., so sieht man leicht ein, dass man nur dann

schliesslich auf eine Gleichung mit einer Unbekannten kommen wird, wenn n gleich p ist. Ist die Zahl der Unbekannten grösser als die der Gleichungen, so erhält man zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehr Unbekannten, und die Aufgabe ist daher unbestimmt. Ist die Zahl der Unbekannten kleiner als die der Gleichungen, so gelangt man zu zwei oder mehr Gleichungen mit einer und derselben einzigen Unbekannten, und da durch jede dieser Gleichungen der Werth dieser Unbekannten bestimmt ist, so erhält man entweder verschiedene Werthe für dieselbe Zahl, also einen Widerspruch, oder es sind — wenn alle Schlussgleichungen übereinstimmen — dieselben zum Theil überflüssig. Die Aufgabe ist also in diesem Falle überbestimmt.

Aus dem Vorstehenden geht nicht nur hervor, dass zur Bestimmung von n Unbekannten n Gleichungen nothwendig und ausreichend sind, sondern dasselbe zeigt auch den Weg, auf welchem der Werth einer jeden dieser Unbekannten gefunden werden kann.

Man wird jedoch in praktischen Fällen auch hier nicht das gesammte Eliminationsverfahren für jede einzelne Unbekannte wiederholen, sondern nachdem der Werth einer derselben gefunden ist, diesen in eine der abgeleiteten Eliminationsgleichungen mit zwei Unbekannten einsetzen und damit unmittelbar die zweite Unbekannte suchen. Dann kann man die bekannten Werthe der zwei Unbekannten in eine der drei Gleichungen mit drei Unbekannten einsetzen, und so weiter fortfahren bis alle gesuchten Grössen gefunden sind.

Noch vortheilhafter erscheint es, auch hier, wie oben bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, allgemeine Resultate abzuleiten, in welche für jedes specielle Beispiel die besonderen Werthe einzusetzen sind. Die Ableitung solcher allgemeinen Resultate soll später mit Hülfe der Theorie der Determinanten im Zusammenhang mit anderen Untersuchungen geschehen.

§ 50. Eingekleidete Aufgaben.

1. Die Anwendung der Bestimmungsgleichungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben erfordert zuerst, dass man die in der Aufgabe angegebenen Beziehungen zwischen gegebenen und gesuchten Grössen durch eine oder mehrere Gleichungen ausdrücke. Man nennt dies das Ansetzen der Gleichungen. Ist dasselbe erfolgt, so liefert die Auflösung der letzteren die gesuchten Grössen.

Zum Ansetzen einer Gleichung bezeichne man die gesuchten, oder auch andere zu denselben in einfachen Beziehungen stehende Grössen durch $x, y, \cdots$, ermittele aus den Bedingungen der Aufgabe zwei einander gleiche Grössen, drücke die Werthe letzterer durch Zahlenzeichen — mit Beziehung auf dieselbe Einheit aus und setze dann die beiden so gewonnenen Ausdrücke einander gleich.

Als Beispiel diene zunächst die Aufgabe (Heis, § 63, No. 107):

Fliessen in einen leeren Behälter alle 3 Minuten 20 Liter Wasser, so werden nach einer gewissen Zeit noch 40 Liter an der vollständigen Füllung fehlen. Fliessen aber in denselben alle 5 Minuten 52 Liter, so werden nach derselben Zeit 72 Liter Wasser übergelaufen sein. Wieviel Liter Wasser fasst der Behälter und wieviel Liter müssen jede Minute demselben zufliessen, wenn er nach derselben Zeit bis an den Rand gefüllt sein soll?

Zur Auflösung bezeichne man die Anzahl der Minuten, während welcher jedesmal das Wasser in den Behälter fliesst, mit x. Bestimmt man dann aus den beiden Angaben den Inhalt des Behälters, so hat man die zwei einander gleich zu setzenden Ausdrücke. Die erste Angabe zeigt, dass wenn in jeder Minute

$\frac{20}{8}$ Liter, also in x Minuten $\frac{20}{8}x$ Liter zufliessen, der Inhalt des Behälters gleich $\frac{20}{8}x + 40$ Liter sein muss. In gleicher Weise findet man aus der zweiten Angabe den Inhalt des Behälters gleich $\frac{52}{5}x - 72$. Demnach hat man die Gleichung

$$\frac{20}{8}x + 40 = \frac{52}{5}x - 72,$$

deren Auflösung auf

$$40 + 72 = \frac{52}{5}x - \frac{20}{8}x$$
$$112 = \frac{56}{15}x \text{ oder } 2 = \frac{x}{15}$$
$$\text{also } x = 30$$

führt. Demnach beantworten sich die gestellten Fragen dahin, dass der Inhalt des Behälters $\frac{20}{8}x + 40 = 240$ Liter sei, und dass um ihn in 30 Minuten zu füllen, jede Minute $\frac{240}{30} = 8$ Liter zufliessen müssten.

Wollte man den Inhalt des Behälters als Unbekannte gleich x setzen, so könnte man die Zeit für beide Fälle als die gleiche Grösse annehmen. Im ersten Fall werden um $x - 40$ Liter zu erhalten, so viele Minuten nöthig sein, als $\frac{20}{8}$ in $x - 40$ enthalten sind. Ebenso erhält man das zweitemal $(x + 72) : \frac{52}{5}$ Minuten, und die anzusetzende Gleichung ist also jetzt

$$(x - 40) \cdot \frac{8}{20} = (x + 72) \cdot \frac{5}{52}.$$

Als zweites Beispiel diene die Aufgabe (Heis, § 63, No. 162):

Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund deren 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Grösse so viel betragen, als 5 Hundesprünge, wieviel Sprünge muss der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

Zur Auflösung kann man die gesuchte Anzahl der Sprünge des Hundes mit x bezeichnen und als diejenige Grösse, welche für die Seiten der Gleichung doppelt auszudrücken ist, den Weg des Hundes annehmen. Derselbe ist gleich x Hundesprüngen und gleich dem Wege des Hasen plus 90 Hasensprüngen. Da nun der Hase in derselben Zeit, in welcher der Hund 4 Sprünge macht, einen Weg von 5 Hasensprüngen zurücklegt, so ist der Weg des Hasen, während der Hund x Sprünge macht, gleich $\frac{5}{4}x$ Hasensprüngen. Die beiden so gewonnenen Ausdrücke für den Weg des Hundes, nämlich x und $\frac{5}{4}x + 90$ beziehen sich aber auf verschiedene Einheiten, und man muss daher entweder die Grösse der Hundesprünge durch die Grösse eines Hasensprungs ausdrücken, oder umgekehrt. Da nun 5 Hundesprünge an Grösse gleich 7 Hasensprüngen sind, so sind x Hundesprünge gleich $\frac{7}{5}x$ Hasensprüngen, und man hat also die Gleichung

$$\frac{7}{5}x = \frac{5}{4}x + 90,$$

aus welcher sich $x = 600$ ergiebt.

Als drittes Beispiel diene die Aufgabe (Heis, § 67, No. 91):

Eine dreizifferige Zahl, deren Quersumme 6 ist, zu finden, so dass die Ziffer auf der ersten Stelle links $\frac{1}{5}$ der Zahl ist, welche aus den beiden übrigen Ziffern gebildet wird, und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts die Hälfte der aus den beiden übrigen gebildeten Zahl ist. Wie heisst die Zahl?

Bezeichnet man hier die drei Ziffern der gesuchten Zahl bezüglich durch x, y, z, so liefert die erste Angabe, dass die Quersumme 6 sei, ohne Weiteres die Gleichung

$$x + y + z = 6.$$

Die zweite Angabe, dass x gleich $\frac{1}{5}$ der aus den beiden übrigen Ziffern gebildeten Zahl sei, führt auf die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{5}(10y + z),$$

und die letzte, ähnliche Angabe führt auf die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}(10x + y).$$

Man findet hieraus $x = 1$, $y = 0$, $z = 5$; die gesuchte Zahl ist also 105.

2. Hat man mehrere Aufgaben gleicher Art, d. h. solche, welche sich nur durch verschiedene Zahlenwerthe der gegebenen Grössen unterscheiden und also im Uebrigen gleichlautend sind, zu behandeln, so empfiehlt es sich, die betreffende Aufgabe in allgemeiner Form, d. h. mit Buchstaben-Grössen statt der bestimmten Zahlen zu lösen. Jene ersteren Aufgaben erscheinen dann als blosse Zahlenbeispiele zu dieser allgemeinen Aufgabe, und man hat nicht nöthig, das ganze Auflösungs-Verfahren für jedes einzelne Beispiel zu wiederholen, sondern setzt jedesmal nur für die gebrauchten Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerthe in das gefundene Resultat ein.

Wenn beispielsweise in Aufgaben der sogenannten Mischungsrechnung verlangt wird, wieviel Maass- oder Gewichteinheiten man von jedem von zwei zu mischenden Stoffen, deren Preise für die Einheit gegeben sind, nehmen müsse, um ein bestimmtes Quantum einer Mischung zu einem vorher angegebenen Preise zu erhalten, so kann man ein- für allemal, wie folgt, rechnen: Es seien a Maass der Mischung zum Preise b für das Maass verlangt, und es seien c, d bezüglich die Preise eines Maasses der zu mischenden Substanzen, x die von der ersteren, und folglich $a - x$ die von der letzteren zu nehmende Anzahl von Maassen, so muss der Werth der gesammten Stoffe vor und nach der Mischung derselbe, also

$$c \cdot x + d \cdot (a - x) = ab$$

sein, woraus

$$x = \frac{a(b-d)}{c-d}$$

folgt. Dieses allgemeine Resultat, in welches man also bei bestimmten Beispielen die Werthe für a, b, c und d einzusetzen hat, lässt sich leicht in Form einer **Rechnungsregel** für alle Aufgaben dieser Art in Worte kleiden.

In entsprechender Weise lassen sich zu allen Aufgaben der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten (Procentrechnung, Vertheilungsrechnung u. s. w.) durch Gleichungen ersten Grades die Lösungen und, bei der allgemeinen Behandlung mit Buchstaben, für jede einzelne Art solcher Aufgaben auch allgemeine Rechnungsregeln ableiten.

Umgekehrt lassen sich freilich alle eingekleideten Aufgaben, welche auf Gleichungen ersten Grades führen, auch ohne letztere, also durch unmittelbarere Schlüsse lösen. Anders verhält es sich zum Theil mit solchen Aufgaben, welche auf die im Folgenden zu behandelnden Gleichungen zweiten oder höheren Grades führen, da das gewöhnliche bürgerliche Rechnen nicht über die vier ersten Rechnungsarten (die sogenannten vier Species) hinausgeht, also das Rechnen mit Wurzelgrössen u. s. w. ausschliesst.

Bei den im Vorigen erwähnten allgemeinen Resultaten ist noch die an dieselben sich anknüpfende Discussion zu erwähnen, welche die verschiedenen möglicherweise eintretenden Fälle und die Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe zu erörtern hat. Es sei beispielsweise die Aufgabe (Heis, § 63, No. 134) gestellt, zu berechnen, in welcher Zeit nach dem Abgange des zweiten von zwei gleichmässig bewegten Körpern diese letzteren zusammentreffen, wenn beide in

derselben Richtung sich bewegen und der erste alle a Minuten m Meter zurücklegt, während der t Minuten später und von einem um d Meter rückwärts gelegenen Orte abgehende zweite Körper alle b Minuten n Meter zurücklegt. Setzt man hier den Weg des zweiten Körpers gleich dem des ersten plus d Metern, und soll die gesuchte Zeit gleich x Minuten sein, so ist der erste Körper $x + t$ Minuten unterwegs und legt also $(x + t)\,\frac{m}{a}$ Meter zurück; der zweite legt $x \cdot \frac{n}{b}$ Meter zurück; die Gleichung ist also

$$(x+t)\,\frac{m}{a} + d = x \cdot \frac{n}{b},$$

woraus

$$x = \frac{b \cdot (mt + ad)}{an - bm}$$

folgt. Setzt man voraus, dass a, b, m, n, t positive Werthe haben, so wird x positiv und die Auflösung ist möglich, wenn $an > bm$ ist. Ist dagegen $an < bm$, so wird x negativ; in diesem Falle ist $\frac{m}{a} > \frac{n}{b}$, d. h. der vom ersten Körper in jeder Minute zurückgelegte Weg grösser als der entsprechende des zweiten, die beiden Körper entfernen sich also, statt zusammenzutreffen, immer weiter von einander und das negative Resultat erhält den Sinn, dass die Begegnung um die entsprechende Anzahl von Minuten vor dem Abgange des zweiten stattgefunden haben würde, wenn beide Körper schon vor diesem Zeitpunkte in denselben Bewegungen gewesen wären. Ist endlich $an = bm$, so wird $x = \infty$; in diesem Falle ist die Auflösung unter jeder Bedingung unmöglich, und beide Körper behalten bei ihrer Bewegung immer denselben Abstand von einander. Wird t negativ, so giebt die Formel die Auflösung für den Fall, dass der zweite Körper um t Minuten früher als der andere abgeht, und kann für diesen Fall in entsprechender Weise weiter discutirt werden. Wird d negativ, so lag der Ausgangspunkt des zweiten Körpers von dem des ersten aus nach vorwärts; ist $d = 0$, so gingen beide Körper von demselben Punkte aus, ist $t = 0$, so fingen sie ihre Bewegungen zu gleicher Zeit an, u. s. w. Die weitere Ausführung für alle einzelnen Fälle kann nach diesen Andeutungen dem Leser überlassen werden.

Kapitel 7.

Die Auflösung der Gleichungen zweiten Grades.

§ 51. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Heis § 69—72. Bardey XXVI, XXVII.

1. Eine geordnete Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten x muss nach § 48 stets ein Glied mit x^2 und kann ausserdem ein solches mit der ersten Potenz der Unbekannten und ein solches ohne x enthalten. Sie hat also die Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

in welcher b oder c gleich Null zu setzen sind, wenn das zweite oder das dritte Glied fehlt.

Eine Gleichung zweiten Grades wird auch eine quadratische Gleichung genannt. Ist in der vorstehenden Form keine der Grössen b, c gleich Null, ent-

hält also die Gleichung alle drei Glieder, so heisst sie eine vollständige oder auch eine gemischte. Fehlt das Glied mit der ersten Potenz der Unbekannten, so heisst sie eine rein quadratische.

Um die allgemeine Gleichung (1) aufzulösen, kann man zunächst beide Seiten durch den Coefficienten a von x^2 dividiren. Die Gleichung erhält hierdurch die Form

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2).$$

Man bringt nun, gemäss der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, die linke Seite dieser Gleichung auf die Form eines vollständigen Quadrats, indem man für dieselbe $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}p + q$ schreibt, q auf die andere Seite bringt und zu beiden Seiten $(\frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2$ addirt. Man erhält so

$$x^2 + 2x \cdot \tfrac{1}{2}p + (\tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q,$$

$$\text{oder } (x + \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q,$$

also durch Ausziehen der Quadratwurzel aus beiden Seiten

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},$$

$$\text{mithin } x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}. \quad (3)$$

So findet man z. B. für die Gleichung

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\text{zunächst } x^2 + 2x \cdot 5 = 24,$$

$$x^2 + 2x \cdot 5 + 5^2 = 25 + 24,$$

$$(x + 5)^2 = 49$$

$$x + 5 = \pm 7$$

$$x = \pm 7 - 5,$$

also entweder $x = +7 - 5 = +2$ oder $x = -7 - 5 = -12$.

Kürzer benutzt man, statt in jedem einzelnen Falle die ganze Ableitung zu wiederholen, das obige allgemeine Resultat (3), indem man in dasselbe die besonderen Werthe für p und q, im vorliegenden Beispiel also $p = 10$, $q = -24$, einsetzt. Man erhält so unmittelbar

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 + 24} = -5 \pm 7.$$

Will man das allgemeine Resultat für die unter (1) angegebene Form der Gleichung haben, so hat man nur in (3)

$$p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}$$

einzusetzen und erhält nach einigen leichten Umformungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4)$$

So erhält man z. B. für die Gleichung $5x^2 - 3x - 224 = 0$ durch Einsetzen von $a = 5$, $b = -3$, $c = -224$ in die vorstehende Formel

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 5 \cdot 224}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4480}}{10} = \frac{3 \pm 67}{10}, \text{ also}$$

$$x_1 = \frac{70}{10} = 7,\ x_2 = \frac{-64}{10} = -6{,}4.$$

2. Discussion des allgemeinen Resultats (4). Aus der vorstehenden Auflösung folgt, dass jede Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten zwei Wurzeln hat. Aufgaben, welche auf eine quadratische Gleichung führen, haben also stets zwei Auflösungen, welche im Allgemeinen verschieden sind.

Für die Beschaffenheit dieser beiden Auflösungen ist der Radicand $b^2 - 4ac$ in der Formel (4) von besonderer Bedeutung. Ist $b^2 > 4ac$, so hat die Wurzel-

grösse zwei verschiedene reelle Werthe. Ist $b^2 = 4ac$, so wird die Wurzelgrösse gleich Null, und man erhält für x nur den einzigen Werth $x = -\frac{b}{2a}$. In diesem Falle sind also die beiden Wurzeln der Gleichung einander gleich. Ist endlich $b^2 < 4ac$, so wird die Wurzelgrösse imaginär, die Gleichung hat also zwei verschiedene complexe Wurzeln. Dieselben sind stets einander conjugirt. — In praktischen Aufgaben giebt ein solches Resultat im Allgemeinen die Unmöglichkeit der Lösung an.

Als besondere Fälle der allgemeinen Auflösung sind noch die folgenden zu behandeln: Ist $b = 0$, die Gleichung also eine rein quadratische, so erhält man aus dieser Gleichung

$$ax^2 + c = 0$$

leicht unmittelbar

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Die rein quadratische Gleichung hat also stets zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln, welche entweder beide reell oder beide imaginär sind, je nachdem c und a verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben. Die obige allgemeine Formel (4) liefert durch Einsetzung von $b = 0$ nach einigen leichten Umformungen dasselbe Resultat.

Ist ferner $c = 0$, so lässt sich die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ebenfalls leicht unmittelbar auflösen. Man kann in diesem Falle nämlich beide Seiten durch x dividiren, doch ist dies nur unter der Voraussetzung gestattet, dass x nicht gleich Null oder unendlich sei. Die Substitution von $x = 0$ zeigt nun, dass in der That hierdurch der Gleichung genügt wird; eine Wurzel derselben ist also gleich Null. Will man nun noch eine zweite Wurzel suchen, und setzt demnach voraus, dass $x \lessgtr 0$ sei, so darf man durch x dividiren und erhält die Gleichung ersten Grades $ax + b = 0$, aus welcher sich leicht die zweite Wurzel $x = -\frac{b}{a}$ ergiebt. Auch hier folgen dieselben Resultate aus der allgemeinen Auflösung (4), wenn man in derselben $c = 0$ einsetzt.

Ist $b = 0$, und $c = 0$, so haben offenbar beide Wurzeln der Gleichung den Werth Null.

3. Aus den beiden durch (4) gegebenen Wurzeln der allgemeinen quadratischen Gleichung (1), nämlich

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ergeben sich leicht folgende Beziehungen zwischen diesen Wurzeln und den bekannten Coefficienten a, b und c der Gleichung. Es ist

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = +\frac{c}{a},$$

oder wenn man die für diese Untersuchung bequemere Form (2) der Gleichung anwendet, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = +q$.

Aus den hierin gegebenen bemerkenswerthen Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung (2) folgt:

Ist q negativ, so haben die beiden Wurzeln der Gleichung entgegengesetzte, ist q positiv, so haben sie gleiche Vorzeichen. Welche Vorzeichen dies sind, lässt sich weiterhin aus dem Zeichen von p ermitteln, denn die grössere Wurzel muss nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen wie p haben. Man erhält hiernach folgende vier Hauptfälle:

Ist q negativ und p negativ, so ist die grössere Wurzel positiv, die kleinere negativ.

Ist q negativ und p positiv, so ist die grössere Wurzel negativ, die kleinere positiv.

Ist q positiv und p negativ, so sind beide Wurzeln positiv.

Ist q positiv und p positiv, so sind beide Wurzeln negativ. In den beiden letzteren Fällen ist vorausgesetzt, dass q nicht grösser als $\frac{1}{4}p^2$ ist, da sonst beide Wurzeln complexe Werthe erhalten.

4. Ist $x = w$ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so lässt sich das Polynom $ax^2 + bx + c$ derselben ohne Rest durch $x - w$ dividiren. Denn es muss in diesem Fall

$$aw^2 + bw + c = 0,$$

sein, und durch Subtraction der einander entsprechenden Seiten beider Gleichungen erhält man

$$a(x^2 - w^2) + b(x - w) = 0 \text{ oder } (x - w) \cdot [a(x + w) + b] = 0.$$

Das Gleiche ergiebt sich, wenn man die genannte Division nach § 14 ausführt; man erhält zum Quotienten $ax + aw + b$, zum Rest $aw^2 + bw + c$, und dieser Rest muss der Voraussetzung zufolge gleich Null sein.

Sind $x = w_1$, $x = w_2$ die beiden Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung, so muss demnach das Polynom derselben sowol durch $x - w_1$ als durch $x - w_2$ theilbar sein. Hieraus ergiebt sich, dass jene Gleichung in der Form

$$a(x - w_1)(x - w_2) = 0$$

geschrieben werden kann. Die Ausführung der Multiplication ergiebt hieraus

$$a(x^2 - (w_1 + w_2)x + w_1 w_2) = 0$$

und führt somit auf die schon oben bewiesenen Sätze über die Beziehungen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

Umgekehrt ist es selbstverständlich, dass jede Gleichung von der Form

$$a(x - w_1)(x - w_2) = 0$$

die beiden Wurzeln $x = w_1$, $x = w_2$ haben muss, denn ein Produkt kann nur dadurch gleich Null werden, dass einer seiner Faktoren gleich Null wird.

Allgemeiner wird jede Gleichung von der Form $k.(ax + b)\cdot(cx + d) = 0$ sowol durch $ax + b = 0$, als durch $cx + d = 0$ erfüllt, hat also die beiden Wurzeln $x = -\frac{b}{a}$ und $x = -\frac{d}{c}$. Es ist hiernach leicht, eine Gleichung zu bilden, welche zwei im Voraus gegebene Wurzeln hat. Sind w_1, w_2 diese Wurzeln, so ist $(x - w_1)(x - w_2) = 0$, oder $x^2 - (w_1 + w_2)x + w_1 w_2 = 0$ eine solche Gleichung.

Es geht ferner aus dem Vorstehenden hervor, dass die Aufgabe, eine gegebene quadratische Gleichung aufzulösen, als identisch betrachtet werden kann mit der Aufgabe, zwei Zahlen zu finden, deren Summe und deren Produkt gegeben ist, sowie auch als übereinstimmend mit der Aufgabe, einen Ausdruck von der Form $x^2 + px + q$ in zwei lineare Faktoren zu zerlegen.

§ 52. Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten.

Heis, § 73—76. Bardey XXVIII—XXX.

1. **Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten** kann durch Ordnen auf die Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

gebracht werden, und ist vollständig, wenn keiner, dagegen unvollständig, wenn einer oder mehrere der Coefficienten a, b, c, d, e, f gleich Null sind; doch dürfen selbstverständlich nicht a, b und c gleichzeitig gleich Null sein.

Verbindet man mit einer solchen Gleichung eine zweite

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0,$$

so kann man eine Unbekannte eliminiren, beispielsweise durch die Substitutionsmethode. Führt man dies aus, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass die geordnete Eliminationsgleichung im Allgemeinen eine solche vierten Grades sein wird.

Die allgemeine Auflösung von Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten kann daher erst nach der Erledigung der Auflösung der Gleichungen höherer Grade geschehen.

Es giebt jedoch zahlreiche besondere Fälle, in welchen sich die Auflösung wesentlich einfacher gestalten lässt, so dass dieselbe schon mit den bisher gewonnenen Hülfsmitteln ausgeführt werden kann. Wir führen im Folgenden die wichtigsten derartigen Fälle an:

a) Ist nur eine der beiden gegebenen Gleichungen mit zwei Unbekannten vom zweiten, dagegen die andere vom ersten Grad, so führt die Substitution aus der letzteren in die erstere stets auf eine Eliminationsgleichung zweiten Grades, und die Auflösung hat hiernach keine Schwierigkeit.

b) Zuweilen lassen sich die gegebenen Gleichungen dadurch auf einfachere, leichter auflösbare zurückführen, dass man statt der gesuchten Unbekannten zunächst andere, von denselben abhängige Ausdrücke als die Unbekannten behandelt und, nachdem diese berechnet, aus ihnen auch die Werthe der ursprünglichen Unbekannten ermittelt.

Es seien beispielsweise die Gleichungen

$$x^2 - y^2 + x + y = a,$$
$$x^2 - y^2 - x + y = b$$

aufzulösen, so kann man für $x^2 - y^2$ den Ausdruck $(x - y)(x + y)$ setzen und nun zunächst $x + y = \xi$, $x - y = \eta$ als die gesuchten Unbekannten betrachten. Die vorstehenden Gleichungen gehen hierdurch über in

$$\xi\eta + \xi = a$$
$$\xi\eta - \eta = b$$

Substituirt man dann den aus der ersten dieser Gleichungen für η resultirenden Ausdruck in die zweite, so erhält man eine quadratische Gleichung für ξ. Ist dieselbe aufgelöst und dann durch Substitution auch η berechnet, so findet man leicht $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $y = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.

Als zweites Beispiel mögen die Gleichungen

$$-x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x - 12y = 4$$
$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y = 53$$

dienen. Schreibt man die erste derselben in der Form:

$$-(x - 3y)^2 + 4(x - 3y) = 4,$$

so kann man $x - 3y = \xi$ als Unbekannte betrachten und erhält durch Auflösung der Gleichung

$$x - 3y = 2$$

Die Substitution von $x = 2 + 3y$ in die zweite gegebene Gleichung führt dann auf eine quadratische Eliminationsgleichung.

c) Durch Verbindung der gegebenen Gleichungen mit einander lassen sich neue Gleichungen ableiten. Jede der letzteren kann an Stelle einer der gegebenen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten benutzt werden. Gelingt es auf diese Weise eine der gegebenen Gleichungen oder beide durch einfachere zu ersetzen, so kann die Auflösung dadurch wesentlich erleichtert werden. Auch kann dieses Verfahren zuweilen mit dem unter b) angegebenen zugleich angewendet werden.

Es sei beispielsweise die Aufgabe gestellt, zwei Zahlen zu finden, von welchen die Summe der Quadrate und das Produkt gegeben sind. Man hat dann die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = a$$
$$x \cdot y = b.$$

Multiplicirt man die Seiten der zweiten Gleichung mit 2 und addirt, bezw. subtrahirt die entstehenden Ausdrücke von den entsprechenden Seiten der ersten Gleichung, so erhält man

$$(x + y)^2 = a + 2b; \; (x - y)^2 = a - 2b.$$

Hieraus erhält man durch Radiciren die Werthe von $x + y$ und $x + y$ und aus diesen auf bekannte Weise die von x und y.

Als zweites Beispiel seien die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = a$$
$$x + y = b$$

gegeben. Erhebt man die Seiten der zweiten in's Quadrat und subtrahirt dann die entsprechenden Seiten der ersten, so erhält man $2xy = b^2 - a$, und hieraus durch Verbindung mit der ersten Gleichung mittelst Subtraction

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2, \text{ also } x - y = \pm\sqrt{2a - b^2},$$

worauf das Weitere wieder bekannt ist.

Das hier eingeschlagene Verfahren, statt x und y zunächst $x + y$ und $x - y$ als Unbekannte zu betrachten, empfiehlt sich noch in vielen Fällen, namentlich wenn, wie vorher, eine dieser Grössen selbst gegeben ist. So lassen sich in ganz entsprechender Weise, wie die vorigen, die Gleichungen $x^2 + y^2 = a$, $x - y = b$ behandeln. Ist dagegen statt $x^2 + y^2$ die Differenz $x^2 - y^2$ gegeben, so setze man für dieselbe $(x - y)\,(x + y)$, und man erhält, wenn der Werth eines der beiden Faktoren durch die zweite Gleichung bestimmt ist, durch Division den Werth des anderen.

Als drittes Beispiel mögen die schon oben in anderer Weise behandelten Gleichungen

$$x^2 - y^2 + x + y = a$$
$$x^2 - y^2 - x + y = b$$

dienen. Durch Addition, resp. Subtraction der entsprechenden Seiten derselben erhält man die Gleichungen

$$2x^2 - 2y^2 + 2y = a + b$$
$$2x = a - b,$$

welche an Stelle der gegebenen gesetzt werden können. Die zweite derselben liefert unmittelbar x, worauf man durch Substitution in die erste eine quadratische Gleichung für y erhält.

d) Ist die durch Elimination entstehende Gleichung vierten Grades von der Form

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

so lässt sie sich als quadratische Gleichung für die Unbekannte x^2 behandeln. Ueberhaupt mag hier eingeschaltet werden, dass jede Gleichung von der Form

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

als quadratische Gleichung auf die Unbekannte x^n aufgelöst werden kann, worauf man durch Ausziehen der $n$ten Wurzel die Werthe von x erhält.

e) Die im Vorstehenden entwickelten Methoden lassen sich nicht selten in Verbindung mit einander anwenden und gestatten auch in vielen einfachen Fällen die Auflösung von Gleichungen, deren Grad den zweiten übersteigt.

Sind beispielsweise die Gleichungen

$$x^4 + y^4 = a$$
$$x + y = b$$

gegeben, von denen die erste vom vierten Grade ist, so erhält man durch Potenzirung beider Seiten der zweiten mit 4 und Subtraction derjenigen der ersten die neue Gleichung

$$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = b^4 - a,$$
$$\text{oder } xy(4x^2 + 6xy + 4y^2) = b^4 - a.$$

Aus der zweiten gegebenen Gleichung lässt sich ferner

$$4x^2 + 4y^2 = 4b^2 - 8xy$$

ableiten, und setzt man dies in die vorige ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für die Unbekannte xy. Aus den Werthen von $x + y$ und xy lassen sich dann x und y selbst finden.

Es seien ferner die Gleichungen

$$x + y + 3\sqrt{x + y} = 10$$
$$x^3 + y^3 = 28$$

gegeben. Betrachtet man in der ersten derselben $\sqrt{x + y}$ als Unbekannte z, so ergiebt die Gleichung $z^2 + 3z = 10$ zunächst $\sqrt{x + y} = + 2$ oder $- 5$, also

$$x + y = + 4 \text{ oder } + 25.$$

Dividirt man mit $x + y$ in $x^3 + y^3$, so ist der Quotient $x^2 - xy + y^2$, und da man ausserdem $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ kennt, so erhält man für $x + y = 4$ die Gleichungen

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 16$$
$$3xy = 9, \; xy = 3$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 7 - 3; \; x - y = \pm 2, \text{ u. s. w.}$$

2. Bei Gleichungen zweiten Grades mit drei oder mehr Unbekannten erhält man im Allgemeinen durch das Eliminationsverfahren Gleichungen von höheren Graden, über deren Auflösung auf spätere Untersuchungen verwiesen werden muss. Dass auch hier in besonderen Fällen Vereinfachungen stattfinden können, ist selbstverständlich.

Kapitel 8.
Gleichungen dritten und vierten Grades.

§ 53. Die Auflösung der Gleichungen dritten Grades. (Kubische Gleichungen.)

Heis, § 95a, 95b, 96. Bardey XXXVIII.

1. Jede geordnete Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten hat die Form

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

wobei jeder der Coefficienten B, C, D, nicht aber A, gleich Null sein kann. Durch Division mit A erhält dieselbe die Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Ist $c = 0$, so lässt sich auf der linken Seite dieser Gleichung der Faktor x absondern, und der Gleichung

$$x \cdot (x^2 + ax + b) = 0$$

wird sowol durch $x = 0$ als auch durch jede der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

genügt. Die Gleichung hat also drei Wurzeln, deren Berechnung keiner näheren Erörterung bedarf.

Ist c nicht gleich Null, aber sowol a als b gleich Null, so heisst die Gleichung eine **reine** kubische Gleichung. Schreiben wir dieselbe in der Form

$$x^3 - \alpha^3 = 0, \quad (2)$$

so sieht man leicht, dass $x^3 = \alpha^3$, also $x = \sqrt[3]{\alpha^3} = \alpha$ eine Wurzel derselben ist. Nun ist aber

$$\frac{x^3 - \alpha^3}{x - \alpha} = x^2 + \alpha x + \alpha^2,$$

die obige Gleichung (2) kann also in der Form

$$(x - \alpha)\ (x^2 + \alpha x + \alpha^2) = 0$$

geschrieben werden, und hieraus folgt, dass derselben nicht nur dadurch genügt werden kann, dass der eine Faktor $x - \alpha = 0$, also $x_1 = \alpha$ gesetzt wird, sondern auch dadurch, dass der andere Faktor $x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0$ wird. Diese letztere quadratische Gleichung liefert nun noch die beiden Wurzeln

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\,\alpha, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\,\alpha.$$

Jede reine kubische Gleichung hat also ebenfalls drei Wurzeln, von welchen eine reell ist und die beiden anderen imaginär sind.

Da die Aufgabe, die Gleichung $x^3 - \alpha^3 = 0$ aufzulösen, durchaus gleichbedeutend ist mit der Aufgabe, eine Zahl x zu bestimmen, deren dritte Potenz einer gegebenen Zahl α^3 gleich ist, so folgt aus dem Vorstehenden, dass jede Kubikwurzel aus einer Zahl im allgemeineren Sinne dreideutig ist. Von den drei Werthen der $\sqrt[3]{\alpha^3}$ ist einer reell, und dies ist derjenige, welcher in den früheren arithmetischen Untersuchungen ausschliesslich in Betracht kam, und welcher deshalb insbesondere als der arithmetische Werth der Wurzelgrösse bezeichnet werden kann. Die beiden anderen sind imaginär.

Insbesondere hat also die $\sqrt[3]{1}$ im allgemeineren Sinne die drei Werthe

$$1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

d. h. alle drei Ausdrücke haben die Eigenschaft, dass ihre dritte Potenz gleich 1 ist.

2. Ist in der allgemeinen Gleichung (1) der Coefficient a der zweiten Potenz der Unbekannten gleich Null, so heisst die Gleichung eine reducirte, ist keiner der Coefficienten gleich Null, so heisst sie eine vollständige.

Setzt man in der Gleichung (1) $x = y + \alpha$, so erhält man

$$y^3 + \left.\begin{matrix} 3\alpha \\ + a \end{matrix}\right| y^2 + \left.\begin{matrix} 3\alpha^2 \\ + 2a\alpha \\ + b \end{matrix}\right| y + \left.\begin{matrix} \alpha^3 \\ + a\alpha^2 \\ + b\alpha \\ + c \end{matrix}\right. = 0$$

Bestimmt man nun hier den Werth von α nachträglich so, dass

$$3\alpha + a = 0 \text{ ist, setzt also } \alpha = -\tfrac{1}{3}a,$$

so erhält man durch Substitution dieses Werthes von α auf jeden Fall eine reducirte Gleichung für die neue Unbekannte y.

Man kann also jede kubische Gleichung, welche nicht reducirt ist, auf eine reducirte zurückführen, und die Aufgabe der allgemeinen Auflösung kubischer Gleichungen kann daher als gelöst gelten, wenn es gelingt, jede reducirte kubische Gleichung auflösen zu können.

Die aus einer vollständigen kubischen Gleichung durch das vorstehende Verfahren entwickelte, oder auch unmittelbar gegebene reducirte kubische Gleichung möge durch

$$x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

dargestellt werden.

Setzt man hier $x = y + z$, wo y und z zwei neue Unbekannte bezeichnen, so erhält man

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0,$$

oder

$$y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + p(y+z) + q = 0,$$

oder

$$y^3 + z^3 + q + (3yz + p)(y+z) = 0.$$

Bestimmt man nun z so, dass

$$3yz + p = 0 \quad (4)$$

wird, so geht diese Gleichung über in

$$y^3 + z^3 + q = 0 \quad (5)$$

oder, wenn man hier den aus (4) für z resultirenden Werth

$$z = -\frac{p}{3y}$$

einsetzt,

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0,$$

oder

$$y^6 + qy^3 - \tfrac{1}{27}p^3 = 0.$$

Diese letztere Gleichung aber ist in Beziehung auf die Unbekannte y^3 vom zweiten Grade und führt durch Auflösung auf letztere zu

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Die Gleichung (5) liefert dann hierzu

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}.$$

Man hat also für y und z je eine reine kubische Gleichung und erhält durch Auflösen derselben, wie oben gezeigt, für jede dieser Unbekannten drei Werthe.

Setzen wir der Kürze halber die arithmetischen Werthe der betreffenden Wurzeln

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=\alpha, \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=\beta$$

(und beachten, dass das doppelte Vorzeichen vor der Quadratwurzel überflüssig ist, da die Werthe von y^3 und z^3 einander wechselweise gleich sein würden), so hat man

$$\begin{array}{ll} y_1=\alpha & z_1=\beta \\ y_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\,\alpha & z_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\,\beta \\ y_3=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\,\alpha & z_3=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\,\beta \end{array}$$

Da nun $x=y+z$, und man jeden der drei Werthe von y mit jedem der drei Werthe von z verbinden kann, so erhält man anscheinend für x neun Werthe. Von diesen sind jedoch zufolge der Gleichung (4) nur diejenigen gültig, deren Produkt den reellen Werth $-\frac{1}{3}p$ hat. Scheidet man alle übrigen aus, so behält man drei Wurzeln für die reducirte kubische Gleichung übrig, nämlich

$$x_1=y_1+z_1;\ x_2=y_2+z_3;\ x_3=y_3+z_2, \text{ oder}$$

$$x_1=\alpha+\beta;\ x_2=-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-3};\ x_3=-\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-3}.$$

Von diesen drei Formeln wird die erste, also in vollständiger Schreibweise die Formel

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

die Cardanische Formel genannt.

3. Ist hierbei $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ positiv, so sind die Quadratwurzeln reell und folglich muss auch x_1 reell werden, während x_2 und x_3 imaginäre Werthe erhalten. In diesem Falle hat also die kubische Gleichung stets eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Ist dagegen $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ negativ, so erscheinen alle drei Wurzeln unter complexer Form. Dieser Fall tritt ein, wenn p negativ und der absolute Werth von $\frac{1}{27}p^3$ grösser als $\frac{1}{4}q^2$ ist. Man darf jedoch hieraus nicht schliessen, dass die drei Wurzeln der Gleichung selbst imaginär seien, denn da die imaginäre Grösse unter jedem der beiden Kubikwurzelzeichen vorkommt, so ist es denkbar, dass die imaginären Bestandtheile sich gegenseitig aufheben.

In der That lässt sich zeigen, dass in dem vorliegenden Falle stets sämmtliche drei Wurzeln der Gleichung reell sind; da dies jedoch, sowie die Bestimmung der drei reellen Wurzelwerthe mit den bisherigen Hülfsmitteln der elementaren Arithmetik allein nicht ausführbar ist, so hat man diesen Fall den irreducibelen (casus irreducibilis) genannt.

Der Beweis der vorstehenden Behauptung und die Auflösung der kubischen Gleichungen für den irreducibelen Fall gelingen leicht mit Hülfe der Trigonometrie. Unter der Voraussetzung dass die betreffenden goniometrischen Lehren, welche später erörtert werden, vor diesem Paragraphen eingeschaltet gedacht sind, soll im Nachstehenden die goniometrische Behandlung des irreducibelen Falles auseinander gesetzt werden:

Da dieser Fall nur bei negativen Werthen von p eintreten kann, so soll die aufzulösende reducirte Gleichung in der Form

$$x^3-px\pm q=0$$

geschrieben werden, wobei p und q nur im absoluten Sinne genommen sind.

Setzt man nun hier

$$x = r \cdot \sin\varphi,$$

wo r und φ einstweilen unbekannt sind, so geht die Gleichung nach Division mit r^3 über in

$$\sin^3\varphi - \frac{p}{r^2}\sin\varphi \pm \frac{q}{r^3} = 0.$$

Vergleicht man hiermit die goniometrische Formel

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$

oder

$$\sin^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = 0,$$

so sieht man, dass beide Gleichungen identisch werden, wenn man r und φ so bestimmt, dass

$$\frac{p}{r^2} = \frac{3}{4}, \quad \pm\frac{q}{r^3} = \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

wird. Hieraus folgt

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}p},$$

wobei das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen wird, und

$$\sin 3\varphi = \pm\frac{4q}{r^3} = \pm\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$$

Da nun in dem irreducibelen Falle $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, also $4p^3 > 27q^2$ ist, so giebt es stets einen Winkel 3φ, dessen Sinus den vorstehenden Werth besitzt. Durch den Winkel 3φ erhält man auch den Winkel φ, und da r ebenfalls bestimmt ist, auch $x = r \cdot \sin\varphi$.

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass zu jedem gegebenen Sinus unendlich viele Winkel gehören. Es sei zunächst die Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

vorausgesetzt, so liefert die Gleichung

$$\sin 3\varphi = +\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}$$

zunächst für 3φ einen spitzen Winkel ϑ und ausserdem die Winkel

$$2R - \vartheta,\ 4R + \vartheta,\ 6R - \vartheta,\ 8R + \vartheta, \text{ u. s. w.}$$

und demnach erhält man für $x = r\sin\varphi$ anscheinend unendlich viele Werthe, nämlich

$$r\sin\tfrac{1}{3}\vartheta,\ r\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\vartheta),\ r\cdot\sin(120^\circ + \tfrac{1}{3}\vartheta),$$
$$r\cdot\sin(180^\circ - \tfrac{1}{3}\vartheta),\ r\sin(240^\circ + \tfrac{1}{3}\vartheta), \text{ u. s. w.}$$

Mit Hülfe der Formeln $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ findet man aber, dass $\sin(120^\circ + \frac{1}{3}\vartheta) = \sin(60^\circ - \frac{1}{3}\vartheta)$, $\sin(180^\circ - \frac{1}{3}\vartheta) = \sin\frac{1}{3}\vartheta$. u. s. w., und dass somit die obigen Werthe von x sich auf nur drei verschiedene, nämlich

$$r\cdot\sin\tfrac{1}{3}\vartheta,\ r\cdot\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\vartheta),$$
$$r\cdot\sin(240^\circ + \tfrac{1}{3}\vartheta) = -r\cdot\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}\vartheta)$$

reduciren.

Für die Gleichung $\quad x^3 - px - q = 0$

ergiebt sich dasselbe, nur ist

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}},$$

mithin kann man 3φ und φ als negative Winkel ansehen, und die drei Wurzeln sind den obigen drei bezüglich entgegengesetzt gleich.

Man hat also für den irreducibelen Fall folgende Aüflösung:

Für $$x^3 - px \pm q = 0$$

setze man $$r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p},\ \sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3},$$

so ist

$$x_1 = \pm r \cdot \sin\varphi,\ x_2 = \pm r \sin(60^\circ - \varphi),\ x_3 = \mp r \sin(60^\circ + \varphi)$$

Beispiel: $x^3 - 19x + 30 = 0$

$r = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$	$\log r = 0{,}70185$	$\log \sin\varphi = 9{,}59915$
$\sin 3\varphi = \frac{120}{r^3}$	$\log \sin 3\varphi = 9{,}97363$	$\log \sin(60^\circ - \varphi) = 9{,}77529$
	$3\varphi = 70^\circ\, 14',0$	$\log \sin(60^\circ + \varphi) = 9{,}99712$
	$\varphi = 23^\circ\, 24',7$	$\log x_1 = 0{,}30100$
	$60^\circ - \varphi = 36^\circ\, 35',3$	$\log x_2 = 0{,}47714$
	$60^\circ + \varphi = 83^\circ\, 24',7$	$\log x_3 = 0{,}69897\, n$
		$x_1 = 1{,}9999$
		$x_2 = 3{,}0001$
		$x_3 = -5{,}0000.$

Man hat also nahezu die drei Wurzeln: 2, 3, — 5 gefunden. Durch Substitution dieser letzteren Zahlen für x in die gegebene Gleichung überzeugt man sich, dass dieselben die genauen Wurzelwerthe sind. Die kleine Abweichung der vorher gefundenen Resultate rührt von der Ungenauigkeit der Rechnung mit den auf 5 Decimalen abgekürzten Logarithmen her.

4. Es ist leicht eine Gleichung dritten Grades zu bilden, welche drei gegebene Wurzeln a, b, c hat, denn man braucht zu diesem Zwecke nur

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

zu setzen und die linke Seite zu entwickeln. Es ergiebt sich dann, dass der Coefficient von x^2 gleich der Summe sämmtlicher den Wurzeln entgegengesetzt gleichen Zahlen, der Coefficient von x gleich der Summe sämmtlicher Produkte aus je zweien dieser Zahlen, endlich das Glied ohne x gleich dem Produkte aller drei Zahlen ist. Man kann auch aus den vorhergegangenen Entwicklungen zeigen, dass umgekehrt, wenn a, b, c die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C + 0$$

sind, stets
$$A = -(a + b + c)$$
$$B = ab + ac + bc$$
$$C = -abc$$

sein muss. Wir gehen hier auf derartige Entwicklungen nicht näher ein, da dieselben nur besondere Fälle allgemeiner Lehrsätze enthalten, welche mit letzteren abzuleiten und zu beweisen sind.

§ 54. Die Auflösung der Gleichungen vierten Grades. (Biquadratische Gleichungen.)

Heis, § 97, 98. Bardey XXXIX.

1. Jede geordnete Gleichung 4ten Grades mit einer Unbekannten hat die Form

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

und kann durch Division mit A auf die Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

gebracht werden. Ist $d = 0$, so hat man, entsprechend wie bei den Gleichungen

zweiten und dritten Grades, zunächst die Wurzel $x = 0$, und ausserdem ist die kubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

aufzulösen. Sind a, b und c gleichzeitig gleich Null, so hat man die reine biquadratische Gleichung

$$x^4 + d = 0,$$

für welche sich zunächst der arithmetische Wurzelwerth

$$x = \sqrt[4]{-d}$$

ergiebt, ausserdem aber durch Ausführung der Division in

$$\frac{x^4 + d}{x - \sqrt[4]{-d}}$$

eine Gleichung dritten Grades, welche zeigt, dass für jede vierte Wurzel aus einer Zahl im allgemeineren Sinne vier Werthe existiren.

Ist $a = 0$, so heisst die Gleichung wieder eine reducirte, und jede nicht reducirte biquadratische Gleichung lässt sich mittelst der Substitution $x = y + \alpha$ und nachherige geeignete Bestimmung von α durch eine reducirte ersetzen. Es ergiebt sich nämlich hierbei $\alpha = -\frac{1}{4}a$, was immer möglich ist.

Wir dürfen daher im Folgenden voraussetzen, dass die aufzulösende Gleichung eine reducirte sei und für dieselbe die Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (1)$$

annehmen.

Setzt man

$$x = u + v + w, \qquad (2)$$

so wird

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

$$[x^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w),$$

woraus man durch weitere Entwicklung leicht

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw \cdot x + [(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)] = 0$$

erhält. Diese Gleichung wird mit der obigen (1) identisch, wenn man

$$4(u^2 + v^2 + w^2) = -2p,$$
$$8uvw = -q,$$
$$16(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = p^2 - 4r$$

setzt. Man hat also nur aus diesen letzteren Gleichungen die Werthe von u, v, w zu bestimmen, um mittelst (2) auch x finden zu können. Setzt man zur Abkürzung

$$4u^2 = z_1, \; 4v^2 = z_2, \; 4w^2 = z_3,$$

so gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2p,$$
$$z_1 z_2 z_3 = +q^2$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = p^2 - 4r,$$

und aus dem am Schlusse des § 53 angegebenen Satze ergiebt sich, dass z_1, z_2, z_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \qquad (3)$$

sind. Hat man durch Auflösung dieser Gleichung die Werthe von z_1, z_2, z_3, gefunden, so ergiebt sich

$$u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{z_1}, \; v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{z_2}, \; w = \pm\frac{1}{2}\sqrt{z_3}.$$

Da man jeden der beiden Werthe von u mit jedem der Werthe von v und von w combiniren kann, so erhält man aus (2) anscheinend acht verschiedene

Werthe von x. Zufolge der Bedingung $8uvw = -q$ verringert sich jedoch diese Zahl auf vier, wie folgende Untersuchung zeigt:

Die drei Wurzeln z_1, z_2, z_3, der Gleichung (3) sind entweder sämmtlich reell, oder eine ist reell und die beiden andern sind imaginär. Die letzteren haben dann die Formen

$$z_2 = \xi + \eta\sqrt{-1}\,,\ z_3 = \xi - \eta\sqrt{-1},$$

und ihr Produkt $z_2 z_3 = \xi^2 + \eta^2$ ist stets positiv. Da nun $z_1 z_2 z_3 = q^2$ immer positiv sein muss, so folgt, dass unter allen Umständen eine der Wurzeln der Gleichung (3) reell und positiv ist. Als diese letztere Wurzel möge die mit z_1 bezeichnete angenommen werden.

Sind nun alle drei Wurzeln reell, so sind z_2 und z_3 entweder beide positiv, oder beide negativ. Die Betrachtung der hiernach möglichen Fälle ergiebt nun Folgendes:

a) Sind z_2 und z_3 positiv, so folgt aus $8uvw = -q$, dass für positives q unter den Grössen u, v, w entweder zwei positiv und eine negativ, oder dass alle drei negativ sein müssen, und dass daher nur die vier Combinationen

$$(4)\qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})\\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})\\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) \end{aligned}\right\}\quad \begin{gathered} z_2 > 0,\ z_3 > 0\\ q > 0 \end{gathered}$$

statthaft sind. Ist dagegen q negativ, so hat das Produkt uvw entweder einen positiven und zwei negative oder drei positive Faktoren, und man erhält:

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})\\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})\\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})\\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) \end{aligned}\right\}\quad \begin{gathered} z_2 > 0,\ z_3 > 0\\ q < 0 \end{gathered}$$

b) Sind z_2 und z_3 negativ, so kann man

$$v = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta_2}\cdot\sqrt{-1},\ w = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta_3}\cdot\sqrt{-1}$$

setzen, und es wird dann

$$8uvw = \pm\sqrt{z_1\zeta_2\zeta_3}\,(\sqrt{-1})^2 = \pm\sqrt{z_1\zeta_2\zeta_3}\,(-1).$$

Es erhält also dieses Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen, wie vorhin, und man hat daher für positives q die Formeln (5), für negatives die Formeln (4) zu nehmen; es gelten also (4) auch für

$$z_2 < 0, z_3 < 0, q < 0, \text{ und (5) für } z_2 < 0, z_3 < 0, q > 0.$$

c) Sind endlich z_2 und z_3 imaginär, so hat man

$$8uvw = \pm\sqrt{z_1(\xi + \eta\sqrt{-1}).(\xi - \eta\sqrt{-1})} = \pm\sqrt{z_1(\xi^2 + \eta^2)},$$

und hiernach besitzt das Produkt $8uvw$ dasselbe Vorzeichen, als wenn z_2 und z_3 positiv wären; es gelten also in diesem Falle dieselben Formeln, wie unter a).

2. Aus der vorstehenden Untersuchung geht noch hervor, dass alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung reell sind, wenn die Wurzeln der kubischen Hülfsgleichung (3) sämmtlich reell sind. Sind dagegen z_2 und z_3 negativ, also im obigen Falle b), so erhält man, wenn $z_2 = z_3$ ist, zwei einander gleiche reelle und zwei imaginäre Wurzeln, anderenfalls sind alle vier Wurzeln imaginär. Sind endlich z_2 und z_3, wie im Falle c), imaginär, so kann man, da nach § 42

$$(a \pm bi)^2 = (a \pm bi)(a \pm bi) = a^2 - b^2 \pm 2abi \text{ ist,}$$

wenn man $a^2 - b^2 = \xi$, $2ab = \eta$ setzt und diese Gleichungen auf a und b auflöst,

$$\sqrt{\xi \pm \eta \sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}} \cdot \sqrt{-1},$$

setzen, und die Anwendung dieser Umformung auf die betreffenden Auflösungsformeln ergiebt in diesem Falle zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Es sei beispielsweise die Gleichung

$$x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0$$

aufzulösen, so ist $p = -7$, $q = -12$, $r = +18$, also die Hülfsgleichung:

$$z^3 - 14z^2 - 23z - 144 = 0.$$

Die Auflösung der letzteren ergiebt

$$z_1 = 16,\ z_2 = -1 + \sqrt{-8},\ z_3 = -1 - \sqrt{-8}.$$

Da hier $\xi = -1$, $\eta = \sqrt{8}$ ist, so ergeben die vorstehenden Formeln

$$\sqrt{z_2} = 1 + \sqrt{-2},\ \sqrt{z_3} = 1 - \sqrt{-2},$$

und da q negativ ist, so sind weiterhin die Formeln (5) anzuwenden, und man erhält

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(+4 + 1 + \sqrt{-2} + 1 - \sqrt{-2}) = +3$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}(+4 - 1 - \sqrt{-2} - 1 + \sqrt{-2}) = +1$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}(-4 + 1 + \sqrt{-2} - 1 + \sqrt{-2}) = -2 + \sqrt{-2}$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2}(-4 - 1 - \sqrt{-2} + 1 - \sqrt{-2}) = -2 - \sqrt{-2}.$$

3. Die im Vorstehenden entwickelte Methode der Auflösung biquadratischer Gleichungen heisst die EULER'sche oder CARTESIUS'sche. Man hat ausserdem noch verschiedene andere Methoden entwickelt, unter denen die von AMPÈRE besonders bemerkenswerth ist. Man kann die Schluss-Formeln derselben aus den obigen EULER'schen ableiten, indem man z_2 und z_3 durch z_1 ausdrückt, wobei z_1 wieder die positive Wurzel der Hülfsgleichung bezeichnen soll. Löst man nämlich die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen

$$z_2 + z_3 = -2p - z_1,$$
$$\pm 2\sqrt{z_2 z_3} = \frac{2q}{\sqrt{z_1}},$$

wobei $\sqrt{z_1}$ im absoluten Sinn und demnach links das Zeichen + oder — gewählt werden soll, je nachdem q positiv oder negativ ist, auf $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ auf, so erhält man bei positivem q

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 + \frac{2q}{\sqrt{z_1}}},$$
$$\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 - \frac{2q}{\sqrt{z_1}}},$$

dagegen bei negativem q

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 - \frac{2q}{\sqrt{z_1}}},$$
$$\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} = \sqrt{-2p - z_1 + \frac{2q}{\sqrt{z_1}}}.$$

Setzt man das erste dieser Paare von Werthen in die Formelgruppe (4), das zweite in (5) ein, so werden beide Gruppen identisch. Man gewinnt also den Vortheil, dass die Unterscheidung positiver und negativer q nicht mehr nöthig ist, und dass man nur die eine positive Wurzel der Hülfsgleichung zu berechnen braucht, und hat so für alle Fälle, wenn man noch der Abkürzung halber

$\sqrt{z_1} = y$ setzt, die Formeln:

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{y \pm \sqrt{-y^2 - 2\left(p + \frac{q}{y}\right)}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{y \mp \sqrt{-y^2 - 2\left(p - \frac{q}{y}\right)}\right\}$$

Für das obige Beispiel hat man hiernach, da $y = 4$ war,

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{4 \pm \sqrt{4}\right\} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix}+3\\+1\end{matrix},$$

$$\left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}(4 \mp \sqrt{-8}) = -2 \pm \sqrt{-2}$$

Der Versuch, Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen, führt auf Hülfsgleichungen, welche schwieriger als die ursprüngliche sind, und es ist von verschiedenen Seiten bewiesen worden, dass es überhaupt unmöglich ist, für solche Gleichungen allgemeine algebraische Auflösungs-Formeln aufzustellen. In Betreff dieser Beweise selbst muss hier auf die eingehenderen Werke über die Lehre von den Gleichungen verwiesen werden. Dieselben gelten jedoch, wie bemerkt, nur für die allgemeinen Gleichungen, d. h. für den Fall, dass für die — in Buchstaben angegebenen — Coefficienten keine besonderen Annahmen oder Bestimmungen gemacht sind, und dass dieselben also auch von einander in keiner Weise abhängen. Dagegen kann die Auflösung auch höherer Gleichungen in speciellen Fällen wol gelingen. Die Behandlung solcher Fälle und namentlich die Auflösung numerischer Gleichungen höherer Grade wird jedoch zweckmässig an einer späteren Stelle gelehrt werden.

Anhang 3.
Die Proportionen.
Heis § 31, 32.

§ 55. Begriff und einfachste Umformungen der Proportionen.

1. Eine besondere Art von Gleichungen, welche in den Anwendungen besonders häufig vorkommen, sind die Verhältniss-Gleichungen oder Proportionen.

Unter einem Verhältniss versteht man nach § 8 den Quotienten zweier gleichartiger Grössen. Diese letzteren heissen die Glieder des Verhältnisses (Vorderglied und Hinterglied). Da für einen Quotienten die allgemeinen Gesetze der Division gelten, so folgt, dass der Werth eines Verhältnisses (von Manchen auch der Exponent desselben genannt) sich nicht ändert, wenn beide Glieder mit derselben unbenannten Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt werden. Zu jedem gegebenen Verhältniss lassen sich hiernach unendlich viele ihm gleiche Verhältnisse bilden. Jedes Verhältniss rationaler Zahlen lässt sich durch ein gleiches Verhältniss ganzer Zahlen darstellen, welche relative Primzahlen sind.

Eine Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen. So sind z. B.

$$15^m : 3^m = 10^m : 2^m; \quad 8^{cm} : 4^{cm} = 6 \text{ Mark} : 3 \text{ Mark};$$
$$9 : 7 = 4\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{2}; \quad a : b = c : d$$

Proportionen. In einer solchen sind die Glieder eines jeden einzelnen Verhältnisses entweder gleichbenannt, oder beide unbenannt; die Glieder des einen Verhältnisses brauchen nicht mit denen des anderen gleichbenannt zu sein.

In jeder Proportion $a : b = c : d$ heissen a und d die äusseren, b und c die inneren Glieder.

2. Ist $a:b=c:d$, und multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit bd (schafft also die Divisoren aus derselben), so erhält man

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Hierbei sind unter a, b, c, d, oder doch unter den Gliedern eines einzelnen der beiden Verhältnisse, falls dieselben benannt waren, die betreffenden unbenannten Maasszahlen zu verstehen. Aus

$$15^m : 3^m = 10^m : 2^m$$

folgt also beispielsweise $15 \cdot 2 = 3 \cdot 10$ oder $15^m \cdot 2 = 3^m \cdot 10$ oder $2^m \cdot 15 = 10^m \cdot 3$.

Unter der somit gemachten Voraussetzung, welche auch für entsprechende Fälle im Folgenden ein- für allemal festgesetzt sein soll, gilt also der Satz:

Das Produkt der äusseren Glieder einer jeden Proportion ist gleich dem Produkt der inneren.

Die Gleichung $a:b=c:d$ oder die aus ihr abgeleitete $ad=bc$ kann als Bestimmungsgleichung für jedes der vier Glieder als Unbekannte dienen. Durch Auflösen derselben ergiebt sich: Jedes innere Glied ist gleich dem Produkt der beiden äusseren, dividirt durch das andere innere, und jedes äussere Glied ist gleich dem Produkt der beiden inneren, dividirt durch das andere äussere.

Dieser Satz findet Anwendung zur Auflösung der meisten Aufgaben des bürgerlichen Rechnens (Zweisatz- oder Regel de Tri-Rechnung, Zinsrechnung u. s. w.) So verhalten sich z. B. die Preise gleichartiger Waaren-Mengen wie deren Gewichte oder wie deren Volumina, die Zinsen eines Kapitals bei demselben Procentsatz wie die Anzahl der Jahre, u. dgl. m.

Aus dem angeführten Satze folgt ferner: Stimmen zwei Proportionen in je drei gleichstelligen Gliedern mit einander überein, so sind auch ihre vierten Glieder einander gleich, oder ist

$$a:b=c:x, \text{ und } a:b=c:y, \text{ so ist auch } x=y.$$

3. Aus jeder Gleichung zwischen zwei Produkten lässt sich umgekehrt eine richtige Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu inneren, die des anderen zu äusseren Gliedern macht, denn ist $ad=bc$, so folgt durch Division beider Seiten mit bd, dass auch $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ oder $a:b=c:d$ ist.

Eine Proportion ist also richtig, wenn das Produkt der äusseren Glieder derselben gleich dem Produkt der inneren ist.

Daher kann man aus jeder Proportion andere richtige Proportionen durch Umstellung ihrer Glieder ableiten, wenn man dabei nur dafür sorgt, dass die äusseren Glieder beide äussere bleiben oder beide innere werden. Bildet man nach dieser Regel alle möglichen Umstellungen der Glieder, so erhält man statt einer gegebenen Proportion im Ganzen acht Proportionen, nämlich

1) $a:b=c:d$	5) $b:a=d:c$
2) $a:c=b:d$	6) $b:d=a:c$
3) $d:b=c:a$	7) $c:a=d:b$
4) $d:c=b:a$	8) $c:d=a:b$.

Von diesen acht Proportionen entsteht die 8te aus der 1ten, die 6te aus der 2ten, die 7te. aus der 3ten und die 5te aus der 4ten durch blosse Vertauschung der beiden Seiten der Gleichung. Von den übrig bleibenden entsteht die vierte aus der ersten und die dritte aus der zweiten durch Vertauschung der Seiten und gleichzeitige Umkehrung beider Verhältnisse. Von besonderer Bedeutung unter den Umstellungen der ersten Proportion ist daher nur die zweite, welche sich in

dem Satze aussprechen lässt: Die Vorderglieder einer Proportion verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Hinterglieder.

Es mag auch hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass dieser Satz nicht ohne Weiteres auf Proportionen zwischen benannten Zahlen angewendet werden kann, sondern dass dabei die etwaige Verschiedenheit der Benennungen zu berücksichtigen ist. So kann beispielsweise aus 3 Kgr. : 7 Kgr. = 6 M. : 14 M. nicht gefolgert werden, 3 Kgr. : 6 M. = 7 Kgr. : 14 M., sondern nur $3:6=7:14$, oder etwa 3 Kgr. : 6 Kgr. = 7 M. : 14 M., denn ein Verhältniss, wie 3 Kgr. : 6 M. hat keinen Sinn, da unmöglich gefragt werden kann, wie oft 6 Mark in 3 Kilogramm enthalten seien.

Die vorstehend erörterte Möglichkeit der Umstellung der Glieder einer Proportion gestattet immer, wenn ein unbekanntes Glied einer Proportion gesucht wird, die letztere so zu schreiben, dass die gesuchte Unbekannte das vierte Glied ist. Aus der — übrigens nicht nothwendigen — Annahme einer solchen gleichmässigen Schreibweise ist die Bezeichnung «vierte geometrische Proportionale zu drei gegebenen Zahlen» hervorgegangen. Die vierte geometrische Proportionale zu a, b und c ist also die Grösse x in der Proportion $a:b=c:x$, und es ist nach dem Vorigen

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Umgekehrt, ist $x=\frac{bc}{a}$, so ist x die vierte geometrische Proportionale zu a, b und c. Sind dabei b und c einander gleich, so nennt man auch x die dritte geometrische Proportionale zu a und b. Unter derselben versteht man also die Grösse x in der Proportion $a:b=b:x$.

4. Sind die beiden inneren, oder sind die beiden äusseren Glieder einer Proportion einander gleich, so heisst die letztere eine stetige Proportion, und das gleiche Glied heisst die mittlere geometrische Proportionale oder kürzer das geometrische Mittel zwischen den beiden anderen. Ist also x das geometrische Mittel zwischen a und b, so ist

$$a:x=x:b \text{ oder } x^2=a\cdot b \text{ oder } x=\sqrt{ab}.$$

Die Bezeichnungen «geometrische» Proportion, geometrisches Mittel u. s. w. rühren von der früher üblichen Unterscheidung zweier Arten von Verhältnissen und Proportionen her, welche man arithmetische und geometrische nannte. Während man bei den im Vorigen behandelten geometrischen Verhältnissen zur Vergleichung zweier Zahlen fragt, wie oft die eine in der anderen enthalten, oder wie vielemal die letztere grösser als jene sei, fragt man bei einem arithmetischen Verhältniss, um wie viel die eine Zahl grösser als die andere sei. Während also eine geometrische Proportion eine Gleichung zwischen zwei Quotienten ist, hat man unter einer arithmetischen Proportion eine Gleichung zwischen zwei Differenzen zu verstehen, wie z. B. $a-b=c-d$. Ist eine solche stetig, ist also z. B. $a-x=x-d$, so heisst das gleiche Glied x die mittlere arithmetische Proportionale, oder kürzer das arithmetische Mittel zwischen den beiden anderen. Es ist dann $2x=a+d$, oder $x=\frac{a+d}{2}$. Allgemeiner versteht man unter dem arithmetischen Mittel beliebig vieler Zahlen diejenige Zahl, welche man erhält, wenn man die Summe der ersteren durch ihre Anzahl dividirt. — Im Folgenden wird, wie vorher, von den arithmetischen Proportionen abgesehen und unter einer Proportion schlechthin stets eine geometrische verstanden.

§ 56. Abgeleitete und zusammengesetzte Proportionen.

1. Aus einer gegebenen Proportion lassen sich andere Proportionen ableiten, indem man mit beiden Seiten gleiche Veränderungen vornimmt. So folgt aus

$$a : b = c : d,$$

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1, \text{ oder } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \text{ oder}$$

$$(a + b) : b = (c + d) : d \text{ und } (a - b) : b = (c - d) : d.$$

Verfährt man ebenso mit $b : a = d : c$, so erhält man

$$(a + b) : a = (c + d) : c \text{ und } (a - b) : a = (c - d) : c.$$

Daher ist auch
$$(a + b) : (c + d) = a : c = b : d,$$
$$(a - b) : (c - d) = a : c = b : d, \text{ mithin auch}$$
$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d), \text{ und}$$
$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Leitet man aus der gegebenen Proportion zunächst die andere

$$a : c = b : d$$

ab, so erhält man aus dieser in entsprechender Weise

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b, \text{ u. s. w.}$$

2. Werden mehr als zwei Verhältnisse einander gleich gesetzt, so erhält man eine sogenannte fortlaufende Proportion, wie z. B.

$$a : A = b : B = c : C = d : D = \ldots,$$

welche sich auch in der Form

$$a : b : c : d : \ldots = A : B : C : D : \ldots$$

schreiben lässt. Hier verhalten sich jede zwei beliebige Glieder der einen Seite zu einander, wie die gleichstelligen Glieder der andern Seite.

Gilt die fortlaufende Proportion

$$a : A = b : B = c : C = d : D = \ldots,$$

so ist auch

$$(a\alpha \pm b\beta \pm c\gamma \pm d\delta \ldots) : (A\alpha \pm B\beta + C\gamma \pm D\delta \ldots) = a : A = b : B, \text{ u. s. w.,}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ beliebige Coefficienten sind, und in beiden Gliedern des Verhältnisses an gleichen Stellen dasselbe Zeichen zu nehmen ist. Bezeichnet nämlich q den Werth der sämmtlichen Quotienten $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$ u. s. w., ist also $a = Aq$, $b = Bq$ u. s. w., so ist

$$\frac{a\alpha \pm b\beta \pm c\gamma \pm d\delta}{A\alpha \pm B\beta \pm C\gamma \pm D\delta} = \frac{Aq\,\alpha \pm Bq\beta \pm Cq\gamma \pm Dq\delta}{A\alpha \pm B\beta \pm C\gamma \pm D\delta} = q \cdot \frac{A\alpha \pm B\beta \pm C\gamma \pm D\delta}{A\alpha \pm B\beta \pm C\gamma \pm D\delta} = q.$$

Insbesondere ist daher auch

$$(a \pm b \pm c \pm d \ldots) : (A \pm B \pm C \pm D \ldots) = a : A, \text{ u. s. w.}$$

3. Sind ferner zwei oder mehrere Proportionen

$$a : b = c : d, \; A : B = C : D$$

gegeben, so lässt sich aus ihnen eine neue Proportion durch Multiplication, und ebenso auch durch Division der gleichstelligen Glieder ableiten. Denn da Gleiches mit Gleichem multiplicirt, und ebenso Gleiches durch Gleiches dividirt, wieder Gleiches giebt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

dass auch $\frac{a}{b} \cdot \frac{A}{B} = \frac{c}{d} \cdot \frac{C}{D}$ und $\frac{a}{b} : \frac{A}{B} = \frac{c}{d} : \frac{C}{D}$, oder

$$aA : bB = cC : dD \text{ und } \frac{a}{A} : \frac{b}{B} = \frac{c}{C} : \frac{d}{D}$$

ist. Eine Proportion, welche aus zwei oder mehreren anderen Proportionen durch Multiplication der gleichstelligen Glieder abgeleitet werden kann, heisst aus diesen letzteren Proportionen **zusammengesetzt**.

Insbesondere können die Proportionen, aus welchen eine andre zusammengesetzt wird, auch einander gleich sein; aus $a:b=c:d$ folgt also

$$a^2:b^2=c^2:d^2;\quad a^3:b^3=c^3:d^3,\ \text{u. s. w.}$$

4. Wenn in einer Reihe von Verhältnissen jedesmal das zweite Glied des einen gleich dem ersten Gliede des nächstfolgenden ist, wie z. B. in $a:b, b:c, c:d..$, so sagt man, dass diese Verhältnisse eine **Kette** bilden.

Bilden die ersten Verhältnisse einer Anzahl gegebener Proportionen eine Kette, ist also z. B.

$$\begin{aligned} a:b&=m:n\\ b:c&=p:q\\ c:d&=r:s\\ d:e&=t:u,\ \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

und bildet man die aus diesen Proportionen zusammengesetzte Proportion, so erhält man nach Streichung der gleichen Faktoren in den Gliedern des ersten Verhältnisses

$$a:e=mprt:nqsu.$$

Man sagt in diesem Fall, das Verhältniss $a:e$ sei aus den Verhältnissen $m:n$, $p:q$, $r:s$, $t:u$ zusammengesetzt.

Ist hierbei $a:b=m:n$, $b:c=m:n$, $c:d=m:n$, u. s. w., so erhält man $a:c=m^2:n^2$, $a:d=m^3:n^3$, u. s. w. Man sagt in diesem Falle, a stehe zu c im **quadratischen**, a zu d im **kubischen Verhältniss** von m zu n.

Bilden auch die zweiten Verhältnisse eine Kette, ist also z. B.

$$\begin{aligned} a:b&=m:n\\ b:c&=n:p\\ c:d&=p:q,\ \text{u. s. w.,}\end{aligned}$$

so ist $a:c=m:p$, $a:d=m:q$, u. s. w.

Die vorstehenden Sätze über zusammengesetzte Proportionen können u. A. angewendet werden bei der sogenannten Kettenrechnung und der zusammengesetzten Regel de Tri.

5. Wenn in einem Verhältnisse die beiden Glieder mit einander vertauscht werden, so sagt man, das Verhältniss werde **umgekehrt**. So ist z. B. $b:a$ die Umkehrung von $a:b$, $8:4$ die Umkehrung von $4:8$. Ist das Verhältniss zweier Zahlen a, b gleich dem umgekehrten Verhältniss zweier anderen c, d, so sagt man, dass die ersteren sich zu einander umgekehrt wie die letzteren verhalten. Ist dies der Fall, ist also $a:b=d:c$, so kann man auch setzen

$$a:b=\frac{1}{c}:\frac{1}{d},$$

denn das letztere Verhältniss verwandelt sich durch Erweiterung mit cd in das gleiche $d:c$. **Das umgekehrte Verhältniss zweier Zahlen ist also gleich dem Verhältniss der reciproken Werthe dieser Zahlen**, (d. h. der durch Division der letzteren in 1 erhaltenen Zahlen).

Zwei Grössen a, b stehen also zu einander im umgekehrten Verhältniss der Quadrate zweier anderen c, d, wenn

$$a:b=d^2:c^2,\quad \text{oder}\quad a:b=\frac{1}{c^2}:\frac{1}{d^2}$$

ist.

Die umgekehrten Verhältnisse finden u. A. Anwendung in der sogenannten umgekehrten Regel de Tri.

Anhang 4.
Exponentialgleichungen.
§ 57.

Den bisher behandelten Bestimmungsgleichungen lässt sich eine Gruppe transscendenter Gleichungen anschliessen, welche die Unbekannten in Potenz- oder Wurzelexponenten enthalten und dadurch auf algebraische Formen gebracht werden können, dass man jedesmal von beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen (für irgend eine Basis) nimmt.

Die Aufgabe, die Gleichung $a^x = b$ auf x aufzulösen, ist nach § 44 durchaus identisch mit der Aufgabe, den Logarithmus von b für die Basis a zu bestimmen, und kann auch mittelst der Logarithmen eines jeden anderen Systems gelöst werden, indem man

$$x \cdot {}^c log\, a = {}^c log\, b, \text{ also } x = {}^c log\, b : {}^c log\, a$$

erhält.

In ähnlicher Weise erhält man z. B. für

$$\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} = a^{-4,5}$$

die Auflösung: $\frac{3-4x}{2} log\, a - \frac{6-7x}{5} log\, a = -4,5\, log\, a$, also

$$\frac{3-4x}{2} - \frac{6-7x}{5} = -\frac{9}{2},$$

woraus $x = 8$ folgt.

Für $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{1,37129}$ (Heis, § 61, No. 149) erhält man

$$\frac{1}{10} log\, 10 = \frac{1}{x} log\, 1,37129,$$

also für das briggische System

$$x = 10 \cdot log\, 1,37129 = 1,37129.$$

Als drittes Beispiel mögen die Gleichungen (Heis, § 65, No. 125) dienen.

$$\sqrt[x]{64} \cdot 3^y = 36$$
$$\sqrt[x]{1728} \cdot 5^y = 300$$

Man erhält $\frac{1}{x} log\, 64 + y \cdot log\, 3 = log\, 36$

$$\frac{1}{x} log\, 1728 + y \cdot log\, 5 = log\, 300.$$

Eliminirt man y, so erhält man

$$x = \frac{log\, 64 \cdot log\, 5 - log\, 1728 \cdot log\, 3}{log\, 36 \cdot log\, 5 - log\, 300 \cdot log\, 3} = 3.$$

Dann ist $3^y = 36 : \sqrt[3]{64} = 36 : 4 = 9$; $y = log\, 9 : log\, 3 = 2$.

Heis § 61, No. 126—156, § 66, No. 114—130, § 69, No. 137—153.
Bardey XXII, XXIVC.

III. Abschnitt.

Elemente der Combinatorik, der Theorie der Reihen, u. s. w.

Kapitel 9.

Die Elemente der Combinationslehre.

Heis § 88—90, Bardey XXXV.

§ 58. Grundbegriffe.

Die Combinationslehre hat zum Gegenstand die Gesetze der Zusammenstellungen gegebener Dinge in bestimmten Ordnungsweisen. Fragt man z. B. auf wieviele verschiedene Arten (Reihenfolgen) zehn Personen an einem Tische sitzen können, so hat man eine Aufgabe der Combinationslehre. Die zusammenzustellenden Dinge nennt man Elemente und bezeichnet dieselben gewöhnlich durch Buchstaben oder Ziffern. Der Werth oder die Bedeutung derselben bleibt dabei unberücksichtigt, und nur die verschiedene Stellung oder Auswahl kommt in Betracht. Jede einzelne Zusammenstellung der Elemente heisst eine Complexion.

Man unterscheidet verschiedene Arten solcher Zusammenstellungsweisen, welche wir zunächst durch ein Beispiel erläutern wollen: Eine Gesellschaft bestehe aus zwölf Mitgliedern, die Namen derselben sollen in einer Liste verzeichnet werden. Dies kann in sehr vielen verschiedenen Reihenfolgen geschehen, und jede derartige Zusammenstellung aller zwölf Namen heisst eine Permutation derselben. Sollen dagegen die zwölf Mitglieder aus ihrer Mitte drei Personen als Deputirte wählen, werden also auf verschiedene Weisen drei Namen ausgewählt und zusammengestellt, so heisst jede solche Zusammenstellung eine Combination der zwölf Elemente, und zwar eine solche zur dritten Klasse. Sollen endlich dabei die drei Personen verschiedene Funktionen übernehmen, wie beispielsweise wenn bei einer Vorstandswahl die zuerst benannte Person die Stelle des Vorsitzenden, die zweite die Stelle des Schriftführers und die dritte die Stelle des Cassirers bekleiden soll, kommt also nicht bloss die Auswahl der drei Elemente, sondern auch ihre Aufeinanderfolge in Betracht, so heissen die gebildeten Complexionen Variationen der zwölf Elemente zur dritten Klasse.

In jedem derartigen Falle entsteht die Aufgabe, ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle verlangten Complexionen in einer geordneten Reihenfolge aufstellen kann, ohne dass eine Gefahr des Auslassens oder der Wiederholung einzelner stattfinde. Da ferner häufig nicht jede einzelne Complexion selbst, sondern nur die Anzahl derselben verlangt wird, so sind Formeln abzuleiten, welche die Berechnung dieser Anzahl ermöglichen, ohne dass die Aufstellung und Abzählung der einzelnen Complexionen selbst nöthig ist.

Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, eine bestimmte Reihenfolge der Elemente als die ursprüngliche, gegebene anzunehmen und für dieselbe bei der Bezeichnung durch Zahlen oder Buchstaben die natürliche, bezw. die alphabetische Reihenfolge derselben zu wählen. Hierbei nennt man jedes Element, welches in dieser ursprünglichen Reihenfolge später steht als ein anderes, in Beziehung auf dieses das höhere.

§ 59. Vom Permutiren.

1. Permutationen gegebener Elemente sind Zusammenstellungen, welche sämmtliche Elemente in verschiedenen Reihenfolgen enthalten. Die Permutationen

von a, b z. B. sind ab und ba, die Permutationen von 1, 2, 3 sind 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Um die Permutationen gegebener Elemente in geordneter Reihenfolge zu bilden, lasse man jedes der n Elemente nach einander einmal die erste Stelle einnehmen, gehe jedoch niemals zum folgenden Element bei der Besetzung dieser ersten Stelle über, ehe alle auf dieselbe noch folgenden Elemente auf jede mögliche Weise versetzt worden sind. Man erhält also n Gruppen von Permutationen, die Permutationen der ersten Gruppe fangen sämmtlich mit dem ersten, die der zweiten Gruppe sämmtlich mit dem zweiten Elemente an, u. s. w. Innerhalb jeder Gruppe besetze man nun wieder die zweite Stelle nach und nach mit jedem der $n - 1$ übrigen Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge, lasse in jeder dieser $n - 1$ Untergruppen jedesmal an dritter Stelle jedes der $n - 2$ noch übrigen Elemente der Reihe nach folgen, und fahre so fort bis zur letzten Stelle.

So sind also z. B. die Permutationen von $abcd$ in dieser Ordnung

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

Die erste Permutation enthält also die Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge; jede folgende wird aus der vorhergehenden erhalten, indem man in dieser das erste Element, von rechts nach links gerechnet, welches niedriger ist, als ein folgendes durch das nächst höhere der auf dasselbe rechts folgenden ersetzt, dann die noch übrigen rechts stehenden Elemente nach ihrer natürlichen Reihenfolge ordnet, während die links stehenden unverändert bleiben.

Um beispielsweise die auf 1432765 folgende Permutation zu erhalten, hat man die 2 durch die 5 zu ersetzen und dann die Elemente 2, 7, 6 in ihrer natürlichen Reihenfolge anzuschliessen, während die vorhergehenden 1 4 3 ihre Stellungen behalten. Die gesuchte Permutation ist also 1435267.

2. Das obige Bildungsgesetz zeigt zugleich, dass die Anzahl der Permutationen von n Elementen n mal so gross ist, als diejenige der Permutationen von $n - 1$ Elementen, denn jedes der n Elemente kann die erste Stelle so oft einnehmen, als die jedesmal übrigen $n - 1$ Elemente nach ihm Permutationen unter sich gestatten. Da nun ein Element nur eine einzige Stellung haben kann, so erhält man für 2 Elemente $1 \cdot 2$, für drei Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3$, und so fort, für n Elemente

$$Pn = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n - 1) \cdot n$$

Permutationen. Man schreibt diesen Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ auch kürzer $n!$ und liest denselben »n Fakultät« oder »Faktorielle n«.

Wenn also beispielsweise zehn Personen an einem Mittagstische mit dem Wirthe verabreden, demselben die Bezahlung schuldig zu bleiben, bis sie auf jede mögliche Art einmal die zehn Plätze besetzt haben, so muss der Wirth $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$ Tage oder über 9935 Jahre creditiren. Um ferner die dreizehn Karten einer Farbe eines Kartenspiels auf alle möglichen Arten neben einander zu legen, hat man 6227020800 Versetzungen zu machen, wozu man, wenn in jeder Minute zehn verschiedene Permutationen gebildet würden, bei einer täglichen Arbeitszeit von zwölf Stunden, mehr als 2367 Jahre nöthig haben würde.

Die Anzahl der Permutationen wächst mit der Anzahl der Elemente in sehr

beschleunigter Weise, und schon bei verhältnissmässig geringen Werthen von n ist die wirkliche Aufstellung derselben unmöglich.

3. Bei den vorstehenden Entwicklungen ist jedoch stillschweigend vorausgesetzt worden, dass alle n Elemente von einander verschieden seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die Anzahl der Permutationen geringer. Denkt man sich nämlich sämmtliche $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet, und dann p von diesen Elementen einander gleich werdend, so wird jede einzelne der bisherigen Permutationen mit allen denjenigen identisch, welche sich vorher von ihr nur durch andere Stellungen der gleich gewordenen Elemente unterschieden. Es kommt daher jetzt jede Permutation so oft vor, als p Elemente unter sich Permutationen gestatten, und es ist daher $n!$ das $p!$fache der Anzahl der noch von einander verschiedenen Permutationen, diese Anzahl selbst also gleich

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots p} = \frac{n!}{p!} = (p+1)(p+2) \ldots n.$$

Sind ausser p gleichen Elementen einer Art noch q gleiche einer anderen Art vorhanden, so ergiebt die gleiche Schlussweise für die Anzahl der verschiedenen Permutationen $\frac{n!}{p! \cdot q!}$. Sind noch r gleiche Elemente einer dritten Art vorhanden, so ist diese Anzahl gleich $\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$ u. s. w. Sind unter den n Elementen m einander gleich und die übrigen $n-m$ ebenfalls unter einander gleich, so erhält man für jene Anzahl

$$\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$

für welchen Ausdruck man das Zeichen $\binom{n}{m}$, gelesen »n tief m« eingeführt hat. Derselbe Ausdruck ergiebt sich, wenn man mit $m!$ hebt, gleich

$$\frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{1 \cdot 2 \ldots (n-m)}, \text{ sodass also } \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \text{ ist.}$$

Beispielsweise gestatten die Buchstaben des Wortes *Otto* nur $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$ oder 6 Permutationen, nämlich

Otto, Otot, Oott, Toto, Toot, Ttoo.

Das Bildungsgesetz derselben ist unverändert, wie oben.

4. Es entsteht ferner die Aufgabe, von den Permutationen gegebener Elemente eine durch Angabe ihrer Stellenzahl bestimmte zu finden, ohne dass man nöthig hat, die vorhergehenden Permutationen aufzustellen. Es wird genügen, das hierzu dienliche Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern. Es werde zu diesem Zwecke die 265te Permutation von *darius* verlangt. Da hier 6 Elemente permutirt werden, so giebt es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Permutationen, welche mit d, ebensoviele, welche mit a beginnen, u. s. w. Da nun die Division von 265 durch 120 den Quotienten 2 und den Rest 25 ergiebt, so gehen der verlangten Permutation zwei jener Gruppen von je 120 Permutationen, also die mit d und die mit a beginnenden voraus, und sie selbst ist die 25te der dritten Gruppe und beginnt also mit r. Nach Streichung dieses Buchstabens bleibt die Frage, welches die 25te Permutation von *daius* sei, welche in derselben Weise wie vorher behandelt wird. Man hat jetzt je nach dem Anfangselement fünf Gruppen von je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Elementen, es geht also der gesuchten Permutation eine

solche Gruppe voraus, und sie selbst ist die erste der zweiten Gruppe. Mithin ist nun *a* als zweites Element nach dem obigen *r* bestimmt, und es ist die erste Permutation der noch übrigen Elemente *dius* zu bestimmen. So ergiebt sich, dass die gesuchte Permutation *radius* ist.

Es sei ferner die 11186te Permutation der 8 Elemente *a e g m n r s u* zu bestimmen. Nach dem vorstehend entwickelten Verfahren rechnet man wie folgt: $11186 : 7! = 11186 : 5040 = 2$, Rest 1106; die Permutation beginnt mit dem dritten Buchstaben *g*. Nach Streichung desselben hat man noch die Elemente *a e m n r s u*, und es ist $1106 : 6! = 1106 : 720 = 1$, Rest 386; es folgt also der zweite Buchstabe *e*, welcher wieder gestrichen wird. Dann ist $386 : 120 = 3$, Rest 26, also das folgende Element *r*; ferner $26 : 24 = 1$, Rest 2, also *m*; $2 : 6 = 0$, also *a*; $2 : 2 = 1$, Rest 0, mithin ist jetzt die letzte, d. i. zweite Permutation der ersten Gruppe für *n s u*, also *n u s* zu setzen, und die gesuchte Permutation ist *germanus*.

Kommen unter den *n* gegebenen Elementen gleiche vor, so ist das Verfahren entsprechend abzuändern, indem man berücksichtigt, dass nicht für alle Gruppen einer Art die Anzahl der Permutationen dieselbe ist. Um z. B. die 1252te Permutation von *aabbbcccc* zu bilden, beachte man, dass man zunächst $\frac{8!}{3!\,4!} = 280$ mit *a* beginnende Permutationen hat, nach deren Abrechnung man noch die 972te der folgenden suchen muss. Dagegen giebt es $\frac{8!}{2!\,2!\,4!} = 420$ mit *b* beginnende, und nach Abrechnung derselben ist noch die 552te der folgenden, also der mit *c* beginnenden Permutationen zu ermitteln. Nach Streichung eines *c* hat man $\frac{7!}{3!\,3!} = 140$ mit *a* beginnende Permutationen abzuziehen, dann von den 412 folgenden $\frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$ mit *b* beginnende, so dass nach Streichung eines weiteren *c* die 202te Permutation der übrigen Elemente zu ermitteln ist. In gleicher Weise hat man nun $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$; $202 - 60 = 142$; $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$; $142 - 90 = 52$; *c* · ferner $\frac{5!}{3!} = 20$; $52 - 20 = 32$; $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$; $32 - 30 = 2$. Die gesuchte Permutation ist also *ccccababb*.

5. Soll umgekehrt ermittelt werden, die wievielte Permutation eine gegebene ist, so hat man in umgekehrter Weise zu verfahren. Wird z. B. gefragt, die wievielte Permutation 4317562 von 1234567 sei, so gehen der gesuchten drei, bezüglich mit 1, 2, 3 beginnende Gruppen von je 6! Permutationen voraus. Nach Streichung der 4 gehen der Permutation 317562 von 123567 noch zwei Gruppen von je 5! Permutationen voraus. Ebenso erhält man weiterhin keine vorangehende Gruppe mit 4!, 3 mit je 3!, eine mit 2! Permutationen, und die gesuchte ist die zweite der folgenden, also im Ganzen die $3 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 3! + 2! + 2 = 2422$te. Um ebenso zu bestimmen, die wievielte Permutation *cbabab* von *aabbbc* sei, hat man $\frac{5!}{3!}$ mit *a* und $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$ mit *b* beginnende Permutationen vor den mit *c* anfangenden, dann nach Streichung des *c* noch $\frac{4!}{3!}$ mit *a* anfangende, weiterhin entsprechend $\frac{2!}{2!}$ vorhergehende, und die gesuchte ist also die $\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!\cdot 2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{2!}{2!} + 1 = 56$te.

6. Ausser der im Vorstehenden angewandten Ordnungsweise der Permutationen ist noch eine andere von Interesse, bei welcher jede Permutation aus der ihr zunächst vorhergehenden durch Vertauschung der Stellen von nur zwei Elementen abgeleitet werden kann. Sind nämlich zwei Elemente *a*, *b* gegeben, so findet überhaupt nur eine solche Vertauschung statt; bei drei Elementen bildet man aus der ersten Permutation *abc* zunächst die zweite durch Vertauschung der beiden letzten Elemente, lässt dann in dieser zweiten *acb* behufs Bildung der dritten das Anfangsglied *a* seine Stelle mit *b* tauschen und vertauscht darauf wieder in *bca* die beiden letzten Elemente. Endlich lässt man in der so gewonnenen Permutation *bac* wieder das jetzige Anfangsglied *b* mit *c* die Stelle wechseln und leitet aus *cab* durch Vertauschung der beiden letzten Elemente noch die letzte Permutation *cba* ab.

Bei vier Elementen *abcd* lässt man zunächst die auf das Anfangsglied *a* folgenden drei Elemente auf die eben angegebene Weise alle möglichen Permutationen unter sich machen; in der letzten dieser Permutationen *adcb* lässt man nun das Anfangselement *a* mit dem nächsten *b* der natürlichen Reihenfolge die Stelle tauschen und dann, indem man *b* als Anfangsglied beibehält, zunächst wieder die folgenden drei Elemente in der oben angegebenen Weise alle möglichen Versetzungen eingehen. Darauf vertauscht man in der letzten der bis dahin gebildeten Permutationen wieder *b* mit *c*, und fährt in dieser Weise fort, bis jedes der vier Elemente auf alle möglichen Arten die erste Stelle eingenommen hat.

Man sieht nun schon, wie man in gleicher Weise die Permutationen von fünf Elementen mit Hülfe des Verfahrens bei vier Elementen, und so allgemein die Permutationen von *n* Elementen bilden kann.

7. Das vorstehend erklärte Verfahren giebt noch Veranlassung zu folgenden Definitionen und Lehrsätzen:

Je zwei beliebige Elemente, welche aus einer Complexion herausgenommen und in derselben Reihenfolge neben einander gestellt gedacht werden, in welcher sie in jener Complexion auf einander folgen, bilden ein Elementen-Paar. Jedes Elementen-Paar einer Complexion, in welchem ein höheres Element einem niedrigeren vorausgeht, bildet eine Inversion. So hat beispielsweise die Complexion 53421 die Elementen-Paare 53, 54, 52, 51, 34, 32, 31, 42, 41, 21; von denselben bilden 53, 54, 52, 51, 32, 31, 42, 41, 21 Inversionen. Dagegen hat die Complexion 12453 nur die Inversionen 43, 53.

Vertauscht man in einer Complexion zwei Elemente *r*, *s* mit einander, und bezeichne *A* die Gruppe der Elemente, welche jenen beiden vorausgehen, *B* die Gruppe der zwischen denselben stehenden, und *C* die Gruppe der nachfolgenden Elemente, seien also

$$ArBsC \text{ und } AsBrC$$

die betreffenden beiden Complexionen, und sei ferner *s* höher als *r*, so kann bei der Vertauschung von *r* und *s* nur die Gruppe *B* Anlass zu einer Aenderung der Anzahl der Inversionen geben, denn *A* und *C* bleiben sowol zu *r*, als zu *s* in derselben Stellung in Betreff des Vorausgehens oder des Nachfolgens. Enthält nun die Gruppe *B* α Elemente, welche niedriger als *r* sind, β Elemente, welche zwischen *r* und *s* in der natürlichen Reihenfolge stehen, und γ Elemente, welche höher als *s* sind, so fallen bei der Vertauschung von *r* und *s* zunächst $\alpha+\gamma$ Inversionen weg, dagegen entstehen dadurch, dass *r* hinter $\beta+\gamma$ höhere Elemente tritt, $\beta+\gamma$, und dadurch, dass *s* vor $\alpha+\beta$ niedrigere tritt, $\alpha+\beta$, endlich durch

die Vertauschung von r und s selbst noch eine, im Ganzen also $\alpha + 2\beta + \gamma + 1$ Inversionen mehr, und die Gesammtzahl der vorhandenen Inversionen ändert sich also um

$$\alpha + 2\beta + \gamma + 1 - (\alpha + \gamma) = 2\beta + 1,$$

also stets um eine ungerade Zahl. Für diese letztere ist es selbstverständlich gleichgültig, welche der beiden Complexionen als die ursprüngliche angenommen wird, und es gilt also der Satz:

Vertauscht man in einer Complexion zwei Elemente mit einander, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Bildet man also die Permutationen gegebener Elemente auf die zweite oben angegebene Weise, so ist die Anzahl der Inversionen in denselben abwechselnd gerad und ungerad.

Allgemeiner ergiebt sich hieraus: Zwei Permutationsformen, welche sich aus einander durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen, haben entweder beide eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl von Inversionen; von zwei Permutationsformen dagegen, welche sich aus einander durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen, hat stets die eine eine gerade, die andere eine ungerade Anzahl von Inversionen.

Man theilt die Permutationen gegebener Elemente in zwei Klassen und rechnet in die erste derselben alle diejenigen Permutationen, welche eine gerade, in die zweite alle diejenigen, welche eine ungerade Anzahl von Inversionen haben.

Demnach gehören zwei Permutationen derselben Elemente derselben oder verschiedenen Klassen an, je nachdem sie sich aus einander durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente ableiten lassen. Die in der zweiten der oben angegebenen Weisen geordneten Permutationen gehören abwechselnd verschiedenen Klassen an. Beide Klassen haben jedesmal gleichviele Permutationen, nämlich $3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots n = \frac{1}{2}(n!)$.

§ 60. Vom Combiniren und Variiren.

1. Wird von n gegebenen Elementen eine bestimmte Anzahl auf alle mögliche Arten herausgenommen und zusammengestellt, so jedoch, dass nur die verschiedene Auswahl der Elemente und nicht ihre Stellung gegen einander in Betracht kommt, so heissen die entstehenden Complexionen Combinationen jener n Elemente, und zwar Combinationen zur $p$ten Klasse, wenn p die Anzahl der jedesmal ausgewählten Elemente ist.

Complexionen, welche dieselben ausgewählten p Elemente, jedoch in verschiedenen Reihenfolgen enthalten, gelten demnach nur als eine einzige Combination. Da man hiernach bei Aufstellung der Combinationen jedesmal die Wahl zwischen den verschiedenen möglichen Reihenfolgen hat, so pflegt man diejenige zu nehmen, welche die betreffenden Elemente in ihrer natürlichen (alphabetischen, u. s. w.) Ordnung enthält.

Wird dagegen nicht nur eine bestimmte Anzahl von Elementen ausgewählt, sondern auch jede verschiedene Anordnung derselben ausgewählten Elemente als eine neue Complexion betrachtet, so erhält man — bei p ausgewählten Elementen — die Variationen der gegebenen n Elemente zur $p$ten Klasse.

Man unterscheidet ferner Combinationen und Variationen mit und ohne Wiederholungen, je nachdem es gestattet oder verboten ist, ein und dasselbe Element in derselben Complexion wiederholt zu setzen.

Beispielsweise sind von den 4 Elementen *abcd*

α) die Combinationen ohne Wiederholungen zur dritten Klasse:

abc, *abd*, *acd*, *bcd*,

β) die Combinationen mit Wiederholungen zur dritten Klasse:

aaa, *aab*, *aac*, *aad*, *abb*, *abc*, *abd*, *acc*, *acd*, *add*,
bbb, *bbc*, *bbd*, *bcc*, *bcd*, *bdd*, *ccc*, *ccd*, *cdd* *ddd*,

γ) die Variationen ohne Wiederholungen zur dritten Klasse:

abc, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *adc*, *bac*, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*, *cab*,
cad, *cba*, *cbd*, *cda*, *cdb*, *dab*, *dac*, *dba*, *dbc*, *dca*, *dcb*,

δ) die Variationen mit Wiederholungen zur dritten Klasse:

aaa, *aab*, *aac*, *aad*, *aba*, *abb*, *abc*, *abd*, *aca*, *acb*, *acc*, *acd*, *ada*,
adb, *adc*, *add*, *baa*, *bab*, *bac*, *bad*, *bba*, *bbb*, *bbc*, *bbd*, *bca*, *bcb*,
bcc, *bcd*, *bda*, *bdb*, *bdc*, *bdd*, *caa*, *cab*, *cac*, *cad*, *cba*, *cbb*, *cbc*,
cbd, *cca*, *ccb*, *ccc*, *ccd*, *cda*, *cdb*, *cdc*, *cdd*, *daa*, *dab*, *dac*, *dad*,
dba, *dbb*, *dbc*, *dbd*, *dca*, *dcb*, *dcc*, *dcd*, *dda*, *ddb*, *ddc*, *ddd*.

2. Als Bildungsgesetze für diese vier Arten von Complexionen kann man folgende aufstellen:

Für die Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse ohne Wiederholungen beginne man mit den p ersten Elementen der natürlichen Reihenfolge und ersetze das am weitesten nach rechts stehende Element, welches noch erhöht werden kann, nach und nach durch jedes der höheren Elemente, und fahre nach dieser Regel fort, indem man bei jeder Erhöhung eines Elementes die links von demselben stehenden Elemente unverändert lässt und rechts von demselben die zunächst folgenden höheren Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge setzt. — Bei der Erhöhung eines Elementes ist zu beachten, dass eine hinreichende Anzahl höherer Elemente zur Besetzung der noch folgenden Stellen vorhanden bleiben muss.

Bei diesem Verfahren nimmt jedes der $n - p + 1$ ersten Elemente nach und nach die erste Stelle ein, in jedem dieser Fälle folgt dem zuerst gesetzten Elemente jedes der höheren Elemente — soweit die Anzahl derselben zur Besetzung der Stellen hinreicht — an zweiter Stelle, u. s. w.

Um die Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse mit Wiederholungen zu bilden, beginne man damit, das erste Element p mal zu setzen und verfahre dann wie vorher, mit dem Unterschied, dass auf jedes gesetzte Element nicht bloss ein höheres, sondern auch jenes selbst wiederholt folgen kann.

In Betreff der Variationen von n Elementen kann man ebenfalls in ähnlicher Weise wie vorher verfahren, hat jedoch zu beachten, dass auf ein gesetztes Element auch jedes der niedrigeren folgen kann. Man setzt also jedes der n Elemente einmal an die erste Stelle, darauf bei Variationen ohne Wiederholungen jedes der $n - 1$ übrigen der Reihe nach, bei Variationen mit Wiederholungen jedes der n Elemente überhaupt je einmal an die zweite Stelle, dann in jedem der so erhaltenen Fälle wieder jedes der $n - 2$ übrigen, bezw. jedes der n Elemente der Reihe nach an die dritte Stelle, u. s. f. bis zur $p$ten Stelle.

Man sieht ferner leicht ein, dass man die Variationen von n Elementen mit oder ohne Wiederholungen zur $p$ten Klasse auch aus den entsprechenden Combinationen ableiten kann, indem man jede der letzteren auf alle mögliche Arten permutirt. — Die Variationen von n Elementen ohne Wiederholungen zur $n$ten Klasse sind identisch mit den Permutationen dieser Elemente.

3. Die **Anzahl** der Complexionen in den angeführten Fällen ergiebt sich wie folgt:

Da bei den Variationen mit Wiederholungen jedes der n Elemente an erster Stelle, in jedem dieser n Fälle wieder jedes der n Elemente an zweiter Stelle stehen kann, u. s. w., so ist hier die gesuchte Anzahl für die $p$te Klasse gleich

$$n^p.$$

Bei Variationen ohne Wiederholungen kann auf das erste Element in jedem einzelnen Falle nur jedes der $n - 1$ übrigen an zweiter Stelle, dann entsprechend jedes der $n - 2$ übrigen an dritter Stelle, folgen, u s. w. Daher ist die Anzahl derselben für die $p$te Klasse gleich

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1).$$

Bezeichnet Cp^n die Anzahl der Combinationen von n Elementen der $p$ten Klasse ohne Wiederholungen, so erhält man, da jede dieser Combinationen $p!$ verschiedene Permutationen zulässt, die Anzahl der entsprechenden Variationen, indem man Cp^n mit $p!$ multiplicirt. Daher ist umgekehrt unter Benutzung der vorstehenden Formel für die Variationen

$$Cp^n = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot\ 2\cdot\ \ 3\ldots\ \ p} = \binom{n}{p}$$

Für die Combinationen mit Wiederholungen lässt sich das soeben benutzte Verfahren nicht anwenden, da die Anzahl der Permutationen für jede derselben nicht die gleiche ist, sondern beispielsweise für *aaa* nur gleich 1, für *aab* gleich 3, für *abc* gleich 6. Man denke sich für diesen Fall die sämmtlichen Combinationen der Elemente 1, 2, 3, ..., deren Anzahl gesucht wird, der Reihe nach hingeschrieben, erhöhe sodann in jeder derselben das an zweiter Stelle stehende Element um 1, das an dritter Stelle stehende um 2, u. s. f. bis zu dem an $p$ter Stelle stehenden, welches um $p - 1$ erhöht wird. Man erhält so die gleiche Anzahl neuer Complexionen, und zwar von $n + p - 1$ Elementen. Da nun jedes folgende Element in jeder einzelnen Combination um mehr als das vorhergehende erhöht wurde, so kann in den neuen Complexionen niemals ein niedrigeres Element auf ein höheres und es kann auch niemals dasselbe Element wiederholt vorkommen, denn anderenfalls müsste die entsprechende ursprüngliche Complexion keine natürlich geordnete Combination gewesen sein. Die neuen Complexionen sind also Combinationen der $n + p - 1$ Elemente ohne Wiederholungen. Endlich müssen die letzteren vollständig vorhanden sein, denn fehlte eine derselben, so denke man sich in dieser fehlenden Complexion wieder die an zweiter dritter, u. s. w. bis $p$ter Stelle stehenden Elemente um bezüglich 1, 2, ... bis $p - 1$ erniedrigt; offenbar muss hierdurch umgekehrt eine der Combinationen der gegebenen n Elemente ohne Wiederholungen entstehen, und es müsste demnach diese letztere auch ursprünglich gefehlt haben. Somit ergiebt sich der Satz

Die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse mit Wiederholungen ist gleich der Anzahl der Combinationen von $n + p - 1$ Elementen zur $p$ten Klasse ohne Wiederholungen.

Bestimmt man die letztere nach der obigen Formel, so erhält man also auch für die erstere

$$\frac{(n+p-1)\ (n+p-2)\ldots\ldots(n+p-1-p+1)}{1\cdot\ \ 2\ \ \ldots\ldots\ \ p},\ \text{oder}$$

$$\frac{n\,(n+1)\ (n+2)\ldots\ldots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots p}$$

Fragt man beispielsweise, auf wie viele Arten 52 Karten sich so unter vier Spieler vertheilen lassen, dass jeder dreizehn Karten erhält, so hat man zunächst die Anzahl der Combinationen von 52 Elementen zur 13ten Klasse ohne Wiederholungen zu bestimmen. Dieselbe ergiebt sich gleich 635013559600. Erhält der erste Spieler eine dieser Combinationen, so kann der zweite jedesmal noch jede der Combinationen der übrigen 39 Karten zur 13ten Klasse ohne Wiederholungen erhalten, deren Anzahl 8122425444 beträgt. Ferner kann in jedem der hierbei möglichen Fälle der dritte Spieler jede der Combinationen der 26 übrigen Elemente zur 13ten Klasse ohne Wiederholungen, deren Anzahl 10 400600 beträgt, erhalten. Der vierte Spieler erhält dann in jedem der möglichen Fälle die noch übrigen 13 Karten. Die Gesammtzahl aller möglichen Vertheilungsweisen ist also gleich dem Produkt der vorstehend ermittelten drei Anzahlen, oder gleich 53644737765488792839237440000.

Bei dem Morse'schen elektrischen Telegraphen wird das ganze Alphabet durch Zusammenstellung von Strichen und Punkten gebildet. Fragt man nun, wieviele verschiedene Zeichen sich durch die Zusammenstellungen von höchstens vier Strichen und Punkten zu je einem Zeichen bilden lassen, so hat man die Anzahlen der Variationen von zwei Elementen mit Wiederholungen zur ersten, zweiten, dritten und vierten Klasse zu addiren. Die gesuchte Zahl ist also gleich $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

Es kann ferner bei den Combinationen und Variationen gegebener Elemente festgesetzt werden, dass die einzelnen Elemente nicht unbeschränkt wiederholbar sind, sondern dass für jedes derselben nur eine bestimmte Anzahl, z. B. für das erste α, für das zweite β, u. s. w. Wiederholungen gestattet sein sollen. Es kann ferner vorgeschrieben werden, dass die zu bildenden Complexionen der durch Zahlen dargestellten Elemente eine bestimmte Summe dieser Zahlen geben, oder dass die einzelnen Elemente mit gleichen Differenzen der aufeinander folgenden fortschreiten sollen, u. dgl. m. In derartigen Fällen wird man leicht nach Analogie der im Vorhergehenden entwickelten Methoden die einzelnen Complexionen in gesetzmässiger Weise entwickeln; die Ableitung allgemeiner Regeln und Formeln für derartige Fälle erscheint hier als zu weitführend und entbehrlich.

Einige Anwendungen der Combinationslehre sollen in den nächsten Paragraphen erörtert werden.

§ 61. Die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Heis § 91. Bardey XXXVI.

1. Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit (Probabilität) eines Ereignisses versteht man das Verhältniss der Anzahl aller diesem Ereigniss günstigen zur Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel einen bestimmten Wurf zu werfen, gleich $\frac{1}{6}$, denn unter den 6 überhaupt möglichen Würfen ist ein einziger dem Eintreffen des verlangten Ereignisses günstig. Die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 52 Karten ein Ass zu ziehen, ist $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, da unter 52 möglichen Fällen 4 günstige sind.

Diese Erklärung des Begriffs Wahrscheinlichkeit entspricht vollständig dem Sprachgebrauch; sie giebt aber denselben schärfer mittelst genau bestimmter Zahlenwerthe. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird hiernach durch einen Bruch angegeben, und zwar im Allgemeinen durch einen echten Bruch. Ist kein Fall dem Ereigniss günstig, das letztere also unmöglich, so erhält man

für die Wahrscheinlichkeit den Werth Null; sind alle möglichen Fälle zugleich günstig, so wird die Wahrscheinlichkeit gleich 1. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also die Null das Symbol der Unmöglichkeit, die Eins das Symbol der Gewissheit. Sind ebenso viele Fälle einem Ereigniss günstig als ungünstig, so ist die Wahrscheinlichkeit des letzteren gleich $\frac{1}{2}$; in diesem Falle bezeichnet man das Eintreffen des Ereignisses als zweifelhaft. Ist die Wahrscheinlichkeit grösser als $\frac{1}{2}$, so sagt man im engeren Sinne, das Eintreffen des Ereignisses sei wahrscheinlich; ist sie kleiner als $\frac{1}{2}$, so sagt man, dieses Ereigniss sei unwahrscheinlich.

Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nennt man die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des letzteren; dieselbe wird durch einen Bruch angegeben, dessen Zähler die Anzahl der ungünstigen, und dessen Nenner die Anzahl der möglichen Fälle ist. Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich w, so ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit desselben gleich $1 - w$. Zuweilen berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses am bequemsten aus der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit desselben. Wird z. B. nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, bei dreimaligem Aufwerfen eines Münzstückes wenigstens einmal »Schrift« zu werfen, so sind, da jeder der beiden möglichen Fälle eines Wurfes mit jedem Fall der übrigen Würfe zusammen treffen kann, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Fälle möglich. Unter diesen ist nur einer ungünstig, also ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, und daher die gesuchte $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

2. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erfordert behufs der Bestimmung der Anzahlen der möglichen und der günstigen Fälle häufig die Anwendung der Combinationslehre. Dieselbe kann bei zusammengesetzten Aufgaben nicht selten dadurch erleichtert werden, dass das Ereigniss in mehrere einzelne Ereignisse zerlegt wird. Es seien zunächst unter n möglichen Fällen a einem Ereigniss, b davon verschiedene einem zweiten Ereigniss, wieder c andere einem dritten Ereigniss, u. s. w. günstig, also $w_1 = \frac{a}{n}$, $w_2 = \frac{b}{n}$, $w_3 = \frac{c}{n}$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten dieser einzelnen Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit dass von den letzteren irgend eines, also entweder das eine oder das andere eintrete, gleich $\frac{a + b + c + \dots}{n}$, oder es ist die totale Wahrscheinlichkeit gleich $w_1 + w_2 + w_3 + \dots$, also gleich der Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten.

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, da unter $6 \cdot 6$ möglichen Fällen 6 günstige sind, $w_1 = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit mit derselben Anzahl von Würfeln zwei auf einander folgende Zahlen zu werfen, ist $w_2 = \frac{5}{18}$, da die zehn Würfe 12, 23, 34, 45, 56, 21, 32, 43, 54, 65 günstig sind. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Wurfe entweder einen Pasch oder zwei aufeinanderfolgende Zahlen zu werfen, ist also $w = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$.

Wird dagegen nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit zwei Würfeln entweder einen Pasch oder die Summe 8 zu werfen, so sind die partiellen Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{1}{6}$, $w_2 = \frac{5}{36}$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist jedoch nicht gleich $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$, sondern nur gleich $\frac{10}{36}$, da der Wurf 44 beiden Ereignissen günstig ist und daher bei der ersten Rechnung fälschlicher Weise doppelt gezählt sein würde.

3. Wird dagegen die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass von zwei Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten einzeln bezüglich $w_1 = \frac{a}{b}$, $w_2 = \frac{c}{d}$ seien, sowol das eine als auch das andere, dass also beide gleichzeitig oder auch in bestimmter Reihenfolge nach einander eintreten, so sind $b \cdot d$ Fälle möglich, da jeder bei

dem einen Ereigniss mögliche Fall mit jedem von den bei dem anderen möglichen zusammentreffen kann. Ebenso kann jeder der a günstigen Fälle des einen mit jedem der c günstigen des anderen zusammentreffen; die Anzahl der überhaupt günstigen Fälle ist also ac, und mithin die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{ac}{bd}$ oder gleich $w_1 \cdot w_2$. Man kann diesen Schluss leicht auf drei oder mehr einzelne Ereignisse ausdehnen. Die so gefundene Wahrscheinlichkeit heisst aus den einzelnen Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt. Es gilt also der Satz: Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Wird z. B. nicht, wie oben, nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit zwei Würfeln entweder einen Pasch oder zwei aufeinanderfolgende Zahlen zu werfen, sondern nach der Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Wurf einen Pasch, und darauf noch mit dem zweiten Wurf zwei aufeinanderfolgende Zahlen zu werfen, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{108}$. Ist dabei die Reihenfolge der beiden Würfe nicht bestimmt, so ist die gefundene Zahl, da zwei verschiedene Reihenfolgen möglich sind, noch mit $\cdot 2$ zu multipliciren.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche 3 weisse und 4 schwarze Kugeln enthält, mit dem ersten Griff eine weisse und darauf, nachdem diese wieder hineingelegt worden ist, mit dem zweiten Griff eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, wenn mit einem Griff zwei Kugeln zugleich herausgenommen werden, dass dieselben eine schwarze und eine weisse seien, gleich $\frac{4}{7}$, denn unter den möglichen 21 Combinationen der 7 Kugeln zu zweien, sind 12 Combinationen günstig. Diese Wahrscheinlichkeit ist dieselbe, wie die, dass bei zwei aufeinanderfolgenden Griffen eine weisse und eine schwarze Kugel gezogen werde, wenn die gezogene Kugel nicht wieder hineingelegt wird und die Reihenfolge der beiden Kugeln nicht bestimmt ist. Man kann in diesem Falle auch, wie folgt, rechnen: Die W., zuerst eine schwarze Kugel zu ziehen ist $\frac{4}{7}$; die W., darauf eine weisse zu ziehen, ist — da die Anzahl der Kugeln jetzt nur noch 6 beträgt — $\frac{3}{6}$; die W., dass beides geschehe, ist also $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$. Ferner ist die W., beim erstenmal eine weisse und beim zweitenmal eine schwarze Kugel zu ziehen, entsprechend $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$. Die W., dass das Ereigniss entweder in der einen oder in der anderen Reihenfolge eintrete, ist also $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

Werden die 7 Kugeln in zwei Urnen vertheilt, sodass die eine der letzteren 2 weisse und 2 schwarze, die andere eine weisse und 2 schwarze Kugeln enthält, so ist die W., eine weisse Kugel zu ziehen, nicht mehr wie vorher gleich $\frac{3}{7}$, sondern gleich $\frac{5}{12}$, denn die W., in die erste Urne zu greifen, ist gleich $\frac{1}{2}$, die W., aus dieser eine weisse Kugel zu ziehen, gleich $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, also die W., in die erste Urne zu greifen und dann aus ihr eine weisse Kugel zu ziehen, gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. In gleicher Weise ergiebt sich die W., in die zweite Urne zu greifen und dann aus ihr eine weisse Kugel zu ziehen, gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Die W., dass entweder das eine oder das andere geschehe, ist also gleich $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Ebenso findet man für dieses Beispiel die W., eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{12}$, und die W., mit zwei Griffen hinter einander zuerst eine weisse und, nachdem diese wieder in ihre Urne zurückgelegt worden, dann eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$.

Liegt in der einen Urne nur eine schwarze Kugel, liegen in der anderen also 3 weisse und 3 schwarze, so hat die erstere Kugel durch diese Vertheilung für sich allein die gleiche W., gezogen zu werden, wie die 6 anderen zusammen; die W., hier eine schwarze Kugel zu ziehen, ist daher $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, die W., eine weisse zu ziehen, nur $\frac{1}{4}$.

Es kann der Fall eintreten, dass umgekehrt die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses mittelst der bekannten totalen oder zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, oder dass die Anzahl der einzelnen Ereignisse gesucht wird. Man hat in solchen Fällen nur die betreffende Gleichung auf die gesuchte Unbekannte aufzulösen.

Wird z. B. gefragt, wie oft mit zwei Würfeln geworfen werden müsse, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen zu werfen, grösser werde, als die Wahrscheinlichkeit des Gegen-

theils, so hat man folgende Auflösung: Bei zwei Würfeln sind $6 \cdot 6$ Fälle möglich, und dem verlangten Ergeigniss ist nur einer günstig. Die W., dass dieses Ereigniss in x Würfen wenigstens einmal eintrete, ist die entgegengesetzte W. dafür, dass x mal hintereinander das Gegentheil eintrete, also $\left(\frac{35}{36}\right)^x$. Diese W. soll kleiner sein als die erstere, mithin auch $< \frac{1}{2}$ sein. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{35}{36}\right)^x = \frac{1}{2}$$

würde folgen $x = 24{,}6$. Also muss $x > 24{,}6$, mithin mindestens gleich 25 sein.

Da die Wahrscheinlichkeiten durch echte Brüche dargestellt werden, so folgt, dass jede zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kleiner ist, als jede der zugehörigen einzelnen Wahrscheinlichkeiten, und dass die erstere überhaupt mit der zunehmenden Anzahl der Ereignisse abnimmt.

4. Schon in den vorhergehenden Beispielen sind einige besondere Fälle der Wahrscheinlichkeits-Berechnung vorgekommen:

So ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein und dasselbe Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit gleich w sei, n mal nach einander eintreffe, falls die Anzahl der möglichen, sowie die der günstigen Fälle bei den Wiederholungen unverändert bleibt, gleich w^n.

Zuweilen tritt aber der Fall ein, dass die Anzahl der möglichen, sowie die der günstigen Fälle bei jeder Wiederholung sich um 1 vermindert. Ist $\frac{a}{b}$ die Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreffen, so ist in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit für ein $n$maliges Eintreffen gleich

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \ldots (a-n+1)}{b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \ldots (b-n+1)}.$$

So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 52 Karten in dreizehn aufeinander folgenden Zügen sämmtliche Coeur-Karten zu ziehen, wenn die gezogenen Karten nicht wieder in's Spiel gegeben werden, gleich

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \ldots\ldots 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \ldots\ldots 41 \cdot 40} = \frac{1}{635013559600}.$$

Würde dagegen jede gezogene Karte wieder in das Spiel gemischt, so wäre die W., dreizehnmal hinter einander eine Coeur-Karte, gleichviel welche, zu ziehen, gleich $\left(\frac{1}{4}\right)^{13}$. Sollen dagegen in diesem Falle alle gezogenen Karten auch von einander verschieden sein, so ändert sich bloss die Anzahl der günstigen, nicht aber die der möglichen Fälle um je 1, und die gesuchte W. ist dann $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \ldots\ldots 2 \cdot 1}{52 \cdot 52 \cdot 52 \ldots\ldots 52 \cdot 52}$.

Sind w_1, w_2 die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zweier von einander unabhängigen Ereignisse A, B, so ist nach dem Früheren 1. die W., dass sowol A, als auch B eintreffe, gleich $w_1 \cdot w_2$; 2. die W., dass A eintreffe und B nicht eintreffe, gleich $w_1 \cdot (1 - w_2)$; 3. die W., dass A nicht eintreffe, dagegen B eintreffe, gleich $(1 - w_1) \cdot w_2$; 4. die W., dass weder A noch B eintreffe, gleich $(1 - w_1)(1 - w_2)$. Ferner ist die W., dass 5. nur eins der beiden Ereignisse eintreffe, gleichviel welches, gleich $w_1(1 - w_2) + w_2(1 - w_1) = w_1 + w_2 - 2w_1 w_2$, 6. dass wenigstens eins derselben eintreffe, in welchem Falle also auch das gleichzeitige Eintreffen beider günstig ist, gleich $w_1 + w_2 - w_1 w_2$. Es ist dies die entgegengesetzte W. von der unter 4. angegebenen, und dieselbe kann daher auch aus $1 - (1 - w_1)(1 - w_2)$ gefunden werden. Endlich ist 7. die W., dass nicht beide Ereignisse eintreffen, sondern höchstens eins, gleich $1 - w_1 w_2$. (Heis, § 91, No. 23.)

Man kann auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass entweder das Ereigniss A eintreffe, oder, falls dies nicht geschehe, dann doch das Ereigniss B, indem man annimmt, dass im Falle des Eintreffens von A das Ereigniss B überhaupt nicht mehr in Frage komme. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $w_1 + (1 - w_1)w_2$, also gleich derjenigen, dass wenigstens eins der beiden Ereignisse eintrete.

5. Unter den relativen Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse versteht man die Wahrscheinlichkeiten, welche man erhält, wenn nur diejenigen Fälle berücksichtigt werden, die einem der Ereignisse günstig sind, wenn also diejenigen, welche keinem derselben günstig sind, als nicht vorhanden betrachtet werden. Sind unter n überhaupt möglichen Fällen a dem ersten und b davon verschiedene dem zweiten Ereigniss günstig, so sind die relativen Wahrscheinlichkeiten gleich $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$, oder wenn w_1, w_2 die absoluten Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ der betreffenden Ereignisse sind, gleich

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} \text{ und } \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

So ist z. B. die W., aus einer Urne mit 7 weissen, 5 rothen, 9 schwarzen Kugeln eher eine weisse als eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{16} = \frac{7}{21} : (\frac{7}{21} + \frac{9}{21})$.

6. Ein besonderes Interesse bietet noch die Beantwortung der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss bei $n$maliger Wiederholung des Versuches $a$mal eintreffe und $n - a$mal nicht eintreffe, wenn die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreffen bei jedem einzelnen Versuche dieselbe ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss $a$mal hinter einander oder sonst in einer bestimmten Reihenfolge eintreffe, ist w^a, und ebenso die für das $n - a$malige Nicht-Eintreffen $(1 - w)^{n-a}$, mithin die für beide Forderungen zugleich bei bestimmter Reihenfolge gleich $w^a \cdot (1 - w)^{n-a}$. Ist dagegen die Reihenfolge nicht bestimmt, so hat man diese Wahrscheinlichkeit so oft zu nehmen, als verschiedene Reihenfolgen möglich sind, also so oft als die Anzahl der Permutationen von $a + b$ Elementen beträgt, von denen a der einen Art und b der anderen Art einander gleich sind. Man erhält also in diesem Falle

$$\binom{n}{a} w^a (1 - w)^{n-a}.$$

In ähnlicher Weise kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass von drei oder mehr Ereignissen bei einer Reihe von Versuchen jedes einzelne eine bestimmte Anzahl mal eintreffe, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss unter n Versuchen wenigstens $a$mal eintreffe. Im letzteren Falle sind die Wahrscheinlichkeiten für das ein-, zwei-, u. s. w. bis a-malige Eintreffen zu addiren.

Die wiederholten Versuche führen zur Erkenntniss der eigentlichen Bedeutung und des praktischen Werthes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich $\frac{1}{6}$, so sagt dies, dass man durchschnittlich für jede sechs Wiederholungen ein einmaliges Eintreffen, und also ein fünfmaliges Nichteintreffen des Ereignisses erwarten dürfe. Damit ist keineswegs behauptet, dass dieses Eintreffen jedesmal bei sechs wiederholten Versuchen genau einmal stattfinden müsse, vielmehr kann dies öfter, oder auch erst bei einer grösseren Anzahl von Versuchen der Fall sein, und jede solche Möglichkeit hat nach dem Vorstehenden ihre eigene Wahrscheinlichkeit. So ist also z. B. die Wahrscheinlichkeit, unter sechs Würfen

mit einem Würfel gerade einmal die 1 zu werfen, durchaus nicht gleich der Gewissheit, sondern gleich $(\frac{5}{6})^5 = 0{,}4018\,..$ Macht man aber nicht bloss sechs, sondern eine erheblich grössere Anzahl von Versuchen, vielleicht 600 oder 6000, so steht zu erwarten, und die Erfahrung bestätigt dies, dass diejenigen Versuchsreihen, bei welchen das Ereigniss öfter eintrat, als nach seiner Wahrscheinlichkeit anzunehmen war, sich mit denjenigen, in welchen es seltener eintrat, mehr oder minder ausgleichen werden, und dass man also durchschnittlich der aus der Wahrscheinlichkeit sich ergebenden Anzahl von Fällen des Eintreffens bei einer sehr grossen Anzahl von Versuchen entsprechend nahe kommen werde.

Hiermit ist keineswegs gesagt, dass z. B. die Wahrscheinlichkeit, unter 60 Würfen mit einem Würfel genau zehnmal eine bestimmte Nummer zu werfen, grösser sei, als die Wahrscheinlichkeit, diese Nummer unter 6 Würfen genau einmal zu werfen; im Gegentheil ist die letztere gleich 0,401 . ., während die erstere nur gleich 0,137 . . ist. Dies erklärt sich leicht dadurch, dass im letzteren Falle nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen von 6 möglichen, im ersteren dagegen nur nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen von 60 möglichen Fällen gefragt wird. Jenem einen Fall unter 6 Würfen müsste man also bei 60 Würfen, um das gleiche Verhältniss zu erhalten, nicht einen einzelnen, sondern zehn Fälle gegenüberstellen, und es lässt sich zeigen, dass, wenn diese zehn Fälle dem erwarteten möglichst nahe liegen, die Wahrscheinlichkeit, irgend einen derselben zu werfen, erheblich grösser ist, als die Wahrscheinlichkeit für den einen Fall unter nur 6 Würfen. Allgemein gilt zunächst der Lehrsatz, dass bei einer grossen Anzahl wiederholter Versuche diejenige Anzahl von Wiederholungen eines Ereignisses die grösste Wahrscheinlichkeit hat, deren Verhältniss zu der Gesammtzahl der Versuche gleich der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist. Ist nämlich w die einfache Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, und also, wie oben gezeigt,

$$W = \binom{n}{a} w^a \cdot (1 - w)^{n-a}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereigniss unter n Versuchen $a$mal eintreffe, so erhält man nach demselben Gesetze die Wahrscheinlichkeit für ein $a - 1$-maliges Eintreffen, wenn man W mit $\frac{a}{n-a+1} \cdot \frac{1-w}{w}$, und die Wahrscheinlichkeit für ein $a + 1$maliges Eintreffen, wenn man W mit $\frac{n-a}{a+1} \cdot \frac{w}{1-w}$ multiplicirt. Soll nun W ein Maximum sein, so müssen beide so aus W berechnete Werthe kleiner als W, oder es muss

$$\frac{a}{n-a+1} \cdot \frac{1-w}{w} < 1 \text{ und } \frac{n-a}{a+1} \cdot \frac{w}{1-w} < 1$$

sein. Hieraus folgt

$$w > \frac{a}{n+1} \text{ und } w < \frac{a+1}{n+1}.$$

Je grössere Zahlen nun n und a sind, desto geringfügiger wird der Fehler, welchen man durch Weglassen von $+ 1$ neben denselben begeht; in diesem Falle aber reduciren sich beide Ausdrücke auf

$$w = \frac{a}{n},$$

was der obigen Behauptung entspricht.

Die Wahrscheinlichkeit, unter 60 Würfen mit einem Würfel, oder was auf dasselbe hinauskommt, in einem Wurf mit 60 Würfeln gerade zehnmal eine bestimmte Nummer zu werfen, ist

also grösser als die Wahrscheinlichkeit für jede andere Anzahl von Wiederholungen dieser Nummer in gleichem Fall.

Es ergiebt sich ferner aus den obigen Formeln, dass jeder von diesem wahrscheinlichsten Erfolg verschiedene Erfolg eine desto geringere Wahrscheinlichkeit besitzt, je weiter er von dem wahrscheinlichsten entfernt ist.

Daher wird beispielsweise von den Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel eine bestimmte Nummer in 6 Würfen einmal, oder in 60 Würfen diese Nummer oder eine von neun ihr möglichst nahe liegenden, oder in 600 Würfen diese Nummer oder eine von 99 ihr möglichst nahe liegenden u. s. w. zu werfen, jede folgende grösser als die vorhergehende, und die Wahrscheinlichkeit, bei einer sehr grossen Anzahl von Würfen die erwartete Nummer selbst zu treffen oder doch ihr sehr nahe zu kommen, wird immer grösser.

Die vorstehenden Erörterungen geben den wesentlichen Inhalt des sogenannten Gesetzes der grossen Zahlen an.

Dieses Gesetz gestattet nun auch, bei Aufgaben, für welche die nöthigen Data zur Bestimmung der Anzahlen der möglichen und der günstigen Fälle nicht vorhanden sind, einen angenäherten Werth der Wahrscheinlichkeit aus den Resultaten einer Reihe von Versuchen zu bestimmen. Hat man bei n Versuchen $a$mal das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses beobachtet, so ist, falls n eine sehr grosse Zahl ist, $\frac{a}{n}$ ein angenäherter Werth der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Derartige Fälle finden z. B. statt, wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, dass eine in einem gewissen Alter stehende Person noch eine angegebene Anzahl von Jahren leben, oder dass ein versichertes Gebäude innerhalb einer bestimmten Frist abbrennen werde, u. dgl. m. In solchen Fällen dienen statistische Ermittlungen zur Bestimmung einer angenäherten Wahrscheinlichkeit, und die letztere hat um so grösseren Werth, je grösser der Umfang der angestellten Beobachtungen ist. Hat man z. B. beobachtet, dass von 100 Personen, welche 35 Jahre alt sind, nach zwölf Jahren noch 81 leben, so kann man für die Wahrscheinlichkeit eines jetzt 35 Jahre alten Menschen, dass er nach 12 Jahren noch am Leben sei, $\frac{81}{100}$ setzen. Diese Wahrscheinlichkeit bietet, wenn wirklich nur 100 Menschen beobachtet sein sollten, jedoch nur sehr geringe Gewähr, der Wahrheit nahe zu kommen, da in diesem Falle die Wirkung zufälliger Ausnahme-Zustände nicht ausgeschlossen sein würde. Erstreckten sich dagegen die Beobachtungen auf die Bewohner eines ganzen Staates, und ergab sich hier, dass durchschnittlich auf je 100 Menschen noch 81 am Leben waren, so hat man für die Wahrscheinlichkeit 0,81 eine viel grössere Bürgschaft der Annäherung an die Wirklichkeit.

Eine auf diese Weise bestimmte Wahrscheinlichkeit nennt man eine Wahrscheinlichkeit a posteriori im Gegensatz zu der aus der genauen Kenntniss der Anzahlen der Fälle abgeleiteten Wahrscheinlichkeit a priori.

7. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden zunächst statt bei Glücksspielen und Wetten. Hierbei gilt der Satz, dass die Einsätze der Spielenden sich verhalten müssen, wie die Wahrscheinlichkeiten derselben, zu gewinnen.

Wettet z. B. Jemand, dass er mit einem Würfel auf einen Wurf die Nummer 1 werfen werde, so hat er mit seinem Gegner nicht gleiche Chancen des Gewinnes. Es ist daher billig, dass der letztere, welcher eine fünfmal so grosse Wahrscheinlichkeit hat zu gewinnen, auch einen fünfmal so hohen Einsatz biete, als jener. Bei wiederholten Spielen steht dann zu

erwarten, dass Verlust und Gewinn beider Spieler sich um so mehr — den betreffenden Wahrscheinlichkeiten entsprechend — ausgleichen werden, je grösser die Anzahl der Spiele ist.

Ist überhaupt auf das Eintreffen eines Ereignisses ein Preis C gesetzt, so nennt man **mathematische Hoffnung** des Preises das Produkt aus dem letzteren und der Wahrscheinlickeit w, dass das Ereigniss eintrete. Dieses Produkt $w \cdot C$ bestimmt die Grösse des Einsatzes e, welchen der das betreffende Ereigniss erwartende Spieler zu machen hat. Spielen also mehrere um denselben Preis C, und sind die betreffenden Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen w_1, w_2, w_3, ... und die bezüglichen Einsätze e_1, e_2, e_3, ..., so muss

$$e_1 : e_2 : e_3 : \ldots = w_1 C : w_2 C : w_3 C : \ldots = w_1 : w_2 : w_3 : \ldots .$$

sein. Die Summe $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots .$ sämmtlicher Einsätze muss den gesetzten Preis C ausmachen; dieser letztere vertheilt sich also auf die einzelnen Einsätze nach dem Verhältniss der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Sind gleichzeitig auf das Eintreffen mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse Preise C_1, C_2, C_3, ... gesetzt worden, so ist die mathematische Hoffnung für das Erlangen eines dieser Preise gleich der Summe der mathematischen Hoffnungen für die einzelnen Preise, und demnach der zu leistende Einsatz

$$e = w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3 + \ldots,$$

denn man kann diesen Fall ebenso ansehen, als wenn ebenso viele von einander unabhängige Spiele gemacht würden, als Preise vorhanden sind, und deshalb ist der Gesammt-Einsatz auch gleich der Summe der Einsätze für diese einzelnen Spiele. Dabei kann es auch vorkommen, dass der eine oder der andere der Preise negativ ist, d. h. dass bei dem Eintreffen des bezüglichen Ereignisses von dem Spieler ein Betrag herausgezahlt werden soll.

Es seien z. B. in einer Lotterie von 1000 Nummern ein Preis von 10000 Mark, 10 Preise von 1000 Mark und 100 Preise von 100 Mark ausgesetzt, so ist der Werth eines einzelnen Looses gleich

$$\tfrac{1}{1000} \cdot 10000 + \tfrac{10}{1000} \cdot 1000 + \tfrac{100}{1000} \cdot 100 = 30 \text{ Mark}$$

Soll ferner aus einer Urne mit 7 weissen und 3 schwarzen Kugeln eine Kugel unter der Bedingung gezogen werden, dass, wer eine weisse Kugel zieht, 1 M. erhält, dagegen wer eine schwarze Kugel zieht, 1 M. zahlt, so beträgt der Einsatz für einen einzelnen Zug

$$\tfrac{7}{10} \cdot 1 - \tfrac{3}{10} \cdot 1 = \tfrac{2}{5} \text{ M.}$$

Werden die ausgesetzten Preise erst in bestimmten späteren Terminen fällig, so sind dieselben selbstverständlich vor der Berechnung des Einsatzes auf ihren gegenwärtigen Werth zu discontiren.

Von der mathematischen Hoffnung des Preises ist die des Gewinnes oder des Verlustes zu unterscheiden, welche erst nach Berechnung des Einsatzes ermittelt werden kann. Der Gewinn des Spielers ist gleich dem Ueberschuss des Preises über den Einsatz, also gleich $c - e$, oder was dasselbe ist, gleich dem Einsatz des Gegners, bezw. der Summe der Einsätze sämmtlicher mitspielender Gegner. Die mathematische Hoffnung des Gewinnes, welche auch das **mathematische Risiko** genannt wird, ist gleich dem Produkt aus dem zu erwartenden Gewinn und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, also gleich $w \cdot (c - e)$, oder bei zwei Spielern, deren Einsätze bezüglich e und e_1 und deren Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen w und w_1 sind, bezüglich $w e_1 \cdot$ und $w_1 \cdot e$.

Ist das mathematische Risiko auf beiden Seiten gleich gross, so verhalten sich ebenfalls die Einsätze, wie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, oder aus $w_1 e = w e_1$ folgt $w : w_1 = e : e_1$, und umgekehrt.

8. Eine weitere Anwendung findet die Wahrscheinlichkeits-Rechnung in dem Versicherungs-Wesen, also bei Feuerversicherungs-, Lebensversicherungs-, Wittwen-Kassen u. dgl. Die hier den Berechnungen zu Grunde gelegten Wahrscheinlichkeiten sind solche *a posteriori*, welche durch die statistischen Ermittelungen festgestellt werden. Für ein näheres Studium dieser Anwendung muss hier auf die besonderen Fach-Schriften verwiesen werden.

Das Gleiche gilt von der Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf die Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes beobachteter oder gemessener Grössen, bei welchen die Resultate verschiedener einzelner Messungen in Folge der unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehler nicht vollständig übereinstimmen. Wenn beispielsweise ein und derselbe Winkel mehreremale gemessen wird, so werden in Folge der Unvollkommenheit der Sinne des Beobachters, der unvermeidlichen kleinen Mängel des Messinstruments, vielleicht auch der wechselnden Einflüsse von Wind und Wetter auf die Aufstellung des letzteren, u. dgl. m. die einzelnen Messungsresultate bei der grössten Sorgfalt des Arbeitenden um geringe Werthe verschieden sein. Sind hierbei die einzelnen Messungen unter Umständen angestellt, welche dieselben gleich vertrauenswerth machen, so lässt sich annehmen, dass jeder Beobachtungsfehler ebenso leicht positiv, wie negativ eintreten könne, und dasjenige Resultat, welches die grösste Wahrscheinlichkeit hat, das richtige zu sein, ergiebt sich gleich dem arithmetischen Mittel der einzelnen Resultate. Dabei wächst diese Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der einzelnen Messungen. In verwickelteren Fällen, namentlich wenn die gewünschten Resultate nicht unmittelbar beobachtet, sondern erst aus den Beobachtungen durch Rechnung abgeleitet werden, unterliegt die Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes grösseren Schwierigkeiten. Die für die beobachtende und messende Praxis überaus wichtige Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, welche durch die Lösung solcher Aufgaben erzielt wird, bildet den Gegenstand einer besonderen mathematischen Disciplin, der sogenannten Ausgleichungsrechnung. In Betreff derselben kann hier nur historisch angeführt werden, dass sie sich auf die von Gauss erfundene Methode der kleinsten Quadrate stützt. Die letztere geht von dem Lehrsatz aus, dass dasjenige Resultat die grösste Wahrscheinlichkeit habe, das genau richtige zu sein, für welches die Summe der Quadrate seiner Abweichungen von den einzelnen Resultaten der Beobachtung möglichst klein ist.

Auch bei vielen Urtheilen des praktischen Lebens kann von den Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung Anwendung gemacht werden. Wer aus einer Anzahl von Beobachtungen auf das Eintreffen eines Ereignisses unter bestimmten Umständen schliesst, macht häufig nur einen Wahrscheinlichkeits-Schluss, dessen Werth sehr verschieden sein kann. Gesetzt, es habe Jemand beispielsweise dreimal nach einander die Beobachtung gemacht, dass bei Mondwechsel auch ein Witterungswechsel stattgefunden habe, so würde der Schluss auf ein diesen Beobachtungen zu Grunde liegendes allgemeines Gesetz, der Schluss also, dass das Wechseln des Wetters bei dem des Mondes gewiss sei, ein sehr voreiliger sein, da hier höchstens von einer Wahrscheinlichkeit *a posteriori* die Rede sein kann, welche aber in dem gewählten Beispiele auf einer viel zu geringen Anzahl von Wiederholungen beruht, um irgend welchen Werth zu haben. Würde dagegen Jemand das gleichzeitige Eintreffen zweier Ereignisse etwa unter Tausenden von Beobachtungen jedesmal oder doch bei einer überwiegend grossen Anzahl dieser Beobachtungen wahrgenommen haben, so wäre ein Schluss auf eine Wahrschein-

lichkeit des ursächlichen Zusammenhangs beider Ereignisse gerechtfertigt oder erlaubt. Wir versagen uns auch hier ein näheres Eingehen, indem wir dasselbe dem eigenen Nachdenken oder weiteren Studien der Leser überlassen.

§ 62. Der binomische Lehrsatz für ganze, positive Exponenten.

HEIS § 40 u. 92—93. BARDEY XXXVI_1.

1. Die Aufgabe des sogenannten binomischen Lehrsatzes, jede beliebige Potenz $(a \pm b)^n$ eines Binoms zu entwickeln, ist für ganze positive Exponenten ein besonderer Fall der Aufgabe, ein Produkt von der Form

$$(x \pm a) \cdot (x \pm b) \cdot (x \pm c) \; . \; . \; . \; (x \pm m)$$

zu entwickeln. Diese allgemeinere Aufgabe gestattet mit Hülfe der Combinationslehre eine leichte Auflösung.

Durch Ausführung der Multiplicationen nach (19) in § 11 erhält man zunächst

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x + abc$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)\,x^3 + (ab+ac+ad$$
$$+ bc + bd + cd)\,x^2 + (abc + abd + acd + bcd)\,x + abcd \text{ u. s. w.}$$

Sucht man nach einem allen diesen einzelnen Entwicklungen gemeinsamen Bildungsgesetz, welches also eine gewisse Wahrscheinlichkeit habe, allgemeine Gültigkeit zu besitzen, so fällt sofort in die Augen, dass sämmtliche Entwicklungen aus Gliedern bestehen, welche nach abnehmenden Potenzen von x fortschreiten. Das erste Glied ist jedesmal diejenige Potenz von x, deren Exponent gleich der Anzahl der binomischen Faktoren auf der linken Seite ist; jedes folgende Glied enthält eine Potenz von x, deren Exponent um 1 kleiner ist als in dem ihm unmittelbar vorhergehenden Gliede, und die Coefficienten dieser Potenzen lassen sich der Reihe nach aus den Combinationen der zweiten Summanden $a, b, c, d, \ldots$ zur ersten, zweiten, dritten Klasse u. s. w. bilden, indem man diese Combinationen (ohne Wiederholungen) als Produkte betrachtet und letztere jedesmal addirt. Das letzte Glied enthält so das Produkt sämmtlicher Summanden a, b, u. s. w., mit x^0, d. i. ohne x.

Gilt dieses Gesetz allgemein, und bezeichnet man die Summe der aus jenen Combinationen zur $p$ten Klasse gebildeten Produkte der Kürze halber mit $S\,(C_p)$, so ist für ein Produkt von n Binomen:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) \; . \; . \; . \; . =$$
$$x^n + S(C_1)\,x^{n-1} + S(C_2)\,x^{n-2} + S(C_3)\,x^{n-3} + \ldots + S(C_{n-1})\,x + S(C_n) \quad \cdot \; (1).$$

Die Richtigkeit dieser Formel beruht jedoch nach dem Vorstehenden nur auf Vermuthung; einen strengen Beweis derselben erhält man durch die sogenannte höhere Induction oder den Schluss von n auf $n+1$. Es sei nämlich die Richtigkeit der Formel für irgend eine Anzahl n der binomischen Faktoren vorausgesetzt, so soll bewiesen werden, dass dieselbe dann auch für $n+1$ solche Faktoren gelten muss. Man findet aber das richtige Produkt von $n+1$ Faktoren, indem man die Multiplication des richtigen Produkts von n Faktoren mit dem neu hinzugekommenen $n+1$ten Faktor ausführt. Es sei dieser Faktor $x+q$, so ist das durch Multiplication der rechten Seite von (1) mit demselben entstehende Produkt gleich

$$x^{n+1} + S(C_1)\,x^n + S(C_2)\,x^{n-1} + \ldots + S(C_{n-1})\,x^2 + S(C_n)\,x$$
$$+ q\,x^n + qS(C_1)x^{n-1} + \ldots + qS(C_{n-2})\,x^2 + qS(C_{n-1})\,x + qS(C_n).$$

Es ist also in der neuen Entwicklung der Coefficient von x^p gleich

$S(C_{n-p+1}) + qS(C_{n-p})$. Fügt man aber, wie dieser Ausdruck verlangt, zu sämmtliche Combinationen von n Elementen zu irgend einer Klasse die sämmtlichen Combinationen eines $n+1$ten Elementes q mit den Combinationen jener n Elemente zur nächst niedrigeren Klasse hinzu, so erhält man offenbar sämmtliche Combinationen der $n+1$ Elemente zu jener ersteren Klasse. Hieraus geht hervor, dass die vorstehende Entwicklung für ein Produkt von $n+1$ binomischen Faktoren dieselbe ist, welche man aus (1) erhalten haben würde, wenn man das Gesetz dieser Formel auf $n+1$ Faktoren angewendet hätte. Gilt also diese Formel für n Faktoren, so gilt sie auch für $n+1$ Faktoren.

Nun ist aber die Richtigkeit von (1) für 2, 3, 4 Faktoren unmittelbar durch Ausführung der Multiplication nachgewiesen, mithin gilt diese Formel auch für 5 Faktoren, und da dieses der Fall ist, nach demselben Schlusse auch für 6 Faktoren, u. s. w. bis in's Unendliche. Hiermit ist ihre allgemeine Gültigkeit bewiesen.

Die Entwicklung von $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ kann in ganz derselben Weise erfolgen, wie die vorige; einfacher ist es jedoch, in (1) die Werthe von $a, b, c, \ldots$ negativ anzunehmen. In diesem Fall werden die aus Combinationen einer ungeraden Klasse gebildeten Produkte negativ, während die anderen positiv bleiben. Daher erhält man dieselbe Entwicklung, wie in (1), jedoch mit abwechselnden Vorzeichen der einzelnen Glieder, oder es ist

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = \\ x^n - S(C_1)x^{n-1} + S(C_2)x^{n-2} - S(C_3)x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}S(C_{n-1})x \\ + (-1)^n S(C_n). \quad (2).$$

2. Werden in den Formeln (1) und (2) die Grössen $a, b, c, \ldots$ einander gleich, so verwandeln sich alle in $S(C_p)$ enthaltenen Produkte in die $p$te Potenz von a, und da die Anzahl dieser Potenzen gleich derjenigen der Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse ist, so wird $S(C_p)$ zu

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}a^p,$$

oder nach der schon früher eingeführten Bezeichnung, zu $\binom{n}{p}a^p$. Demnach ist

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + a^n,\\ (x-a)^n &= x^n - \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a^n.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese Formeln enthalten den sogenannten **binomischen Lehrsatz**. Gewöhnlich findet man denselben in der Form geschrieben, welche man erhält, wenn man a statt x und b statt a schreibt, also

$$(a \pm b)^n = a^n \pm n\cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots \\ \ldots + (\pm 1)^n b^n. \quad (4)$$

Die Giltigkeit dieses Lehrsatzes ist durch die gegebene Ableitung nur für ganze positive Werthe des Exponenten n bewiesen. Es ist also beispielsweise

$$(a-b)^{10} = a^{10} - 10a^9b + \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}a^8b^2 - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}a^7b^3 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6b^4 \\ - \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^5b^5 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^4b^6 - \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}a^3b^7 \\ + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}a^2b^8 - \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}ab^9 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}b^{10},$$

d. i. $(a-b)^{10} = a^{10} - 10a^9b + 45a^8b^2 - 120a^7b^3 + 210a^6b^4 - 252a^5b^5 + 210a^4b^6 - 120a^3b^7 + 45a^2b^8 - 10ab^9 + b^{10}$.

Die in dieser Entwicklung vorkommenden Zahlenausdrücke

$$\frac{n}{1}, \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \text{ u. s. w.,}$$

welche schon früher kürzer durch

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} \text{ u. s. w.}$$

bezeichnet wurden, werden die **Binomial-Coefficienten** zur $n$ten Potenz genannt. Der $p$te Binomialcoefficient ist also

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}.$$

Derselbe ist der Coefficient des $n+1$ten Gliedes im binomischen Lehrsatze und gleich der Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse ohne Wiederholungen, sowie gleich der Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich p gleiche einer Art und $n-p$ gleiche einer anderen Art befinden.

Da die Werthe von n als ganze, positive Zahlen vorausgesetzt sind, so bilden die Faktoren des Zählers eines Binomialcoefficienten ganze Zahlen, von denen jede folgende um 1 kleiner ist als die vorhergehende, und man muss daher bei der Bildung dieser Coefficienten einmal zu einem Faktor im Zähler kommen, welcher gleich Null ist. Dies findet statt, wenn $n-p+1=0$, also $p=n+1$ ist. Somit wird der $n+1$te Coefficient und ebenso jeder folgende gleich Null. Hiernach wird auch das $n+2$te und jedes folgende Glied der rechten Seite des binomischen Lehrsatzes gleich Null, oder diese Seite besteht aus $n+1$ Gliedern.

3. Die **wichtigsten Eigenschaften der Binomialcoefficienten** sind folgende:

Der Coefficient $\binom{n}{0} = 1$ des ersten Gliedes ist gleich dem des letzten, der Coefficient $\binom{n}{1}$ des ersten Gliedes gleich dem des vorletzten u. s. w., allgemein der des $p$ten Gliedes gleich dem des $n-p+2$ten, denn jener ist gleich

$$\frac{n(n-1)\,..\,(n-p+2)}{1\cdot 2\,....\,(p-1)},$$

dieser gleich $\dfrac{n\cdot(n-1)\,..\,(n-p+2)\,(n-p+1)\,(n-p)\ldots(p+1)\quad p}{1\cdot\;2\;..\;(p-1)\quad p\quad(p+1)\ldots(n-p)\,(n-p+1}$.

und in dem letzteren Quotienten heben sich alle auf $(n-p+2)$ folgenden Faktoren des Zählers gegen die auf $p-1$ folgenden des Nenners auf. Die Binomialcoefficienten für irgend eine ganze positive Potenz bilden also eine Reihe von Zahlen, deren erste Hälfte von der Mitte an in umgekehrter Reihenfolge wiederkehrt.

Demnach ist das letzte Glied b^n, das vorletzte nab^{n-1}, u. s. w.

Aus den Binomialcoefficienten zu irgend einer Potenz erhält man diejenigen zur nächst höheren Potenz, indem man je zwei aufeinanderfolgende der ersteren, mit Einschluss von $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$, addirt. Dieser Satz ist bereits oben bei dem allgemeinen Beweise von (1) in Betreff der Combinationen bewiesen worden; um denselben speciell für den hier vorliegenden Fall zu beweisen, hat man zu zeigen, dass

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

ist, was leicht mittelst Einsetzen der betreffenden Ausdrücke und einer einfachen Umformung geschieht.

Hiernach können die Binomialcoefficienten für die verschiedenen Exponenten leicht nacheinander durch blosse Additionen berechnet werden. Man erhält so das sogenannte PASCAL'sche Dreieck:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0.\ldots & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1. & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
2. & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
3. & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
4. & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
5. & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
6. & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
7. & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

u. s. w.

Setzt man in der Entwicklung von $(a+b)^n$ für a und für b den Werth 1 ein, so ergiebt sich ohne Weiteres der Satz:

Die Summe aller Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz ist gleich 2^n. Setzt man dagegen in der Entwicklung von $(a-b)^n$, $a=b=1$, so erhält man

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(\pm 1)^n\binom{n}{n},$$

woraus der Satz folgt, dass die Summe aller an geraden Stellen stehenden Binominalcoefficienten gleich der Summe aller an ungeraden Stellen stehenden, jede dieser Summen also gleich 2^{n-1} ist.

4. Um die $n$te Potenz eines Trinoms $a \pm b \pm c$ zu entwickeln, kann man letzteres zunächst in Form eines Binoms schreiben, dessen eines Glied wieder ein Binom ist, und dann den binomischen Lehrsatz wiederholt anwenden. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
(a+b-c)^3 &= [(a+b)-c]^3 = (a+b)^3 - 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 - c^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3(a^2+2ab+b^2)c+3(a+b)c^2-c^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2c-6abc-3b^2c+3ac^2+3bc^2-c^3 \\
&= a^3+b^3-c^3+3(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c+ac^2+bc^2)-6abc.
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Potenzen beliebiger Polynome entwickeln. Hierdurch wird für die Praxis die Ableitung einer allgemeinen Formel für die $n$te Potenz eines Polynoms, d. i. des polynomischen Lehrsatzes, entbehrlich.

Eine andere Erweiterung des binomischen Lehrsatzes, nämlich die Ausdehnung desselben auf gebrochene oder negative, allgemein auf beliebige Werthe des Exponenten, geschieht am besten durch Hülfsmittel der sogenannten höheren Mathematik.

Kapitel 10.
Von den Reihen.

§ 63. Einfache arithmetische Reihen.

Eine Reihe nennt man in der Arithmetik jede gesetzmässige Aufeinanderfolge von Zahlen. So sind beispielsweise

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\ \ldots,$$

oder $1,\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{120},\ldots$ und $a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ \ldots$.

Reihen, deren Bildungsgesetze leicht ersichtlich sind.

Die einzelnen Zahlen, welche eine Reihe bilden, heissen die **Glieder** derselben. Aus der unbegrenzten Anzahl möglicher Reihen werden in der elementaren Mathematik besonders zwei Arten behandelt, welche sich durch die Einfachheit ihrer Bildungsgesetze auszeichnen, und welche man mit den Namen arithmetische und geometrische Reihen (oder Progressionen) bezeichnet hat.

Eine arithmetische Reihe ist eine solche, bei welcher jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden durch Addition einer und derselben Zahl entsteht, oder mit anderen Worten, bei welcher die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder (das vorhergehende als Subtrahend genommen) einen und denselben Werth hat. Diesen letzteren Werth nennt man die **Differenz** der Reihe. Dieselbe kann positiv oder negativ sein. Im letzteren Falle ist jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende. Das erste Glied einer Reihe heisst allgemein das **Anfangsglied** derselben. Ist a das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe und d die Differenz derselben, so ist das zweite Glied gleich $a + d$, das dritte gleich $a + 2d$, das vierte gleich $a + 3d$, u. s. w., also allgemein, das $n$te Glied

$$a_n = a + (n - 1)\, d \qquad (1)$$

Diese Formel gestattet, jedes beliebige Glied der Reihe aus seinem Stellenzeiger n, dem Anfangsgliede und der Differenz zu bestimmen, ohne dass es nöthig ist, die vorhergehenden Glieder zu berechnen. Eine derartige Formel nennt man überhaupt das **allgemeine Glied** der Reihe.

Es sei z. B. gefragt, wieviel Meter ein fallender Körper in der 8ten Secunde der Fallzeit zurücklegt, wenn bekannt ist, dass ein solcher (abgesehen von dem Widerstande der Luft) in der ersten Secunde 4,904 Meter und in jeder folgenden Secunde 9,808 Meter mehr als in der vorhergehenden durchfällt. Hier ist $a_n = 4{,}904 + 7 \cdot 9{,}808 = 73{,}560$ Meter.

Eine entsprechende Aufgabe ist die der Berechnung der Summe einer bestimmten Anzahl von Gliedern einer Reihe. Soll für eine arithmetische Reihe die Summe der n ersten Glieder berechnet werden, so beachte man, dass die Summe des ersten und des letzten Gliedes gleich derjenigen des zweiten und des vorletzten, sowie gleich derjenigen des dritten und des drittletzten Gliedes u. s. w. sein muss, denn in jeder folgenden dieser einzelnen Summen ist der eine Summand gegen die vorhergehende um ebensoviel vergrössert, wie der andere verkleinert. Schreibt man also jene n ersten Glieder der Reihe einmal in ihrer Reihenfolge, das anderemal in der umgekehrten Reihenfolge, setzt also

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots + [a + (n - 2)\, d] + [a + (n - 1)\, d],$$
$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + \ldots\ldots + (a + d) + a$$

und addirt die gleichstelligen Glieder beider Reihen, so erhält man

$$2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots = [2a + (n - 1)d] \cdot n,$$

also
$$S = \frac{2a + (n - 1)d}{2} \cdot n \qquad (2)$$

oder auch
$$S_n = \frac{a + a_n}{2} \cdot n \qquad (3)$$

d. h. die praktische Regel: Um die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe zu finden, multiplicire man die Hälfte der Summe des ersten und des letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder.

So ist z. B. die Summe der ersten 50 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe gleich $\frac{1}{2}(1 + 50) \cdot 50 = 51 \cdot 25 = 1275$, der gesammte von einem fallenden Körper in 8 Secunden zurückgelegte Weg nach dem obigen Beispiele gleich $\frac{1}{2}(4{,}904 + 73{,}560) \cdot 8 = 78{,}464 \cdot 4 = 313{,}856$ Metern.

Soll nicht die Summe der n ersten Glieder der Reihe, sondern die der n Glieder, welche auf das $p$te Glied zunächst folgen, berechnet werden, so kann man das $p+1$te Glied als das Anfangsglied der Formeln (2) und (3), das $p+n$te Glied als das $n$te ansehen, oder auch von der nach diesen Formeln berechneten Summe der $p+n$ ersten Glieder die der p ersten subtrahiren.

Eine Formel für die Summe, wie (2) oder (3) wird auch das Summenglied einer Reihe genannt.

Die Formeln (1)—(3) gestatten zugleich die Auflösung der Umkehrungen der im Vorstehenden durch sie gelösten Aufgaben, oder mit anderen Worten, dieselben sind nicht sowol als Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten a_n und S_n, als vielmehr als Beziehungsgleichungen zwischen den fünf Grössen a, d, n, a_n, S_n zu betrachten, welche die Berechnung jeder beliebigen zwei von diesen Grössen aus den gegebenen Werthen der drei anderen gestatten, indem man sie eventuell nur auf jene gesuchten Grössen als Unbekannte aufzulösen hat.

Wählt man hiernach aus jenen fünf Grössen auf alle möglichen Arten zwei als die zu berechnenden aus, so erhält man im Ganzen 10 Aufgaben, nämlich ausser der schon gelösten, in welcher a_n und S_n gesucht wurden, noch die folgenden neuen, in welchen die gesuchten Unbekannten bezüglich

1) a_n, a; 2) a_n, d; 3) a_n, n; 4) S_n, a; 5) S_n, d; 6) S_n, n; 7) a, d; 8) a, n; 9) d, n sind. Im Folgenden sollen zunächst diese neun Aufgaben mit entsprechender Numerirung behandelt werden.

In den Aufgaben 1)—3) kann bezüglich die Unbekannte a, d und n durch Auflösung der Gleichung (2) auf dieselbe gefunden werden, und die Gleichung (1) ergiebt dann a_n. In dem Falle 3), in welchem n unbekannt ist, wird die Gleichung (2) eine quadratische, in den anderen Fällen ist sie vom ersten Grade. — Entsprechend kann in den Aufgaben 4)—6) zuerst die Unbekannte a, bezw. d oder n aus (1) berechnet und dann S_n aus (2) oder (3) gefunden werden. Bei 5) kann S_n auch kürzer direct aus (3) berechnet werden. Bei 7) findet man a aus (3), darauf d aus (1) oder (2); bei 8) sind die zwei Gleichungen (1) und (3) auf die Unbekannten aufzulösen, wobei die Eliminationsgleichung vom zweiten Grade wird; bei 9) endlich liefert (3) den Werth von n und darauf (1) oder (2) den Werth von d. — Beispiele: Heis, § 81, No. 1—18; § 82, No. 1—13. Bardey XXXII A.

§ 64. Geometrische Reihen.

1. Eine geometrische Reihe ist eine solche, bei welcher jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden durch Multiplication des letzteren mit einer und derselben Zahl entsteht, oder mit anderen Worten, bei welcher der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder (das vorhergehende als Divisor genommen) einen und denselben Werth hat. Diesen letzteren nennt man den Quotient (vielfach auch den Exponent) der Reihe.

Ist a das Anfangsglied, q der Quotient einer geometrischen Reihe, so ist das zweite Glied gleich aq, das dritte gleich aq^2, das vierte gleich aq^3, u. s. w., also das allgemeine Glied

$$a_n = aq^{n-1} \quad (4)$$

Das Summenglied einer geometrischen Reihe ergiebt sich aus folgender Ableitung: Es ist

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}, \text{ also}$$
$$q \cdot S_n = \quad aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n; \text{ daher}$$
$$S_n - q\,S_n = a \qquad\qquad - aq^n, \text{ oder}$$

$$S_n(1-q) = a(1-q^n), \quad \text{mithin}$$
$$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (5).$$

wofür man auch $S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ schreiben kann. In der letzteren Gestalt wird man die Formel für $q > 1$, in der ersteren für $q < 1$ anwenden.

Die durch die Gleichungen (4) und (5) angegebenen Beziehungen zwischen den 5 Grössen a, q, n, a_n, S_n führen auch hier zu der allgemeineren Aufgabe, je zwei derselben aus den übrigen zu berechnen, und diese Aufgabe ergiebt wieder im Einzelnen neun neue Aufgaben:

Sollen 1) a_n und a aus n, q, S_n berechnet werden, so findet man leicht a aus (5) und dann a_n aus (4). Entsprechendes gilt, wenn 2) a_n und n gesucht sind. In diesem Falle ist die Gleichung (5) in Beziehung auf n eine Exponentialgleichung und kann mit Hülfe der Logarithmen nach Anhang 4 aufgelöst werden. Sollen dagegen 3) a_n und q berechnet werden, so ist die Gleichung (5) für q anscheinend vom $n$ten Grade. Da jedoch $\frac{1-q^n}{1-q}$ sich wieder durch die Summe $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ darstellen lässt, so hat man in Wirklichkeit nur eine Gleichung $n - 1$ten Grades. — Eine allgemeine Auflösung dieser besonderen Aufgabe ist daher nur möglich, so lange n nicht grösser als 5 ist. Es seien ferner 4) S_n und a gesucht, so ergiebt sich leicht a aus (4) und dann S_n aus (5). Sind 5) S_n und n gesucht, so ergiebt sich n aus der Exponentialgleichung (4) mittelst der Logarithmen, und dann wieder S_n aus (5). Sollen 6) S_n und q berechnet werden, so kann die in Beziehung auf q reine Gleichung $n - 1$ten Grades (4) aufgelöst werden, und man erhält darauf wieder S_n aus (5). Um 7) a und n zu berechnen, kann man n eliminiren, indem man in (5) für q^n aus (4) $q \cdot q^{n-1} = q \cdot \frac{a^n}{a}$ einsetzt. Die Eliminationsgleichung für a wird vom ersten Grade, und man erhält dann n am einfachsten aus (4) mittelst der Logarithmen. Werden 8) a und q gesucht, so kann man a eliminiren, die Eliminationsgleichung wird jedoch, ähnlich wie bei 3), vom $n$ten Grade und bietet daher dieselben Schwierigkeiten, wie dort. Sind endlich 9) n und q die gesuchten Unbekannten, so führt dasselbe Verfahren, wie bei 7) zur Elimination von n und damit zu einer Gleichung ersten Grades für q, nach dessen Berechnung n wieder aus (4) erhalten werden kann. Heis, § 83, No. 1—4, 9—21; § 84, No. 1—5. Bardey XXXIII, 1—80.

2. Eine Reihe heisst allgemein eine steigende, wenn jedes folgende Glied derselben grösser, und eine fallende, wenn dasselbe kleiner als das vorhergehende ist. Während eine arithmetische Reihe bei einer positiven Differenz steigend, bei einer negativen fallend ist, ist eine geometrische steigend oder fallend, je nachdem ihr Quotient q grösser oder kleiner als 1 ist. — Die Annahme $q = 1$ braucht nicht gemacht zu werden, da dieselbe auf eine Reihe einander gleicher Zahlen führt.

Die Anzahl der Glieder einer Reihe kann entweder bis in's Unendliche wachsend, oder sie kann als eine endliche angenommen werden. Man unterscheidet hiernach unendliche und endliche Reihen.

Setzt man in der Summenformel

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

der geometrischen Reihen die Anzahl n der Glieder unendlich gross, so wird q^n ebenfalls unendlich gross, wenn $q > 1$ ist. Ist dagegen q ein echter Bruch, so werden die Potenzen von q bei wachsenden Exponenten n beständig kleiner, und nähern sich, wenn n bis in's Unendliche wachsend gedacht wird, ohne Ende der Grenze Null. Daher erhält man für diesen Fall auch für die Summe S der Reihe den genau bestimmten endlichen Grenzwerth $a \cdot \frac{1-0}{1-q}$, oder

$$S = \frac{a}{1-q} \quad (6).$$

Um die Bedeutung dieser Formel vollständig klar zu stellen, kann das Beispiel der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{etc. in infinitum}$$

dienen, deren Quotient q gleich $\frac{1}{2}$ ist, und für welche sich aus der Formel (6) der Summenwerth 2 ergiebt. Nimmt man bloss das erste Glied 1, so fehlt an dieser Summe noch 1; das zweite Glied fügt die Hälfte dieses fehlenden Restes hinzu, und es fehlt also nach Summirung der zwei ersten Glieder noch die zweite Hälfte desselben, also $\frac{1}{2}$. Addirt man noch das dritte Glied, welches wieder die Hälfte des vorhergehenden Restes beträgt, so bleibt auf's Neue die Hälfte des letzteren, also $\frac{1}{4}$, als Differenz zwischen der erhaltenen Summe S_3 und der Summe 2. In gleicher Weise ist S_4 um $\frac{1}{8}$, S_5 um $\frac{1}{16}$ u. s. w. kleiner als 2. Hiernach kommt man durch Summirung der Glieder der vorstehenden Reihe dem Werthe 2 um so näher, je grösser die Anzahl der addirten Glieder ist. Man kann sich ferner diesem Werthe bis ins Unendliche nähern, d. h. es lässt sich keine Zahl angeben, welche so klein ist, dass der Unterschied der genannten Summe von 2 nicht durch Addirung einer bestimmten Anzahl von Gliedern noch kleiner gemacht werden kann. Da nämlich die Summe S_{n+1} der $n+1$ ersten Glieder von 2 nur um $\frac{1}{2^n}$ verschieden ist, so kann man, wenn ε irgend eine beliebig gewählte kleine Zahl bedeutet, stets n so bestimmen, dass dieser Unterschied $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ist, da zu diesem Zwecke nur $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, oder $n > (-\log \varepsilon) : \log 2$ angenommen zu werden braucht. — Die Zahl 2 hat also hier die Bedeutung eines Grenzwerthes, welchem man sich durch Addirung von Gliedern jener Reihe bei wachsender Anzahl dieser Glieder mehr und mehr nähert, welchem man ferner auf diese Weise über jeden bestimmten Betrag hinaus, also bis in's Unendliche nahe kommen kann, welcher jedoch niemals wirklich erreicht wird, sobald man die zu summirende Reihe bei irgend einem Gliede abbricht. Eben diese Eigenschaften drückt man dadurch aus, dass man sagt, die Zahl 2, oder allgemein der durch die Formel (6) angegebene Werth sei die Summe der unendlichen Reihe.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Meinung falsch ist, eine Summe unzählig vieler Grössen müsse stets unendlich gross sein; eine solche Summe kann vielmehr einen genau bestimmten, endlichen Werth haben. Hierzu ist allerdings mindestens erforderlich, dass die Summanden eine Reihe immer kleiner werdender und bis in's Unendliche abnehmender Werthe bilden.

Eine jede unendliche Reihe, welche einen endlichen Summenwerth hat, heisst convergent; eine solche, deren Summe unendlich gross ist, heisst divergent. Die Summe einer divergenten Reihe darf als eine unendlich grosse Zahl nicht nach den Operationsgesetzen der Arithmetik behandelt werden und ist

daher aus allen Rechnungen auszuschliessen. Deshalb ist bei jeder unendlichen Reihe die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen dieselbe convergire oder divergire, von besonderer Wichtigkeit. Für die geometrischen Reihen entscheidet sich dieselbe nach dem Vorstehenden dahin, dass dieselben convergiren, wenn der Quotient kleiner als 1, und dass sie divergiren, wenn der Quotient grösser als 1 ist, oder dass fallende geometrische Reihen stets convergent, steigende stets divergent sind.

Es mag schon hier vor dem Fehlschluss gewarnt werden, welcher in einer Uebertragung dieser Sätze auf Reihen jeder Art liegen würde. Allerdings gilt es, wie leicht einzusehen, ganz allgemein, dass steigende Reihen stets divergiren; dagegen kann eine Reihe fallen, ohne convergent zu sein, wie das Beispiel der Reihe

$$3,\ 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{16},\ \ldots .$$

zeigt, deren einzelne Glieder fortwährend abnehmen, jedoch stets grösser als 2 bleiben, und deren Summe daher stets grösser als $n \cdot 2$, also für $n = \infty$ selbst unendlich gross ist. Es ist also zur Convergenz einer Reihe nöthig, dass die Glieder derselben über jede Grenze hinaus, also bis in's Unendlich-Kleine abnehmen; aber auch die Erfüllung dieser Bedingung sichert noch nicht die Convergenz der Reihe. Dies lässt sich u. A. durch folgendes Beispiel zeigen: In der Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots .$$

ist die angegebene Bedingung erfüllt. Vergrössert man nun die Nenner einzelner Glieder, so werden diese Glieder, und mithin wird auch die Summe der Reihe kleiner. Es ist also

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \text{ d. i.} > \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}, \text{ d. i.} > \tfrac{1}{2}.$$

Ebenso ist die Summe der acht folgenden Glieder von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{16}$ grösser als $8 \cdot \frac{1}{16}$, d. i. grösser als $\frac{1}{2}$, und da man dieses Verfahren in der unendlichen Reihe unendlich weit fortsetzen kann, so folgt, dass die Summe der letzteren grösser als $\frac{1}{2} \cdot \infty$, d. i. unendlich gross sein muss.

Die Frage, ob eine vorliegende unendliche Reihe convergire oder divergire, erfordert daher im Allgemeinen zu ihrer Beantwortung weitergehende Untersuchungen; für die bisher behandelten besonderen Arten von Reihen dagegen erledigt sich dieselbe auf sehr einfachem Wege: Für arithmetische Reihen ist leicht ersichtlich, dass dieselben stets divergiren, für geometrische giebt die Formel (6) ausser der schon ausgeführten Beantwortung jener Frage auch noch den Werth der Summe der unendlichen Reihe.

Als ein Beispiel der Anwendung der Formel (6) diene das bekannte Sophisma des Zeno »Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von 1 Stadium vor ihm hergeht, mit zwölfmal grösserer Geschwindigkeit. Kommt Achilles an der Stelle an, wo die Schildkröte zu Anfang sich befand, so ist diese um $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadium, so wird die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium weiter sein u. s. w. Es wird also wol Achilles die Schildkröte nie erreichen, obschon er sich derselben immer nähert?« (Heis, § 84, No. 13.) — Diese letztere Annahme stützt sich auf den Trugschluss, welcher die unendlich grosse Anzahl der Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \ldots$ mit dem endlichen Werth der Summe derselben verwechselt. Der letztere ist nach (6)

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11}.$$

Achilles wird also die Schildkröte einholen, wenn er $1\frac{1}{11}$ Stadium zurückgelegt hat.

Ein anderes Beispiel biete die geometrische Aufgabe: In ein Quadrat, dessen Seite gleich a gegeben ist, denke man sich einen (die Seiten desselben berührenden) Kreis, in diesen wieder ein Quadrat, in letzteres wieder einen Kreis beschrieben, u. s. f. bis in's Unendliche. Man berechne die Summe der Umfänge, sowie die der Flächeninhalte a) aller Quadrate, b) aller Kreise.

Es ist hier die Seite des zweiten Quadrates a_1 gleich $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, die des dritten $a_2 = \frac{1}{2}a_1\sqrt{2}$, u. s. w., ferner der Radius des ersten Kreises $r_1 = \frac{1}{2}a$, der des zweiten $r_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$, u. s. w., mithin die Summe der Umfänge a) der Quadrate gleich $4\left(a + \frac{1}{2}a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2} + \dots\right)$ $= \frac{4a}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{4a(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})}{1-\frac{1}{2}} = 4a(2+\sqrt{2})$, b) der Kreise gleich

$$2\pi\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \dots\right) = \frac{a\pi}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = a\pi(2+\sqrt{2}).$$

Ferner ist die Summe der Flächeninhalte a) der Quadrate gleich $a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \dots$ $= \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$, und b) die der Kreise gleich $\pi\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \dots\right) = \frac{a^2\pi}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^2\pi$.

Heis, § 84, No. 6—13. Bardey XXXIII, 81—87.

3. Während die Summe einer fallenden geometrischen Reihe sich nach dem Vorstehenden mit wachsender Gliederzahl mehr und mehr einer bestimmten Grenze nähert, so dass das Anwachsen der Summe bei dem Fortschreiten in der Reihe sich bis in's Unendliche verlangsamt, wächst die Summe einer steigenden geometrischen Reihe mit jedem neuen Gliede in beschleunigter Weise. Im Gegensatz zur arithmetischen Reihe, bei welcher das Wachsthum der Summe völlig gleichmässig erfolgt, kann daher die Summe einer steigenden geometrischen Reihe schon bei einer verhältnissmässig kleinen Gliederzahl einen das Vorstellungsvermögen weit überschreitenden Werth erhalten. In dieser Beziehung ist das sich an die Sage von der Erfindung des Schachbrettes anlehnende Beispiel (Heis, § 84, 1a) bekannt: Soll für das erste Feld ein Weizenkorn und für jedes folgende doppelt so viel als für das vorhergehende gegeben werden, so ergiebt sich für alle 64 Felder zusammen eine so grosse Menge von Weizenkörnern, dass mit denselben alles feste Land der Erde 9 Millim. hoch bedeckt werden könnte. Aehnliche Beispiele liefert die Natur in der colossalen Vermehrung lebender Wesen bei günstigen Bedingungen für ihre Entwicklung, wie z. B. der Infusionsthierchen durch fortgesetzt wiederholte Theilung derselben. Nimmt man an, dass alle Samen einer Pflanze oder alle Eier eines Thieres sich zu in gleicher Weise sich vermehrenden Individuen entwickelten, so würden — zumal da hier der Quotient der Reihe erheblich grösser als zwei wäre — die Nachkommen eines einzigen lebenden Paares in einer geringen Anzahl von Jahren die ganze Erde für sich allein in Anspruch nehmen.

4. Eine andere Anwendung der geometrischen Reihe ergiebt sich in der Zinseszinsrechnung. Werden die nach Ablauf eines bestimmten Zeitraums, z. B. eines Jahres, fälligen Zinsen eines Kapitals K nicht erhoben, sondern am Ende dieses Zeitraums jedesmal zum Kapital hinzugefügt und also von da an ebenfalls verzinst, so sagt man, jenes Kapital sei auf Zinseszinsen ausgeliehen. Da nun jedes zu p Procent jährlich ausgeliehene Kapital K in diesem Zeitraume $\frac{K}{100}\cdot p$ Zinsen trägt, und also durch Hinzufügung der letzteren auf den Betrag $K + \frac{K}{100}p$ $= K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ anwächst, so erhält man den Gesammtbetrag am Ende eines jeden folgenden Jahres, indem man den entsprechenden vom Ende des diesem vorher-

gehenden mit $1+\frac{p}{100}$ multiplicirt. Die angewachsenen Kapitalien C_1, C_2, C_3, ... C_n bilden also eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $1+\frac{p}{100}$ und dem Anfangsglied $C_1 = K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Die Aufgabe, den Betrag C_n des angewachsenen Kapitals am Ende des $n$ten Jahres zu berechnen, ist also identisch mit der Bestimmung des $n$ten Gliedes dieser Reihe, oder wenn man das Anfangskapital K als erstes Glied der letzteren betrachten will, mit der Bestimmung des $n+1$ten Gliedes. Es ist demnach

$$C_n = K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \quad (7).$$

Diese Formel gilt selbstverständlich nicht nur für ausgeliehene Kapitalien, sondern allgemein für Grössen, welche sich innerhalb je eines bestimmten Zeitraums um einen bestimmten Procentsatz vermehren. n bedeutet allgemein die Anzahl der Zeiträume, nach deren jedem der Zuwachs mit dem vorhergehenden Bestand vereinigt wird, und p die Procente für einen solchen Zeitraum. Ist z. B. ein Kapital zu 4 Procent jährlich auf Zinseszinsen ausgeliehen, und fragt man, was aus demselben nach zehn Jahren geworden ist, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital hinzugefügt werden, so ist $p = 2$ und $n = 20$ zu setzen.

Die Formel (7) zeigt, dass das Endkapital C mit dem Wachsen von n nicht gleichmässig, sondern in mehr und mehr beschleunigtem Maasse wächst, da das oben über die Summe einer steigenden geometrischen Reihe Bemerkte sich auch auf die einzelnen Glieder einer solchen übertragen lässt. Bei grösseren Werthen von n kann man daher ein ausserordentlich starkes Anwachsen des ursprünglichen Kapitals erhalten. In dieser Beziehung ist das Beispiel bekannt, welches annimmt, dass ein Pfennig zur Zeit der Geburt Christi auf Zinseszinsen gelegt und bis in die Gegenwart verzinst worden sei. Für $p = 5$ und $n = 1878$ ergiebt sich

$$C = \frac{1}{100}\cdot 1{,}05^{1878} \text{ Mark,}$$

d. i. ein Betrag von über 62 Septillionen Mark. Bestände die Erdkugel aus reinem Golde, so hätte man über 21000 Millionen solcher Kugeln nöthig, um das Endkapital zu zahlen, und eine einzige, dem letzteren gleichwerthige Kugel aus Gold müsste einen Durchmesser haben, welcher ungefähr das Hundertfache der Entfernung des Mondes von der Erde betrüge.

Dieses staunenerregende Beispiel leitet übrigens zu einer zweifachen Bemerkung über die Bedeutung der Formel (7) hin. Bei Anwendung der letzteren wird vorausgesetzt, dass stets die sämmtlichen Zinsen eines Zeitraums in dem folgenden wieder verzinst, dass also auch von jedem beliebigen Bruchtheil einer Mark oder eines Pfennigs Zinsen gezahlt werden. In der Praxis findet dies bei ausgeliehenen Kapitalien nicht statt, und der zu Christi Geburt auf Zinseszinsen gelegte Pfennig würde daher in Wirklichkeit bis zum heutigen Tage nur der eine Pfennig geblieben sein, weil eine Berechnung von Zinsen und somit eine Hinzufügung derselben zum Kapital wegen ihrer Kleinheit niemals stattfinden würde. — Die Formel (7) ist daher beispielsweise nicht streng anwendbar für eine Sparkasse, welche zwar die Zinsen am Ende jedes Jahres wieder zum Kapital hinzufügt, aber nur volle Mark wieder verzinst. In diesem Falle hat man sich zur Berechnung der Zinsen besondere Tabellen anzulegen. In der Praxis pflegt die Anzahl n der Zeiträume jedoch wol niemals eine so hohe zu sein, dass sehr

erhebliche Differenzen gegen die Resultate der Formel (7) entstehen. Sind z. B. 1000 Mark zu 4 Procent auf 10 Jahre ausgeliehen, so erhält man für C_n das einemal 1480 Mark 4 Pfennige, das anderemal 1480 Mark 24 Pfennige.

Die andere Bemerkung, zu welcher die Berechnung des obigen und anderer Beispiele hinführt, ist die, dass bei grossen Werthen von n die gebräuchlichen Logarithmentafeln zu einer genauen Berechnung von C nicht hinreichen. Auch bei weniger hohen Exponenten entsteht eine Ungenauigkeit, indem die logarithmische Berechnung von $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ in Folge der Multiplication des abgekürzten Logarithmus mit n auch den Fehler desselben multiplicirt. Ist z. B. $n = 10$ und $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$ auf 5 Decimalen bekannt, so hat das Produkt nur noch eine Genauigkeit von 4 Decimalen, und man muss sich daher, wenn diese zu gering sein sollte, eines auf mehr Stellen berechneten Logarithmus von $1+\frac{p}{100}$ bedienen. Man vergl. HEIS, § 84, wo die zehnstelligen Logarithmen der betreffenden vorkommenden Zahlen angegeben sind. Nach erfolgter Multiplication ist selbstverständlich das Produkt wieder auf die sonst gebrauchte Anzahl von Stellen abzukürzen.

Die Formel (7) giebt die zwischen den Grössen C, K, p, n bestehende Beziehung an, und kann daher nicht bloss zur Berechnung von C, sondern auch umgekehrt zur Berechnung jeder einzelnen der übrigen von jenen Grössen aus den gegebenen Werthen der anderen dienen. Man hat sie zu diesem Zwecke nur jedesmal auf die gesuchte Unbekannte aufzulösen. Wird n gesucht, so hat man selbstverständlich zur Auflösung von beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen zu nehmen. Es ist ferner bei dieser Aufgabe, sowie wenn p gesucht wird, nicht nöthig, dass C und K einzeln gegeben sind, sondern es genügt, wenn das Verhaltniss derselben bekannt ist. So kann man z. B. fragen, für welchen Werth von n bei gegebenem Werthe von p, oder umgekehrt für welchen Werth von p bei gegebenem n ein Kapital sich verdoppele oder verdreifache. Soll beispielsweise das zu 5 Procent ausgeliehene Kapital sich verdoppeln, so hat man

$$2 = 1{,}05^n,$$

woraus $n = \log 2 : \log 1{,}05 = 14{,}2\ldots$, also etwas über 14 Jahre folgt.

Ist, wie hier, ein Kapital keine volle Anzahl der betreffenden Zeiträume ausgeliehen, ist also n eine gemischte Zahl, so kann die Formel (7) nur für die nächst kleinere ganze Zahl angewendet werden, und es sind für den überschiessenden Bruchtheil des Jahres oder sonstigen Zeitraums einfache Zinsen zu berechnen, da die Hinzufügung der Zinsen zum Kapital den Ablauf des betreffenden vollen Zeitraums voraussetzt. Ist also $n = a + \frac{b}{c}$ wo a eine ganze Zahl, $\frac{b}{c}$ einen echten Bruch bedeutet, so ist

$$C = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^a + K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^a\cdot\frac{p}{100}\cdot\frac{b}{c} = K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\cdot\frac{b}{c}\right)$$

Würde man auch hier nach der Formel (7) rechnen, so betrüge beispielsweise für $K = 100$ Mark, $p = 5$, $a = 10$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ die Differenz der beiden Endwerthe 0,05 Mark.

5. Es sei ferner angenommen, dass am Ende jedes einzelnen Zeitraums ausser den Zinsen noch jedesmal ein bestimmter Betrag a zu dem Kapital hinzugelegt

werde, und der Kürze halber die Grösse $1 + \frac{p}{100}$ durch q bezeichnet, so beträgt das Kapital am Ende des ersten Zeitraums $K \cdot q + a$, folglich am Ende des zweiten Zeitraums

$$(Kq + a)\, q + a = Kq^2 + aq + a,$$

am Ende des dritten

$$(Kq^2 + aq + a)\, q + a = Kq^3 + aq^2 + aq + a,$$

u. s. w., also am Ende des $n$ten Zeitraums

$$Kq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + aq + a.$$

Die auf das erste Glied dieses Ausdrucks folgenden bilden eine geometrische Reihe von n Gliedern, deren Summe sich nach (5) berechnet. Hiernach erhält man für diesen Fall

$$C_n = K \cdot q^n + a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{a \cdot 100}{p} \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] \quad (8)$$

oder auch $$C_n = q^n \left(K + \frac{a \cdot 100}{p}\right) - \frac{a \cdot 100}{p}. \quad (9)$$

Wird dagegen am Ende jedes Zeitraums der Betrag a weggenommen, so erhalt man durch eine entsprechende Entwicklung, oder kürzer indem man in den vorstehenden Formeln $-a$ statt a setzt,

$$C_n = K \cdot q^n - a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^n \left(K - \frac{a \cdot 100}{p}\right) + \frac{a \cdot 100}{p} \quad (10)$$

Ist hier a kleiner als der Zinsenbetrag des ersten Zeitraums, so ist die Reihe $C_1, C_2, C_3, \ldots$ eine steigende; ist a gleich diesem Betrag, also gleich $\frac{Kp}{100}$, so behält, wie selbstverständlich, das Kapital stets denselben Werth K. Ist dagegen a grösser als $\frac{Kp}{100}$, so nehmen die Endwerthe ab, und das ursprüngliche Kapital wird aufgezehrt sein, wenn $C_n = 0$, d. h. wenn

$$K \cdot q^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (11)$$

ist. — Auch die Formeln (8) — (11) können als Beziehungsgleichungen auf jede der in ihnen enthaltenen Buchstabengrössen als Unbekannte aufgelöst werden und somit zur Lösung der verschiedenen möglichen Umkehrungsaufgaben dienen. Die Bestimmung von q oder p kann dabei auf eine Gleichung höheren Grades führen.

Die vorstehenden Formeln finden Anwendung zur Berechnung von Renten, Rabatt und Disconto, bei Lebensversicherungen u. dgl. m.

Heis § 84, No. 14—69. Bardey XXXIV.

§ 65. Differenzreihen und höhere arithmetische Reihen.

Aus jeder gegebenen Reihe lässt sich eine neue Reihe dadurch ableiten, dass man jedes Glied der ersteren von dem folgenden subtrahirt. Mit der neuen Reihe kann dann wieder auf dieselbe Weise verfahren werden, u. s. w. Man nennt die so entstehenden Reihen Differenzreihen der ursprünglichen und unterscheidet dieselben bezüglich als erste, zweite, u. s. w., allgemein $n$te Differenzreihe. Hiernach ist die $n$te Differenzreihe die erste Differenzreihe der $n-1$ten und die $p$te der $n-p$ten.

Die im Vorhergehenden behandelte arithmetische Reihe kann hiernach als eine Reihe von der Eigenschaft erklärt werden, dass die Glieder ihrer ersten

Differenzreihe einander gleich, oder dass die Glieder ihrer zweiten und aller folgenden Differenzreihen gleich Null sind. Dies führt zu einer Erweiterung des Begriffs der arithmetischen Reihe, indem man unter einer solchen im weiteren Sinne eine Reihe versteht, für welche alle Glieder irgend einer Differenzreihe einander gleich sind. Man unterscheidet hierbei verschiedene Ordnungen und nennt eine Reihe eine arithmetische $n$ter Ordnung, wenn ihre $n$te Differenzreihe aus gleichen Gliedern besteht, oder wenn, was dasselbe ist, alle Gieder ihrer $n+1$ten (aber nicht die einer früheren) Differenzreihe gleich Null sind.

Hiernach erhält die früher im engeren Sinne so genannte arithmetische Reihe jetzt die Bezeichnung einer arithmetischen Reihe erster Ordnung. Die Differenzreihen einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung sind wieder arithmetische Reihen, und zwar ist die erste Differenzeihe einer Reihe $n$ter Ordnung eine solche $n-1$ter Ordnung u. s. w.

Es sei beispielsweise die Reihe

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 14 \quad 30 \quad 57 \quad 98 \ldots$$

gegeben, so ist die erste Differenzreihe derselben

$$1 \quad 3 \quad 8 \quad 16 \quad 27 \quad 41 \ldots,$$

die zweite Differenzreihe:

$$2 \quad 5 \quad 8 \quad 11 \quad 14 \ldots,$$

die dritte Differenzreihe:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \ldots,$$

also ist die gegebene Reihe eine arithmetische dritter Ordnung.

Im Folgenden sollen die Glieder einer Reihe, wie bisher, allgemein durch

$$a_1, \; a_2 \; a_3, \; \ldots \; a_n \;, \; \ldots$$

die ihrer ersten Differenzreihe durch

$$Da_1, \; Da_2, \; Da_3, \; \ldots, \; Da_n, \; \ldots,$$

die ihrer zweiten Differenzreihe durch

$$D^2a_1, \; D^2a_2, \; D^2a_3, \; \ldots \; D^2a_n, \; \ldots,$$

u. s. w., allgemein die der $p$ten Differenzreihe durch

$$D^pa_1, \; D^pa_2, \; D^pa_3, \; \ldots \; D^pa_n, \; \ldots$$

bezeichnet werden. Es ist also

$$Da_1 = a_2 - a_1; \quad Da_n = a_{n+1} - a_n,$$

$$D^2a_1 = Da_2 - Da_1, \text{ und allgemein: } D^m a_n = D^{m-1}a_{n+1} - D^{m-1}a_n.$$

Um hiernach irgend ein Glied einer Differenzreihe einer gegebenen Reihe unmittelbar aus Gliedern der letzteren zu berechnen, hat man

$$Da_n = a_{n+1} - a_n,$$

$$D^2a_n = Da_{n+1} - Da_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + a_n,$$

$$D^3a_n = D^2a_{n+1} - D^2a_n = (a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)$$
$$= a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so wird man durch die Analogie auf die Vermuthung geführt, dass allgemein

$$D^m a_n = a_{n+m} - \binom{m}{1} a_{n+m-1} + \binom{m}{2} a_{n+m-2} - \ldots + (-1)^m a_n \qquad (12)$$

sei, wo $\binom{m}{1}$, $\binom{m}{2}$ u. s. w. die Binomialcoefficienten zur $m$ten Potenz sind. Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel kann durch den Schluss von m auf $m+1$ leicht bewiesen werden, indem man ganz entsprechend, wie vorher,

$$D^{m+1}a_n = D^m a_{n+1} - D^m a_n$$

mittelst (12) entwickelt und zeigt, dass das Resultat demselben Bildungsgesetze,

wie (12) folgt. Da nun die letztere Formel für $m=3$ gilt, so muss sie auch für $m=4$, also weiter auch für $m=5$, u. s. w, richtig sein.

Um ferner das allgemeine Glied a_n der Reihe aus a_1 und den Anfangsgliedern der Differenzreihen zu berechnen, beachte man, dass

$a_2 = a_1 + Da_1$ (denn $Da_1 = a_2 - a_1$), ferner

$a_3 = a_2 + Da_2 = (a_1 + Da_1) + (Da_1 + D^2a_1)$ (denn $Da_2 - Da_1 = D^2a_1$), oder

$\quad = a_1 + 2\,Da_1 + D^2a_1$, ferner

$a_4 = a_3 + Da_3 = (a_1 + 2Da_1 + D^2a_1) + (Da_1 + 2\,D^2a_1 + D^3a_1)$

$\quad = a_1 + 3\,Da_1 + 3\,D^2a_1 + D^3a_1$ u. s. w.

also nach der Analogie

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} Da_1 + \binom{n-1}{2} D^2a_1 + \binom{n-1}{3} D^3a_1 + \ldots \quad (13)$$

ist, eine Formel, deren allgemeine Gültigkeit wieder durch den Schluss von n auf $n+1$ leicht bewiesen werden kann.

Um endlich auch das Summenglied aus denselben Werthen, wie vorher a_n, zu berechnen, bemerke man, dass

$a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + Da_1) = 2a_1 + Da_1$,

$a_1 + a_2 + a_3 = (2\,a_1 + Da_1) + (a_1 + 2\,Da_1 + D^2a_1) = 3a_1 + 3\,Da_1 + D^2a_1$,

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (3a_1 + 3\,Da_1 + D^2a_1) + (a_1 + 3\,Da_1 + 3\,D^2a_1 + D^3a_1)$

$\quad = 4a_1 + 6\,Da_1 + 4\,D^2a_1 + D^3a_1$

u. s. w. ist, bilde wieder nach der Analogie die Formel

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} Da_1 + \binom{n}{3} D^2a_1 + \binom{n}{4} D^3a_1 + \ldots \quad (14)$$

und beweise die allgemeine Gültigkeit der Formel durch den Schluss von n auf $n+1$.

So erhält man beispielsweise für die oben angegebene Reihe

2, 3, 6, 14, 30, 57, 98, ...

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3,$$

$$S_n = n\cdot 2 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 3,$$

oder $\quad a_n = \frac{1}{2}(n^3 - 4n^2 + 7n)$, $S_n = \frac{1}{24}(3n^4 - 10n^3 + 21n^2 + 34n)$.

Die vorstehenden Formeln gelten allgemein für Reihen jeder Art; bei den arithmetischen tritt nur die Vereinfachung ein, dass die Reihe der Grössen Da_1, D^2a_1 u. s. w. bei irgend einem Gliede abbricht, die allgemeinen Ausdrücke für a_n und S_n also stets begrenzt sind. Hieraus geht hervor, dass das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe $m$ter Ordnung sich stets als ein Ausdruck von der Form

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \ldots + \alpha_m n^m \quad (15)$$

und das Summenglied einer solchen als ein Ausdruck von der Form

$$S_n = \beta_1 n + \beta_2 n^2 + \ldots + \beta_m n^m + \beta_{m+1} n^{m+1} \quad (16)$$

darstellen lässt.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass jede Reihe, deren allgemeines Glied die Form (15), oder deren Summenglied die Form (16) hat, eine arithmetische Reihe $m$ter Ordnung ist. Ist nämlich die erstere Voraussetzung erfüllt, so ist

$$\begin{aligned} Da_n = a_{n+1} - a_n &= \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)^2 + \ldots + \alpha_m(n+1)^m \\ &\quad - \alpha_0 - \alpha_1 n - \alpha_2 n^2 - \ldots - \alpha_m n^m \\ &= \alpha_1 + \alpha_2(2n+1) + \ldots + \alpha_m(mn^{m-1} + \ldots), \end{aligned}$$

also Da_n von der Form

$$\gamma_0 + \gamma_1 n + \ldots + \gamma_{m-1} n^{m-1}.$$

Hieraus ergiebt sich in gleicher Weise, dass $D^2 a_n$ die Form

$$\delta_0 + \delta_1 n + \ldots + \delta_{m-2} n^{m-2}$$

hat, u. s. w., sodass endlich $D^m a_n$ einen für jeden Werth von n constant bleibenden Werth μ_0 haben muss.

Hat ferner das Summenglied einer Reihe die Form (16), so folgt aus

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

leicht, dass a_n die Form (15) haben muss, so dass der Beweis auf den vorhergehenden zurückgeführt ist.

Aus dem Vorstehenden folgt beispielsweise, dass die $m$ten Potenzen der Reihe der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe $m$ter Ordnung bilden, denn es ist für dieselben $a_n = n^m$. So ist also die Reihe der Quadratzahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$$

eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. In der That sind ihre Differenzreihen:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$$

Man hat hiernach in den Differenzreihen ein Mittel, die Quadrate der Zahlen — und ebenso andere Potenzen derselben — successive durch Addition zu berechnen.

Ebenso bilden die $m$ten Potenzen der Glieder einer jeden arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \text{u. s. w.}$$

eine arithmetische Reihe $m$ter Ordnung, denn es ist für dieselben

$$a_n = [a + (n-1)\,d]^m = (a-d)^m + m\,(a-d)^{m-1} d \cdot n + \ldots + d^m \cdot n^m.$$

Allgemein bilden, wie entsprechend bewiesen werden kann, die $m$ten Potenzen einer arithmetischen Reihe $r$ter Ordnung eine arithmetische Reihe der $m \cdot r$ten Ordnung.

Es mögen schliesslich noch folgende Sätze Erwähnung finden, welche nach dem Vorigen ebenfalls leicht bewiesen werden können:

Verbindet man die gleichstelligen Glieder zweier oder mehrerer arithmetischer Reihen in gleicher Weise durch Addition oder Subtraction, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnungsexponent gleich demjenigen der höchsten der verbundenen Reihen ist.

Multiplicirt man die gleichstelligen Glieder zweier oder mehrerer arithmetischer Reihen mit einander, so entsteht eine arithmetische Reihe, deren Ordnungsexponent gleich der Summe der Ordnungsexponenten der ursprünglichen Reihen ist.

§ 66. Summenreihen. Figurirte Zahlen.

Bildet man zu einer gegebenen Reihe nach einander die Werthe S_1, S_2, S_3, u. s. w. ihres Summengliedes, so erhält man eine neue Reihe, welche die Summenreihe erster Ordnung der gegebenen heisst. Verfährt man mit dieser in gleicher Weise, so erhält man die Summenreihe zweiter Ordnung der ursprünglichen. Allgemein ist die Summenreihe $m$ter Ordnung einer gegebenen Reihe die erste Summenreihe der Summenreihe $m-1$ter Ordnung derselben. Diese neuen Reihen unterscheiden sich offenbar von den Differenzreihen nur durch die umgekehrte Art ihrer Entstehung.

Ist die ursprüngliche Reihe eine arithmetische, so sind ihre Summenreihen arithmetische Reihen höherer Ordnungen. Ist insbesondere die ursprüngliche eine arithmetische erster Ordnung mit dem Anfangsglied 1 und ihre Differenz d

eine ganze Zahl, so erhält man auf diesem Wege die Reihen der figurirten Zahlen (im weiteren Sinn). Diese sind also

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1+d, & 1+2d, & 1+3d, & 1+4d, & \ldots \\ 1, & 2+d, & 3+3d, & 4+6d, & 5+10d, & \ldots \\ 1, & 3+d, & 6+4d, & 10+10d, & 15+20d, & \ldots \\ 1, & 4+d, & 10+5d. & 20+15d, & 35+35d, & \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Ist hierbei insbesondere auch $d = 1$, so erhält man die figurirten Zahlen im engeren Sinn. Die Reihen der letzteren sind also:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ 1, & 3, & 6, & 10, & 15, & \ldots \\ 1, & 4, & 10, & 20, & 35, & \ldots \\ 1, & 5, & 15, & 35, & 70, & \ldots \\ 1, & 6, & 21, & 56, & 126, & \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Da alle diese Reihen arithmetische von bestimmten Ordnungen sind, so gelten für dieselben auch die in § 65 abgeleiteten Formeln für a_n und S_n.

Die Reihe der figurirten Zahlen zweiter Ordnung im weiteren Sinn, also die Reihe

$$1, \quad 2+d, \quad 3+3d, \quad 4+6d, \quad 5+10d, \quad \ldots$$

heisst auch die Reihe der Polygonalzahlen (oder Vieleckzahlen). Da ihre Differenzreihen

$$\begin{array}{lllll} 1+d, & 1+2d, & 1+3d, & 1+4d, & \ldots \\ d, & d, & d, & & \ldots \end{array}$$

sind, so findet man nach § 65 (13) und (14)

$$a_n = 1 + \binom{n-1}{1}(1+d) + \binom{n-1}{2} d, \quad \text{oder } a_n = (1 - \tfrac{1}{2}d)\, n + \tfrac{1}{2} d n^2,$$

$$\text{und } S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(1+d) + \binom{n}{3} d = \frac{(3-d)\, n + 3n^2 + dn^3}{6}.$$

Der Name Polygonalzahlen rührt daher, dass diese Reihe für $d = p - 2$ die Reihe derjenigen Anzahlen von Flächengrössen ist, welche sich in Form eines regelmässigen p = Ecks nebeneinander legen lassen. So entsteht für $d = 1$ die Reihe der Dreieckszahlen (Trigonalzahlen):

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, \ldots,$$

welche den Anzahlen der Punkte in folgenden Figuren bezüglich gleich sind;

Für $d = 2$ erhält man die Reihe der Viereckzahlen (Tetragonal- oder Quadratzahlen):

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots,$$

für $d = 3$ die Reihe der Fünfeckzahlen:

$$1, \quad 5, \quad 12, \quad 22, \quad 35, \ldots,$$

u. s. w.

In entsprechender Weise heissen die figurirten Zahlen der dritten Ordnung

$$1, \quad 3+d, \quad 6+4d, \quad 10+10d, \quad 15+20d, \text{ u. s. w.}$$

auch **Pyramidalzahlen**, weil sie die Anzahlen von Körpergrössen angeben, die sich bezüglich in drei-, vier- oder mehrseitigen Pyramiden aufeinander schichten lassen. Man erhält für sie, entsprechend wie vorher,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,d = \frac{(3-d)\,n + 3n^2 + dn^3}{6}.$$

Insbesondere ist die Reihe der Trigonal-Pyramidalzahlen ($d=1$),

$$1, \quad 4, \quad 10, \quad 20, \quad 35, \quad 56, \quad \ldots,$$

die der Tetragonal-Pyramidalzahlen ($d=2$),

$$1, \quad 5, \quad 14, \quad 30, \quad 55, \quad 91, \quad \ldots,$$

u. s. w.

Es sei, um eine Anwendung der vorstehenden Reihen zu zeigen, die Aufgabe zu lösen:

Wieviel Kanonenkugeln befinden sich in einer unvollständigen dreiseitigen Pyramide, wenn an jeder Seite der untersten Schicht m und an jeder Seite der obersten Schicht n Kugeln liegen? (Heis § 93, No. 12.)

Hier ist die Differenz des $m$ten und des $n-1$ten Gliedes der Reihe der Trigonal-Pyramidalzahlen zu bilden; nach der obigen Formel ergiebt sich dieselbe gleich

$$\frac{2m + 3m^2 + m^3}{6} - \frac{2(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3}{6}$$

also z. B. für $m = 20$, $n = 5$ gleich 1520.

Heis § 93. Bardey XXXII, B.

Kapitel 11.

Elemente der Theorie der Determinanten.

§ 67. Begriff der Determinante.

1. Bereits in § 49 wurde bei Gelegenheit der Auflösung zweier Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten der Begriff der Determinante von vier Elementen aufgestellt, und weiterhin wurde auf die mögliche Ausdehnung der betreffenden Erörterung auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen und Unbekannten hingedeutet. Führt man diese Andeutung nacheinander für Gleichungen mit drei, vier, fünf Unbekannten aus, so liefern die betreffenden allgemeinen Auflösungsformeln dieser Gleichungen gewisse aus den gegebenen Coefficienten der letzteren in gesetzmässiger Weise gebildete Ausdrücke. Im Nachfolgenden soll der Kürze und Allgemeinheit der Darstellung wegen der umgekehrte Gang eingeschlagen, also nach erfolgter Angabe des Bildungsgesetzes und der wichtigsten Eigenschaften der betreffenden Ausdrücke gezeigt werden, dass dieselben, neben anderen Anwendungen, in der Theorie der Gleichungen eine wesentliche Rolle spielen.

Sind mehrere Gruppen von Grössen (Zahlen) gegeben, so kann man die einzelnen Grössen, welche man auch die **Elemente** jener Gruppen nennt, sich in aufeinander folgenden Horizontalreihen (Zeilen) geordnet denken, so dass jede Zeile die Elemente einer Gruppe nach ihrer Ordnung enthält und die gleichstelligen Elemente der verschiedenen Gruppen demnach in je einer Verticalreihe (Colonne) untereinander zu stehen kommen. Es empfiehlt sich dabei, zu leichterer Uebersicht die Elemente durch Buchstaben mit doppelten Indices zu bezeichnen,

so dass der eine Index die jedesmalige Zeile, der andere die Colonne angiebt, welcher das Element angehört. So ist z. B.

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{matrix}$$

ein in dieser Weise bezeichnetes System von Elementen. Allgemein soll im Folgenden a_i^k das $k$te Element der $i$ten Zeile oder, was dasselbe ist, das $i$te Element der $k$ten Colonne, oder mit noch anderen Worten dasjenige Element bezeichnen, welches an der Stelle steht, wo die $i$te Zeile und die $k$te Colonne einander durchschneiden.

Wo eine Verwechselung der oberen Indices mit Exponenten von Potenzen möglich ist, kann statt a_k^i auch $a_{i,k}$ geschrieben werden.

Es sei ferner zunächst vorausgesetzt, dass alle Horizontalreihen des Systems gleich viele Elemente enthalten, und dass auch die Anzahl dieser Reihen gleich derjenigen der Colonnen, die Anzahl der Elemente also, wie in dem vorstehenden Beispiel, eine Quadratzahl sei.

2. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, alle möglichen Combinationen von Elementen eines derartigen Systems anzugeben, welche so gebildet sind, dass jede Combination aus jeder Zeile und aus jeder Colonne ein und nur ein einziges Element enthalte.

Um diese Combinationen vollständig und in geordneter Reihenfolge zu bilden, kann man als die erste derselben diejenige der vom ersten Element der ersten bis zum letzten Element der letzten Zeile gehenden Diagonalreihe

$$a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 \; a_4^4 \; . \; . \; . \; a_n^n \qquad (1)$$

annehmen und aus dieser alle übrigen dadurch ableiten, dass man entweder ihre unteren oder ihre oberen Indices auf alle möglichen Weisen permutirt. Denn permutirt man z. B. die unteren Indices, so liefern die geordnet auf einander folgenden oberen Indices die Gewähr, dass jedesmal aus jeder Colonne ein und nur ein einziges Element vorkomme; da ferner auch bei den unteren Indices niemals zwei gleiche vorkommen und alle n verschiedenen zugleich vorhanden bleiben, so ist die gleiche Gewähr für die Zeilen geleistet. Die Verschiedenheit und Vollständigkeit der Permutationen endlich sorgt dafür, dass jede mögliche Auswahl der Elemente in der gedachten Art einmal und nur ein einziges Mal vorkomme.

Man ersieht hieraus zugleich, dass jede der angegebenen Combinationen n Elemente enthält, und dass die Anzahl derselben gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$ ist.

Bildet man aus den Elementen jeder derartigen Combination eines Systems von n^2 Elementen als aus Faktoren ein Produkt und giebt jedem dieser Produkte das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Anzahl der Inversionen in der betreffenden Permutation der Indices eine gerade oder ungerade ist (vergl. § 59), so heisst das Aggregat aller dieser Produkte die Determinante des Systems der n^2 Elemente.

Je nach dem Werthe von n heisst die Determinante eine solche zweiten, dritten u. s. w. $n$ten Grades.

Man kann hiernach die Determinante eines Systems von n^2 Elementen aus ihrem Anfangsgliede (1) durch Permutation sowol der unteren als der oberen Indices ableiten, und es entsteht somit die Frage, ob die Determinante in beiden Fällen auch denselben Werth erhalte. Dass man in dem einen wie in dem

anderen jede mögliche der gedachten Combinationen einmal und nur ein einziges Mal und somit auch in beiden dieselben Produkte erhält, ist aus dem Vorhergegangenen klar; es fragt sich also nur, ob auch ein und dasselbe Produkt in beiden Fällen stets dasselbe Vorzeichen erhalte. Es sei beispielsweise

$$- a_2^1\, a_5^2\, a_3^3\, a_1^4\, a_4^5$$

ein durch Permutation der unteren Indices abgeleitetes Glied einer Determinante, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, durch Permutation der oberen Indices dasselbe Glied in der Form

$$- a_1^4\, a_2^1\, a_3^3\, a_4^5\, a_5^2\,,$$

und die Frage ist also, ob die Permutationsform 41352 mit der ersteren 25314 übereinstimmend eine ungerade Anzahl von Inversionen hat oder nicht. Im vorliegenden Beispiel ergiebt sich, dass die Anzahl der Inversionen in beiden Fällen dieselbe ist, nämlich fünf. Um die Frage ganz allgemein zu entscheiden, genügt es zu zeigen, dass jedes Glied einer Determinante, welches sich aus einem andern durch Vertauschung zweier unteren Indices ableiten lässt, auch aus demselben Gliede durch Vertauschung von nur zwei oberen Indices erhalten werden kann. Da man nämlich alle Permutationen gegebener Elemente durch wiederholte Vertauschungen von je zwei Elementen bilden kann, und da bei jeder solchen Vertauschung die Anzahl der Inversionen sich um eine ungerade Zahl ändert, so muss auch die Anzahl der Inversionen in je zwei aus dem Anfangsgliede durch eine gleiche Reihe von Vertauschungen je zweier oberen oder unteren Indices ableitbaren Permutationen gleichzeitig gerad oder ungerad sein. Es sei nun

$$a_\alpha^1\, a_\beta^2 \ldots a_\delta^d \ldots a_\varepsilon^e \ldots a_\nu^n$$

irgend ein Glied einer Determinante, und man vertausche in demselben die unteren Indices δ und ε mit einander, so erhält man das Glied

$$a_\alpha^1\, a_\beta^2 \ldots a_\varepsilon^d \ldots a_\delta^e \ldots a_\nu^n.$$

Dasselbe Glied aber entsteht, wie man unmittelbar einsieht, aus dem vorhergehenden (nur mit anderer Reihenfolge der Faktoren) durch blosse Vertauschung der oberen Indices d und e, sodass also die Uebereinstimmung auch der Vorzeichen bewiesen ist.

3. Man bezeichnet eine Determinante abgekürzt, indem man das, wie oben gezeigt, geordnete System der Elemente zwischen zwei von oben nach unten verlaufende Striche, oder indem man das Anfangsglied mit doppeltem Vorzeichen hinter ein Summenzeichen Σ schreibt, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3.$$

Die letztere Bezeichnung ist deshalb ausreichend, weil durch das Anfangsglied alle folgenden Glieder bestimmt sind; das obere Zeichen ist dabei das Vorzeichen dieses Anfangsgliedes, das untere deutet den Wechsel der Vorzeichen in den folgenden Gliedern an. Bildet man die betreffenden Permutationen in der Weise, dass jede folgende aus der vorhergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen entsteht, so tritt dieser Wechsel regelmässig ein, d. h. die Vorzeichen der Glieder der Determinante sind abwechselnd + und —.

Beispielsweise ist

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 - a_2^1\, a_1^2 = a_1^1\, a_2^2 - a_1^2\, a_2^1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^1\, a_3^2\, a_2^3 + a_2^1\, a_3^2\, a_1^3 - a_2^1\, a_1^2\, a_3^3 + a_3^1\, a_1^2\, a_2^3 - a_3^1\, a_2^2\, a_1^3$$

$$\text{oder} = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^1\, a_2^3\, a_3^2 + a_1^2\, a_2^3\, a_3^1 - a_1^2\, a_2^1\, a_3^3 + a_1^3\, a_2^1\, a_3^2 - a_1^3\, a_2^2\, a_3^1.$$

$$\begin{aligned} \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4 = {} & a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4 - a_1^1\, a_2^2\, a_4^3\, a_3^4 + a_1^1\, a_3^2\, a_4^3\, a_2^4 - a_1^1\, a_3^2\, a_2^3\, a_4^4 \\ & + a_1^1\, a_4^2\, a_2^3\, a_3^4 - a_1^1\, a_4^2\, a_3^3\, a_2^4 + a_2^1\, a_4^2\, a_3^3\, a_1^4 - a_2^1\, a_4^2\, a_1^3\, a_3^4 \\ & + a_2^1\, a_3^2\, a_1^3\, a_4^4 - a_2^1\, a_3^2\, a_4^3\, a_1^4 + a_2^1\, a_1^2\, a_4^3\, a_3^4 - a_2^1\, a_1^2\, a_3^3\, a_4^4 \\ & + a_3^1\, a_1^2\, a_2^3\, a_4^4 - a_3^1\, a_1^2\, a_4^3\, a_2^4 + a_3^1\, a_2^2\, a_4^3\, a_1^4 - a_3^1\, a_2^2\, a_1^3\, a_4^4 \\ & + a_3^1\, a_4^2\, a_1^3\, a_2^4 - a_3^1\, a_4^2\, a_2^3\, a_1^4 + a_4^1\, a_3^2\, a_2^3\, a_1^4 - a_4^1\, a_3^2\, a_1^3\, a_2^4 \\ & + a_4^1\, a_2^2\, a_1^3\, a_3^4 - a_4^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_1^4 + a_4^1\, a_1^2\, a_3^3\, a_2^4 - a_4^1\, a_1^2\, a_2^3\, a_3^4. \end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Erklärungen und früheren Sätzen folgt leicht: Jede Determinante eines Systems von n^2 Elementen besteht aus $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$ Gliedern, von denen jedes ein Produkt von n Faktoren ist. Von diesen Gliedern ist die Hälfte positiv, die andere Hälfte negativ. Auf den Werth einer Determinante ist es ohne Einfluss, ob man die Zeilen mit den unteren und die Colonnen mit den oberen Indices bezeichnet, oder ob man umgekehrt verfährt, und zwei Systeme, welche so beschaffen sind, dass die Zeilen eines jeden mit den Colonnen des anderen in derselben Ordnung übereinstimmen, haben dieselbe Determinante.

§ 68. Vertauschung von Reihen.

1. Die Bildung einer Determinante aus dem gegebenen System ihrer Elemente wird wesentlich erleichtert durch die Kenntniss der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Determinanten, welche im Folgenden zunächst entwickelt werden sollen.

Vertauscht man in dem System der Elemente irgend zwei parallele Reihen mit einander, also entweder eine Zeile mit einer anderen Zeile oder eine Colonne mit einer anderen Colonne, so kann man die Determinante des neuen Systems aus derjenigen des alten dadurch ableiten, dass man in jedem einzelnen Gliede der letzteren die beiden betreffenden unteren oder oberen Indices mit einander vertauscht. Werden beispielsweise in

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^1\, a_3^2\, a_2^3 + a_2^1\, a_3^2\, a_1^3 - a_2^1\, a_1^2\, a_3^3 + a_3^1\, a_1^2\, a_2^3 - a_3^1\, a_2^2\, a_1^3$$

die dritte und die erste Zeile mit einander vertauscht, so wechseln in der Determinante nur die unteren Indices 3 und 1 in jedem Gliede ihre Stellen, und man erhält also

$$\begin{vmatrix} a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \end{vmatrix} = a_3^1\, a_2^2\, a_1^3 - a_3^1\, a_1^2\, a_2^3 + a_2^1\, a_1^2\, a_3^3 - a_2^1\, a_3^2\, a_1^3 + a_1^1\, a_3^2\, a_2^3 - a_1^1\, a_2^2\, a_3^3.$$

Es bleiben also in der neuen Determinante dem absoluten Werthe nach dieselben einzelnen Glieder, wie in der alten, aber die Vorzeichen derselben werden sämmtlich umgekehrt, denn die Vertauschung zweier Elemente einer Permutationsform bewirkt nach § 59 eine Veränderung der Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Bei Vertauschung zweier parallelen Reihen in dem System der Elemente behält also die Determinante denselben absoluten Werth und ändert ihr Vorzeichen.

Insbesondere folgt hieraus, dass jede Determinante, deren System der Elemente zwei einander gleiche parallele Reihen hat, den Werth Null haben muss, denn durch Vertauschung zweier gleichen Reihen kann die Determinante R keinerlei Aenderung erleiden, es muss also in diesem Falle $R = -R$ sein, woraus $R = 0$ folgt.

Nimmt man mehrere Male nach einander eine Vertauschung zweier parallelen Reihen in dem System der Elemente vor, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, immer dieselbe Determinante; das Vorzeichen aber ändert sich oder bleibt dasselbe, je nachdem die Anzahl der vorgenommenen Vertauschungen eine ungerade oder eine gerade ist.

2. Vertauscht man irgend eine Reihe des Systems mit einer angrenzenden parallelen Reihe, z. B. die 7te Zeile mit der 6ten, darauf die so vorgerückte Reihe wieder mit der folgenden, also in dem gewählten Beispiel die vorher in die 6te Stelle gerückte Zeile mit der 5ten, und fährt so beliebig weit fort (etwa bis zur 3ten Zeile), so gelangt die zuerst genannte (7te) Reihe schliesslich an eine andere Stelle (in die 3te), ohne dass die übrigen ihre Reihenfolge gegen einander verändert haben. Man würde dasselbe Resultat erhalten haben, wenn man die verschobene Reihe an ihrer ursprünglichen Stelle gestrichen und unmittelbar an der zuletzt einzunehmenden Stelle zwischen die übrigen eingeschoben hätte. Eine derartige Veränderung bewirkt also nur eine Umkehrung des Vorzeichens der Determinante, wenn die Anzahl jener Vertauschungen, oder was dasselbe ist, die Anzahl der zwischenliegenden Reihen eine ungerade, sie lässt den Werth der Determinante völlig unverändert, wenn jene Anzahl eine gerade ist.

Macht man also in der gedachten Weise die 7te Zeile zur 3ten, schiebt sie also vor der ursprünglich 3ten ein und lässt sie somit vier zwischenliegende Zeilen überspringen, so bleibt die Determinante dieselbe.

Man kann hiernach insbesondere jede (Horizontal- oder Vertical-)Reihe zur 1ten machen, ohne die Reihenfolge der übrigen zu verändern. War jene Reihe ursprünglich die $p$te, so werden $p-1$ parallele Reihen übersprungen, und die Determinante behält ihr Vorzeichen oder wechselt es, je nachdem p ungerad oder gerad ist.

Da man in dieser Weise nach einander jede beliebige Zeile zur 1ten Zeile und jede beliebige Colonne zur 1ten Colonne machen kann, so lässt sich das System der Elemente so umformen, dass irgend ein beliebiges Element a_i^k das Anfangs-Element wird. Man hat zu diesem Zwecke nur zuerst die $i$te Zeile zur 1ten Zeile und sodann die $k$te Colonne zur 1ten Colonne zu machen oder umgekehrt. Da dies den Erfolg von $i-1+k-1$ Vertauschungen hat, so folgt, dass die Determinante des neuen Systems denselben oder den entgegengesetzten Werth mit der ursprünglichen hat, je nachdem $i+k$ gerad oder ungerad ist. Bezeichnet man also die eine Determinante durch R, die andere durch R_1, so ist

$$R_1 = (-1)^{i+k} R.$$

§ 69. Unterdeterminanten.

1. Da jedes Glied einer Determinante aus jeder Reihe ein und nur ein einziges Element enthält, und da alle auf diese Weise möglichen Glieder vorkommen, so kann man die Glieder nach den Elementen irgend einer beliebigen Reihe ordnen, indem man alle diejenigen, welche dasselbe Element aus dieser Reihe enthalten, zusammenfasst.

So lässt sich beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile ordnen und in der Form

$$a_1^1 \cdot A_1 + a_1^2 \cdot A_2 + \dots + a_1^n A_n$$

schreiben, wo allgemein $a_1^k A_k$ die Zusammenfassung aller derjenigen Glieder bedeutet, welche aus der ersten Zeile das Element a_1^k enthalten. Um in diesem und ähnlichen Fällen die Coefficienten A unmittelbar zu bestimmen, sei zunächst dieser Coefficient für das Anfangselement a_1^1 zu ermitteln.

Da alle Glieder, welche dieses Element enthalten, weder aus der ersten Zeile, noch aus der ersten Colonne ein weiteres Glied enthalten können, dagegen a_1^1 in jeder möglichen Zusammenstellung mit je einem Gliede der übrigen Zeilen und der übrigen Colonnen vorkommen muss, so ergiebt sich, dass der gesuchte Coefficient die Determinante desjenigen Systems von Elementen sein muss, welches nach Streichung der ersten Zeile und der ersten Colonne übrig bleibt.

Jedes andere Element des ursprünglichen Systems kann aber nach dem Vorhergehenden zum Anfangs-Element desselben gemacht werden. Im Zusammenhang damit folgt nun, dass man den Coefficienten irgend eines Gliedes a_i^k in der ursprünglichen Determinante erhält, wenn man in dem System der Elemente die $i$te Zeile und die $k$te Colonne streicht, die Determinante des so übrig bleibenden Systems von $(n-1)^2$ Elementen entwickelt und derselben das Vorzeichen $+$ oder $-$ giebt, je nachdem $i+k$ gerad oder ungerad ist.

Jeder solche Coefficient heisst eine Unterdeterminante der ursprünglichen; die Unterdeterminante zum Element a_i^k soll im Folgenden durch A_i^k bezeichnet werden. — So ist beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^2 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{und ebenso} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{oder} = -a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_3^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^3 \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

Soll ferner beispielsweise die zum Gliede a_2^3 gehörige Unterdeterminante der Determinante $\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4$ bestimmt werden, so ergiebt sich

$$-\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix}.$$

Hiernach lässt sich jede Determinante leicht mittelst der Unterdeterminanten nach Gliedern einer und derselben Reihe entwickeln und ordnen. Die Coefficienten dieser einzelnen auf einander folgenden Glieder sind bei der angegebenen Bildungsweise abwechselnd positiv und negativ.

So erhält man z. B. durch Entwicklung nach den Gliedern der ersten Colonne

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 3, & 8 \\ 7, & 5, & 6, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \\ 5, & 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \end{vmatrix}.$$

Es ist aber in gleicher Weise

$$\begin{vmatrix} 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 4 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, & 1 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 6, & 1 \\ 1, & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (6-8) - 2 \cdot (36-2) + 8 (24-1) = +106,$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 2, & 1, & 4 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 4 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 1, & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6-8) - 2 (18-16) + 8 \cdot (12-8) = +24,$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 8, & 2, & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, & 1 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 6, & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (36-2) - 5 \cdot (18-16) + 8 \cdot (3-48) = -302,$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 8 \\ 5, & 6, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6, & 1 \\ 1, & 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 1, & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 8 \\ 6, & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (24-1) - 5 \cdot (12-8) + 2 \cdot (3-48) = -64,$$

mithin ist die obige Determinante gleich — 330.

2. Aus der angegebenen Bildungsweise der Determinanten mittelst der Unterdeterminanten, also aus der Entwicklung der ersteren in der Form

$$R = a_1^k\ A_1^k + a_2^k\ A_2^k + \ldots + a_i^k A_i^k + \ldots + a_n^k\ A_n^k, \text{ oder}$$
$$R = a_i^1\ A_i^1 + a_i^2\ A_i^2 + \ldots + a_i^k A_i^k + \ldots + a_i^n\ A_i^n$$

ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Sind alle Elemente einer Reihe mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so reducirt sich die Determinante auf das Produkt dieses einen Elements mit der zu ihm gehörigen Unterdeterminante.

Denn sind beispielsweise alle Elemente der Reihe $a_1^k, a_2^k, \ldots a_n^k$ mit Ausnahme von a_i^k gleich Null, so wird die erste der vorstehenden Entwicklungen zu

$$R = a_i^k\ A_i^k.$$

So ist also beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & f & g \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c & d \\ f & g \end{vmatrix}, \text{ und } \begin{vmatrix} a & b & 0 & d \\ e & f & g & h \\ i & k & 0 & m \\ n & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -g \begin{vmatrix} a & b & d \\ i & k & m \\ n & 0 & p \end{vmatrix}.$$

Die Elemente b, e im ersten und e, f, h im zweiten dieser Beispiele sind also ohne jeden Einfluss auf den Werth der Determinante, und man könnte also für dieselben beliebige andere Zahlen setzen, ohne dass dieser Werth sich änderte.

3. Multiplicirt man jedes Element einer Reihe mit der zu dem entsprechenden Element einer parallelen Reihe gehörenden Unterdeterminante, so ist die Summe aller dieser Produkte gleich Null.

Denn ist $a_1^k, a_2^k, a_3^k \ldots a_n^k$ die erstere, $a_1^\lambda, a_2^\lambda, a_3^\lambda \ldots a_n^\lambda$ die letztere Reihe so ist die Determinante

$$R = a_1^k\ A_1^k + a_2^k\ A_1^k + \ldots + a_n^k\ A_n^k,$$

und die Summe jener Produkte ist

$$a_1^\lambda\ A_1^k + a_2^\lambda\ A_2^k + \ldots + a_n^\lambda\ A_n^k.$$

Die letztere entsteht also aus jener, wenn man in dem System der Elemente an die Stelle der Reihe a_1^k, a_2^k u. s. w. die andere a_1^λ, a_2^λ u. s. w. setzt, oder sie ist die Determinante des so gebildeten neuen Systems. Da nun dieses letztere zwei einander gleiche parallele Reihen $a_1^\lambda, a_2^\lambda \ldots$ enthält, so ist der Werth seiner Determinante nach § 68 gleich Null.

Ganz ebenso folgt aus

$$R = a_i^1\ A_i^1 + a_i^2\ A_i^2 + \ldots + a_i^n\ A_i^n$$

die Gleichung

$$0 = a_m^1\ A_i^1 + a_m^2\ A_i^2 + \ldots + a_m^n\ A_i^n.$$

4. Addirt man zu jedem Element einer Reihe das entsprechende Element einer ihr parallelen Reihe, oder subtrahirt man die ersteren von den letzteren, so ändert sich der Werth der Determinante nicht.

Dieser Satz und sein Beweis können sogleich verallgemeinert werden, indem man statt der Glieder der addirten oder subtrahirten Reihe ihre Produkte mit einer und derselben beliebigen Zahl anwendet. Die nach den Elementen der ersteren Reihe geordnete, also z. B. in der Form

$$R = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k$$

geschriebene Determinante geht nämlich durch die angegebene Veränderung des Systems über in

$$R^1 = (a_1^k + \rho\, a_1^\lambda)\, A_1^k + (a_2^k + \rho\, a_2^\lambda)\, A_2^k + \ldots + (a_n^k + \rho\, a_n^\lambda)\, A_n^k$$

$$= a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k + \rho\,(a_1^\lambda A_1^k + a_2^\lambda A_2^k + \ldots + a_n^\lambda A_n^k).$$

Da nun das letzte in der Klammer enthaltene Aggregat nach dem vorigen Satze den Werth Null hat, so ergiebt sich

$$R^1 = a_1^k A_1^k + a_2^k A_2^k + \ldots + a_n^k A_n^k = R.$$

Der Werth einer Determinante ändert sich also nicht, wenn man in dem System der Elemente an Stelle jedes Gliedes einer beliebigen Reihe die Summe desselben Gliedes und des Produkts des entsprechenden Gliedes einer parallelen Reihe mit einem und demselben beliebigen Faktor setzt.

Dieser Satz ist besonders werthvoll zur Erleichterung der Berechnung der Determinanten bestimmter Zahlen, denn derselbe gestattet, an Stelle des Systems der Elemente andere, für die Berechnung bequemere Systeme zu setzen. So könnte man z. B. in dem System der oben berechneten Determinante

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 3, & 8 \\ 7, & 5, & 6, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \\ 5, & 8, & 2, & 6 \end{vmatrix}$$

durch Subtraction der Glieder der zweiten Colonne von den entsprechenden Gliedern jeder anderen Colonne das System

$$\begin{vmatrix} 2, & 2, & 1, & 6 \\ 2, & 5, & 1, & -4 \\ 1, & 2, & -1, & 2 \\ -3, & 8, & -6, & -2 \end{vmatrix}$$

aus diesem wieder durch Subtraction der dritten Colonne von allen übrigen, dann der ersten Zeile von allen übrigen, darauf wieder der ersten Zeile von der dritten und vierten die folgenden Systeme

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 1, & 4, & 1, & -5 \\ 2, & 3, & -1, & 3 \\ 3, & 14, & -6, & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 1, & 2, & -2, & -2 \\ 2, & 13, & -7, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 0, & 1, & -3, & -7 \\ 1, & 12, & -8, & -6 \end{vmatrix}$$

ableiten u. s. w. Bequemer wäre in der letzten dieser Umformungen, die erste Zeile vor der Subtraction von der vierten mit 2 zu multipliciren, wodurch man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 0, & 3, & 0, & -10 \\ 0, & 1, & -3, & -7 \\ 0, & 11, & -9, & -11 \end{vmatrix}$$

erhielte, welche sich sofort auf das Produkt ihres Anfangsgliedes 1 mit der Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} 3, & 0, & -10 \\ 1, & -3, & -7 \\ 11, & -9, & -11 \end{vmatrix}$$

reducirt.

5. Dieser letztere Erfolg lässt sich stets und von vorne herein erreichen, denn man kann, um z. B. für a_i^k Null zu erhalten, von den Elementen der Reihe $a_1^k, a_2^k, \ldots a_i^k, \ldots a_n^k$ die Produkte der Elemente von $a_1^\lambda, a_2^\lambda, \ldots a_i^\lambda, \ldots a_n^\lambda$ mit $\frac{a_i^k}{a_i^\lambda}$ abziehen, wodurch man statt a_i^k das neue Element $a_i^k - a_i^\lambda \cdot \frac{a_i^k}{a_i^\lambda} = a_i^k - a_i^k = 0$ erhält. — Um z. B. die vorstehende Determinante dritten Grades in dieser Weise zu behandeln, kann man, da schon ein Element der ersten Zeile gleich Null ist, diejenigen der ersten Colonne mit $\frac{10}{3}$ multipliciren und dann die Produkte zu denen der dritten Colonne addiren. Man erhält so

$$\begin{vmatrix} 3, & 0, & 0 \\ 1, & -3, & -\frac{11}{3} \\ 11, & -9, & +\frac{11}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3, & -\frac{11}{3} \\ -9, & +\frac{11}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \left\{-3 \cdot \tfrac{11}{3} - (-\tfrac{11}{3}) \cdot (-9)\right\}$$
$$= 3 \cdot (-77 - 33) = -3 \cdot 110 = -330.$$

Um ferner beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 5, & 9, & 2 \\ 2, & 4, & 10, & 1 \\ 3, & 3, & 11, & 6 \\ 4, & 8, & 7, & 3 \end{vmatrix}$$

zu berechnen, kann man die erste Colonne der Reihe nach mit 5, 9 und 2 multipliciren und dann entsprechend von der zweiten, dritten und vierten Colonne subtrahiren. Man erhält so

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -6, & -8, & -3 \\ 3, & -12, & -16, & 0 \\ 4, & -12, & -29, & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ -12, & -16, & 0 \\ -12, & -29, & -5 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man jetzt die erste Zeile der neuen Determinante mit 2 und subtrahirt von der zweiten und von der dritten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ 0, & 0, & +6 \\ 0, & -13, & +1 \end{vmatrix}$$

und hat nun die Wahl zwischen zwei Reihen, in denen alle Glieder ausser einem gleich Null sind. Man erhält

$$-6 \begin{vmatrix} 0, & +6 \\ -13, & +1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13 = -468 \text{ oder } -6 \begin{vmatrix} -6, & -8 \\ 0, & -13 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13$$
$$= -468.$$

Man kann nach diesen Beispielen das eingeschlagene Verfahren dahin aussprechen, dass man, um $n-1$ Elemente einer Zeile gleich Null zu machen,

die $n-1$ Colonnen, welche diese Elemente enthalten, durch das obige Verfahren zu verändern hat, indem man von jeder die Produkte der gleichstelligen Elemente einer parallelen Colonne mit einem geeigneten Faktor subtrahirt. Sollen dagegen $n-1$ Elemente einer Colonne zu Null werden, so hat man entsprechend mit den Zeilen zu verfahren.

6. Die Anordnung einer Determinante nach den Elementen einer Reihe und deren Unterdeterminanten führt ferner unmittelbar zu dem Satze:

Multiplicirt man alle Elemente einer Reihe mit einem und demselben Faktor, so wird dadurch die Determinante selbst mit diesem Faktor multiplicirt.

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man die neue Determinante nach den Elementen der multiplicirten Reihe ordnet.

Dieser Satz findet wieder wichtige Anwendungen zur Vereinfachung der Berechnung von Determinanten. Selbstverständlich wird auch durch Division aller Elemente einer Reihe durch eine und dieselbe Zahl die Determinante dividirt, da die Division durch ρ identisch ist mit der Multiplication mit $\frac{1}{\rho}$. Man kann daher jeden gemeinschaftlichen Faktor der Elemente einer Reihe absondern und als Faktor vor die Determinante setzen. So hätte man z. B. in der vorher berechneten Determinante

$$\begin{vmatrix} -6, & -8, & -3 \\ -12, & -16, & 0 \\ -12, & -29, & -5 \end{vmatrix}$$

zunächst den Faktor -6 der ersten Colonne absondern, und also

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1, & -8, & -3 \\ 2, & -16, & 0 \\ 2, & -29, & -5 \end{vmatrix}$$

schreiben können. Man kann ferner auch aus der zweiten Colonne den Faktor -1 absondern, wodurch sämmtliche Vorzeichen dieser Colonne und gleichzeitig das Vorzeichen der Determinante umgekehrt werden. Allgemein ergiebt sich der Satz:

Kehrt man die Vorzeichen sämmtlicher Elemente irgend einer Reihe um, so behält die Determinante denselben absoluten Werth und ändert ihr Vorzeichen.

Nimmt man in dem vorstehenden Beispiel diese Aenderung sowol an der zweiten, als an der dritten Colonne vor, so bleibt das Vorzeichen der Determinante unverändert, und man erhält

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 8, & 3 \\ 2, & 16, & 0 \\ 2, & 29, & 5 \end{vmatrix}$$

Man kann ferner, wenn einzelne oder sämmtliche Elemente einer Reihe Brüche sind, dieselben in ganze Zahlen verwandeln, indem man die Elemente dieser Reihe mit ihrem Generalnenner multiplicirt. Auf diesem Wege lassen sich, wenn in mehr als einer Reihe Brüche vorkommen, sämmtliche Brüche des Systems nach und nach in ganze Zahlen verwandeln. So erhält man beispielsweise:

$$\begin{vmatrix} 7, & 4\tfrac{1}{2}, & 2\tfrac{1}{3} \\ 4\tfrac{1}{4}, & 5, & 5\tfrac{1}{6} \\ 7\tfrac{1}{2}, & -2, & -1\tfrac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 7, & 4\tfrac{1}{2}, & 28 \\ 4\tfrac{1}{4}, & 5, & 62 \\ 7\tfrac{1}{2}, & -2, & -15 \end{vmatrix} = \frac{1}{12\cdot 4}\begin{vmatrix} 28, & 4\tfrac{1}{2}, & 28 \\ 17, & 5, & 62 \\ 30, & -2, & -15 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{12\cdot 4\cdot 2}\begin{vmatrix} 28, & 9, & 28 \\ 17, & 10, & 62 \\ 30, & -4, & -15 \end{vmatrix}$$

Um nun zwei Elemente der ersten Zeile gleich Null zu machen, kann man die erste Colonne von der dritten subtrahiren, dann aber, um nicht auf's Neue Brüche einzuführen, die Elemente der zweiten Colonne mit 28 multipliciren, selbstverständlich die Determinante entsprechend durch 28 dividiren, und dann von der jetzigen zweiten Colonne die Produkte der Elemente der ersten mit 9 subtrahiren. So ergiebt sich

$$\frac{1}{96\cdot 28}\begin{vmatrix} 28, & 0, & 0 \\ 17, & 127, & 45 \\ 30, & -382, & -45 \end{vmatrix} = \frac{28}{96\cdot 28}\begin{vmatrix} 127, & 45 \\ -382, & -45 \end{vmatrix} = -\frac{45}{96}\begin{vmatrix} 127, & 1 \\ 382, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{45}{96}\cdot(127-382) = \frac{45}{96}\cdot 255 = \frac{3825}{32}.$$

§ 70. Auflösung von Gleichungen ersten Grades.

1. Nachdem im Vorstehenden die wichtigsten Hülfsmittel für die Berechnung der Determinanten erörtert sind, soll nun sogleich zu der Anwendung derselben auf die Auflösung von Gleichungen ersten Grades übergegangen werden. Es sei ein System von n von einander unabhängigen Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gegeben, und dasselbe in der Form

$$\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^k x_k + \ldots + a_1^n x_n = c_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^k x_k + \ldots + a_2^n x_n = c_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + \ldots + a_3^k x_k + \ldots + a_3^n x_n = c_3 \\ \vdots \\ a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + a_i^3 x_3 + \ldots + a_i^k x_k + \ldots + a_i^n x_n = c_i \\ \vdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^k x_k + \ldots + a_n^n x_n = c_n \end{array} \qquad (1)$$

geschrieben. Um den Werth einer beliebigen der n Unbekannten, z. B. x_k, zu finden, denke man sich jede dieser Gleichungen mit einem vorläufig unbestimmt gelassenen Faktor $p_1, p_2, \ldots p_k, \ldots p_n$ multiplicirt und sodann sämmtliche neuen Gleichungen durch Addition zu einer einzigen verbunden. Die letztere erhält die Form

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots + A_k x_k + \ldots + A_n x_n = C \qquad (2)$$

worin

$$A_1 = a_1^1 p_1 + a_2^1 p_2 + a_3^1 p_3 + \ldots + a_k^1 p_k + \ldots + a_n^1 p_n,$$
$$A_2 = a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 p_3 + \ldots + a_k^2 p_k + \ldots + a_n^2 p_n \text{ u. s. w.}$$

Um nun den Werth irgend einer Unbekannten x_k zu finden, kann man nachträglich die Werthe der Faktoren p so bestimmen, dass alle Coefficienten A in (2) mit Ausnahme desjenigen der gesuchten Unbekannten gleich Null werden. Setzen wir vorerst voraus, dass dies immer ausführbar sei, so erhält dadurch die Gleichung (2) die Form

$$A_k x_k = C,$$

und man hat

$$x_k = \frac{C}{A_k}. \qquad (3)$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe, aus n Gleichungen mit n Unbekannten den Werth jeder beliebigen der letzteren zu finden, ist also jetzt zurückgeführt auf die der anderen, die Werthe von n unbestimmten Faktoren $p_1, p_2, \dots p_n$ so zu bestimmen, dass $n-1$ Gleichungen von der Form

$$\begin{array}{l} a_1^1\,p_1 + a_2^1\,p_2 + a_3^1\,p_3 + \,.\,.\, + a_n^1\,p_n = 0 \\ a_1^2\,p_1 + a_2^2\,p_2 + a_3^2\,p_3 + \,.\,.\, + a_n^2\,p_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{k-1}\,p_1 + a_2^{k-1}\,p_2 + a_3^{k-1}\,p_3 + \,.\,.\, + a_n^{k-1}\,p_n = 0 \\ a_1^{k+1}\,p_1 + a_2^{k+1}\,p_2 + a_3^{k+1}\,p_3 + \,.\,.\, + a_n^{k+1}\,p_n = 0 \\ \vdots \\ a^n\,p_1 + a_2^n\,p_2 + a_3^n\,p_3 + \,.\,.\, + a_n^n\,p_n = 0 \end{array} \qquad (4)$$

erfüllt werden. Betrachten wir also $p_1, p_2, \dots p_n$ als n Unbekannte, zu deren Bestimmung die vorstehenden Gleichungen gegeben sind, so sieht man, da die Anzahl der letzteren nur $n-1$ beträgt, dass man irgend eine beliebige der n Grössen p beliebig annehmen könnte, und dass dann die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt erschiene, $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten auf letztere aufzulösen. Da aber diese letzteren Gleichungen für jede andere der Unbekannten x selbst andere werden, so würde das eingeschlagene Verfahren als ein überaus weitläufiges erscheinen.

Wir haben aber im Vorhergehenden gesehen, dass die Determinante des Systems der n^2 Coefficienten der Gleichungen (1)

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & . & . & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & . & . & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & . & . & a_n^n \end{vmatrix} = R \qquad (5)$$

nach den Elementen, bezw. Unterdeterminanten der Reihe $a_1^k, a_2^k, \dots a_n^k$ geordnet, in der Form

$$R = a_1^k\,A_1^k + a_2^k\,A_2^k + \,.\,.\, + a_n^k\,A_n^k \qquad (6)$$

geschrieben werden kann, und dass dann

$$\begin{array}{l} a_1^1\,A_1^k + a_2^1\,A_2^k + \,.\,.\, + a_n^1\,A_n^k = 0, \\ a_1^2\,A_1^k + a_2^2\,A_2^k + \,.\,.\, + a_n^2\,A_n^k = 0, \\ \vdots \\ a_1^n\,A_1^k + a_2^n\,A_2^k + \,.\,.\, + a_n^n\,A_n^k = 0 \end{array}$$

ist, mit alleiniger Ausnahme des Falles, in welchem die oberen Indices der Elemente a in der Gleichung gleich k sind, also die Gleichung (6) gilt. Hieraus folgt unmittelbar, dass sämmtliche Gleichungen (4) erfüllt werden, wenn man

$$p_1 = A_1^k,\ p_2 = A_2^k, \dots p_n = A_n^k$$

setzt, und dass dann A_k gleich der in (5) angegebenen Determinante R ist. Die Grösse C oder

$$\begin{array}{c} c_1\,p_1 + c_2\,p_2 + c_3\,p_3 + \,.\,.\, + c_n\,p_n, \text{ oder} \\ c_1\,A_1^k + c_2\,A_2^k + c_3\,A_3^k + \,.\,.\, + c_n\,A_n^k \end{array}$$

entsteht aus dieser Determinante, da die Unterdeterminanten A_1^k, A_2^k u. s. w. die Elemente der Reihe $a_1^k, a_2^k, \dots a_n^k$ nicht enthalten, wenn man in ihr an Stelle dieser Elemente die entsprechenden der Reihe $c_1, c_2, \dots c_k$ setzt. Die Gleichung (3) kann also

$$x_k = \frac{\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \ldots a_{k-1}^{k-1}\; c_k\; a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n}{\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \ldots a_{k-1}^{k-1}\; a_k^k\; a_{k+1}^{k+1} \ldots a_n^n}$$

geschrieben werden. Dieselbe besagt, dass die Werthe sämmtlicher Unbekannten der Gleichungen (1) durch Brüche dargestellt werden können, welche sämmtlich zum Nenner die Determinante (5) des Systems der n^2 Coefficienten der Unbekannten haben, während der Zähler jedesmal die entsprechende Determinante ist, welche man erhält, wenn man statt der Coefficienten der gesuchten Unbekannten die entsprechenden Glieder ohne Unbekannte (c_1, c_2, ..) setzt.

Um also z. B. die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4u &= -10 \\ -5x + 6y - 7z + 8u &= 18 \\ 9x - 10y - 11z + 12u &= 4 \\ -13x + 14y + 15z - 16u &= -4 \end{aligned}$$

Heis, § 65, 109) auf diese Weise aufzulösen, kann man zur Bestimmung des gemeinschaftlichen Nenners aller vier Unbekannten

$$\begin{vmatrix} +1, & -2, & +3, & -4 \\ -5, & +6, & -7, & +8 \\ +9, & -10, & -11, & +12 \\ -13, & +14, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} +1, & -1, & +3, & -1 \\ -5, & +3, & -7, & +2 \\ +9, & -5, & -11, & +3 \\ -13, & +7, & +15, & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} +1, & 0, & 0, & 0 \\ -5, & -2, & +8, & -3 \\ +9, & +4, & -38, & +12 \\ -13, & -6, & +54, & -17 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \begin{vmatrix} -2, & +8, & -3 \\ +4, & -38, & +12 \\ -6, & +54, & -17 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1, & +4, & -3 \\ +2, & -19, & +12 \\ -3, & +27, & -17 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -1, & +4, & -3 \\ 0, & -11, & +6 \\ 0, & +15, & -8 \end{vmatrix} = -32 \begin{vmatrix} -11, & +6 \\ +15, & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -32 \cdot 2 \begin{vmatrix} -11, & +3 \\ +15, & -4 \end{vmatrix} = -64\,(44-45) = +64$$

setzen. Für den Zähler von x hat man entsprechend

$$\begin{vmatrix} -10, & -2, & +3, & -4 \\ +18, & +6, & -7, & +8 \\ +4, & -10, & -11, & +12 \\ -4, & +14, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} -5, & -1, & +3, & -1 \\ +9, & +3, & -7, & +2 \\ +2, & -5, & -11, & +3 \\ -2, & +7, & +15, & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & +1, & -1, & +2 \\ -13, & -8, & -2, & +3 \\ +18, & +11, & +3, & -4 \end{vmatrix} = -16 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1, & +1, & -1 \\ -13, & -8, & -2 \\ +18, & +11, & +3 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \begin{vmatrix} -1, & 0, & 0 \\ -13, & -21, & -10 \\ +18, & +29, & +14 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} -21, & -10 \\ +29, & +14 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 21, & 10 \\ 29, & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 16 \cdot 2 \begin{vmatrix} 21, & 5 \\ 29, & 7 \end{vmatrix} = 32 \cdot (147 - 145) = 64, \text{ also ist } x = \tfrac{64}{64} = 1.$$

Ebenso erhält man für den Zähler von y

$$\begin{vmatrix} +1, & -10, & +3, & -4 \\ -5, & +18, & -7, & +8 \\ +9, & +14, & -11, & +12 \\ -13, & -4, & +15, & -16 \end{vmatrix} = 128, \text{ also } y = \tfrac{128}{64} = 2,$$

und entsprechend für z und u

$$\begin{vmatrix} +1, & -2, & -10, & -4 \\ -5, & +6, & +18, & +8 \\ +9, & -10, & +4, & +12 \\ -13, & +14, & -4, & -16 \end{vmatrix} = 192; \quad \begin{vmatrix} +1, & -2, & +3, & -10 \\ -5, & +6, & -7, & +18 \\ +9, & -10, & -11, & +4 \\ -13, & +14, & +15, & -4 \end{vmatrix} = 256; \; z = 3 \quad u = 4.$$

Die Werthe der Unbekannten werden durch das vorstehende Verfahren i Form von Quotienten zweier Aggregate erhalten, deren Glieder Produkte vo n Faktoren sind. Wendet man dagegen das gewöhnliche Eliminationsverfahre an, indem man beispielsweise zunächst den aus einer der gegebenen Gleichunge ermittelten Ausdruck für eine Unbekannte in jede der $n - 1$ übrigen Gleichunge einsetzt, so erhält man, wie die Ausführung an irgend einem allgemeinen Beispie leicht zeigt, $n - 1$ Eliminationsgleichungen mit $n - 1$ Unbekannten, dere Coefficienten Produkte von zwei Faktoren sind. Leitet man dann aus diese entsprechend $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten ab, so werden di Coefficienten der letzteren von der $2 \cdot 2 = 4$ten Dimension, und fährt man s fort, so wird in der endlichen Schlussgleichung mit nur einer Unbekannten ei Coefficient mit 2^{n-1} Faktoren enthalten sein. Es liefert also dieses Eliminations verfahren den Werth der Unbekannten in Form eines Quotienten von Aggregaten deren Glieder 2^{n-1} Faktoren, also $2^{n-1} - n$ Faktoren mehr als bei dem vorstehen den enthalten. Diese überflüssigen Faktoren, deren Anzahlen für $n = 3, 4, 5,$ u. s. w. die rasch steigende Reihe 1, 4, 11, 26 u. s. w. bilden, und welche sic in dem Resultat wieder aufheben müssen, werden durch die Anwendung de Determinanten erspart. Ausserdem empfiehlt sich die letztere dadurch, dass si die unwissenschaftliche Willkür in der Auswahl und Reihenfolge der jedesma zu eliminirenden Unbekannten beseitigt.

2. Schon im Vorigen sind sogenannte homogene Gleichungen ersten Grade vorgekommen, in welchen die Glieder ohne Unbekannte gleich Null sind.

Sind n solche Gleichungen mit n Unbekannten

$$\begin{array}{l} a_1^1\, x_1 + a_1^2\, x_2 + a_1^3\, x_3 + \ldots + a_1^n\, x_n = 0 \\ a_2^1\, x_1 + a_2^2\, x_2 + a_2^3\, x_3 + \ldots + a_2^n\, x_n = 0 \\ a_3^1\, x_1 + a_3^2\, x_2 + a_3^3\, x_3 + \ldots + a_3^n\, x_n = 0 \\ \vdots \\ a_n^1\, x_1 + a_n^2\, x_2 + a_n^3\, x_3 + \ldots + a_n^n\, x_n = 0 \end{array}$$

gegeben, so führt die Auflösung derselben mittelst Determinanten auf

$$x_k = \frac{0}{\Sigma \pm a_1^1 \ldots a_n^n}.$$

In der That überzeugt man sich auch unmittelbar, dass die n Gleichungen sämmtlich erfüllt sind, wenn jeder Unbekannten der Werth Null beigelegt wird. Es ist jedoch zu beachten, dass in einem besonderen Falle dieser Werth nicht aus der vorstehenden Gleichung für x_k gefolgert werden darf, nämlich dann, wenn gleichzeitig der Nenner, also die Determinante des Systems der n^2 Coefficienten a_1^1, a_1^2 u. s. w gleich Null ist. Es erscheinen in diesem Falle vielmehr die Werthe sämmtlicher Unbekannten unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, und hieraus geht hervor, dass dann die n Unbekannten nicht durch die gegebenen Gleichungen ermittelt werden können.

Man erhält dasselbe Resultat auf folgende Weise: Man kann jede der obigen n Gleichungen durch eine und dieselbe beliebig ausgewählte der n Unbekannten z. B. x_k dividiren und erhält dann n Gleichungen mit den $n - 1$ Verhältnissen

$\frac{x_1}{x_k}, \frac{x_2}{x_k} \ldots \frac{x_n}{x_k}$ als Unbekannten. Hieraus geht einerseits hervor, dass durch die obigen n Gleichungen in der That die n Unbekannten nicht bestimmt sind, sondern nur die Verhältnisse derselben, sofern die Werthe der ersteren nicht sämmtlich gleich Null sein sollen und also diese Verhältnisse gebildet werden dürfen. Andererseits zeigt es sich, dass für die letzteren als die neuen Unbekannten eine überzählige Gleichung gegeben ist, demnach obige n Gleichungen für nicht verschwindende x nur dann neben einander bestehen können, wenn die aus beliebigen $n-1$ dieser Gleichungen berechneten Werthe der genannten Verhältnisse von selbst der noch übrigen Gleichung genügen. Damit dieses der Fall sei, müssen die Coefficienten a_1^1, a_2^1 u. s. w. einer Bedingung genügen, die dadurch gefunden werden könnte, dass man das eben angegebene Verfahren der Auflösung von $n-1$ Gleichungen und Substitution der Resultate in die noch übrige Gleichung ausführte. Kürzer ergiebt die Vergleichung mit dem, was oben aus der für x_k gewonnenen Formel abgeleitet wurde, dass diese Bedingung

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n = 0$$

ist. Sind also n homogene Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten gegeben, so ist die Bedingung, dass diese Gleichungen für nicht verschwindende Werthe der Unbekannten zusammen bestehen, die, dass die Determinante der n^2 Coefficienten gleich Null sei, und die Gleichungen bestimmen dann die Verhältnisse der Unbekannten. Dividirt man jede der Gleichungen etwa durch x_n und löst die $n-1$ ersten der entstehenden Gleichungen auf die betreffenden Verhältnisse nach § 70, 1 auf, so ergiebt sich, dass die Werthe der Unbekannten sich der Reihe nach zu einander verhalten wie diejenigen Unterdeterminanten, welche aus den $n(n-1)$ Coefficienten jener Gleichungen der Reihe nach zu den Elementen der fehlenden $n$ten Zeile gebildet werden können.

3. Ist umgekehrt ein System von nicht homogenen Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so lässt sich aus demselben ein System von eben so vielen homogenen Gleichungen ableiten, indem man an Stelle der n Unbekannten die Verhältnisse derselben zu einer angenommenen $n+1$ten Unbekannten — die später gleich 1 zu setzen ist, wenn man zu den ursprünglichen Gleichungen zurückkehren will — also $\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}$, u. s. w. setzt und dann alle Glieder mit x_{n+1} multiplicirt. Waren nun für die n Unbekannten $n+1$ Gleichungen

$$a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1} = 0,$$

u. s. w. gegeben, so ist

$$\Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n a_{n+1}^{n+1} = 0$$

die Bedingung, dass die zugehörigen homogenen Gleichungen gleichzeitig für nicht verschwindende Werthe der x bestehen. Da ferner durch diese homogenen Gleichungen nur die Verhältnisse der Unbekannten bestimmt sind, eine der letzteren also beliebig angenommen werden kann, so gilt diese Bedingung auch, wenn man für x_{n+1} den Werth 1 gesetzt denkt. Es gilt also auch der Satz:

Sind für n Unbekannte $n+1$ Gleichungen ersten Grades gegeben — deren rechte Seiten auf Null gebracht sind — so ist die Bedingung, dass diese Gleichungen sämmtlich durch dieselben Werthe jener Unbekannten erfüllt werden, die, dass die Determinante des Systems der $(n+1)^2$ Coefficienten gleich Null sei.

§ 71. Weitere Eigenschaften der Determinanten. Das Multiplicationstheorem.

1. Jede Determinante lässt sich als eine solche von einem belieb gen höheren Grade darstellen, denn man kann dieselbe stets als Unte determinante eines Systems von Elementen betrachten, welches in einer Zeil oder Colonne ein Element 1 und alle übrigen Elemente gleich Null hat. U also eine Determinante $n$ten Grades als eine solche $n+1$ten Grades darzustelle kann man dem System der Elemente eine Zeile und Colonne hinzufügen, so da irgend ein Element den Werth 1 oder -1, je nach der Stellung dieses Elemen hat, die übrigen Stellen einer der beiden hinzugefügten Reihen durch Null und die der anderen durch ganz beliebige Zahlen ausfüllen. Die so erhalter Determinante $n+1$ten Grades kann dann in gleicher Weise in eine solch $n+2$ten Grades verwandelt werden, u. s. w.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a_1 & b_1 & c_1 \\ \beta & a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & \beta & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & \gamma & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & p & b \\ c & q & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & m & n & t \\ 0 & a & p & b \\ 0 & c & q & d \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

2. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von gleicher Gliede zahl, so lässt sich die Determinante in das entsprechende Aggrega eben so vieler einzelner Determinanten zerlegen, welche dadurch ent stehen, dass man an Stelle jener Reihe nach einander die einzelne Glieder der betreffenden Aggregate setzt. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a_1, & a_2, & a_3 \\ b+b_1, & b_2, & b_3 \\ c+c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & a_2, & a_3 \\ b, & b_2, & b_3 \\ c, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

Allgemein, wenn

$$a_1^\lambda = p_1 + q_1 + r_1 + \ldots,$$
$$a_2^\lambda = p_2 + q_2 + r_1 + \ldots, \text{ u. s. w.}$$

ist, und man die gegebene Determinante in der Form

$$R = a_1^\lambda A_1^\lambda + a_2^\lambda A_2^\lambda + \ldots + a_n^\lambda A_n^\lambda$$

schreibt, so erhält man durch Substitution der vorstehenden Werthe für a_1^λ, a u. s. w. und Ausführung der Multiplicationen

$$\begin{aligned} R = {} & p_1 A_1^\lambda + p_2 A_2^\lambda + \ldots + p_n A_n^\lambda \\ & + q_1 A_1^\lambda + q_2 A_2^\lambda + \ldots + q_n A_n^\lambda \\ & + r_1 A_1^\lambda + r_2 A_2^\lambda + \ldots + r_n A_n^\lambda \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ., \end{aligned}$$

womit der vorstehende Satz bewiesen ist.

Sind ferner die Elemente irgend einer Reihe Aggregate von je m Gliedern und ausserdem die Elemente einer derselben parallelen Reihe Aggregate von je n Gliedern, so kann man durch zweimalige Anwendung des vorstehenden Ver fahrens die Determinante in ein Aggregat von $m \cdot n$ einfacheren Determinanten zerlegen.

Sind überhaupt die Elemente beliebig vieler oder aller parallelen Reihen Aggregate von bezüglich $m, n, p, q, \ldots$ Gliedern, so lässt sich die Determinante entsprechend als ein Aggregat von $m \cdot n \cdot p \cdot q \ldots$ einzelnen Determinanten darstellen.

Da diese Sätze auch dann richtig bleiben müssen, wenn ein oder mehrere Glieder eines jener Reihen-Aggregate gleich Null sind, so lassen sich dieselben auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, in welchen nicht alle Elemente einer Reihe aus einer gleichen Anzahl von Gliedern bestehen, da man in diesem Falle die fehlenden Glieder mittelst Nullen ergänzen kann. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_5 \\ b & b_2+b_3 & b_5-b_6 \\ c+c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_2 & a_5 \\ b & b_2 & b_5 \\ c & c_2 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_2 & 0 \\ b & b_2 & b_6 \\ c & c_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_3 & a_5 \\ b & b_3 & b_5 \\ c & 0 & c_5 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & a_3 & 0 \\ b & b_3 & b_6 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_4 & a_5 \\ b & 0 & b_5 \\ c & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_4 & 0 \\ b & 0 & b_6 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ 0 & b_2 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_2 & b_6 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & b_3 & b_5 \\ c_1 & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & b_3 & b_6 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & b_5 \\ c_1 & 0 & c_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Stimmen umgekehrt zwei oder mehrere Determinanten desselben Grades in allen correspondirenden Elementen mit Ausnahme derjenigen einer in denselben an gleicher Stelle stehenden Reihe überein, so kann man jedes Aggregat dieser Determinanten in eine einzige Determinante verwandeln, indem man in einer derselben an Stelle der nicht übereinstimmenden Reihe die in entsprechender Weise aus den Aggregaten der betreffenden ungleichen Elemente gebildete Reihe setzt. So ist also z. B.

$$\begin{vmatrix} 3, & 1, & 8, & 3 \\ 4, & 4, & 7, & 2 \\ 5, & 6, & 1, & 4 \\ 2, & 9, & 0, & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & 1, & 8, & 3 \\ 5, & 4, & 7, & 2 \\ 2, & 6, & 1, & 4 \\ 0, & 9, & 0, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1, & 1, & 8, & 3 \\ 4-5, & 4, & 7, & 2 \\ 5-2, & 6, & 1, & 4 \\ 2-0, & 9, & 0, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 1, & 8, & 3 \\ -1, & 4, & 7, & 2 \\ 3, & 6, & 1, & 4 \\ 2, & 9, & 0, & 6 \end{vmatrix}$$

3. **Das Produkt zweier Determinanten desselben Grades kann ebenfalls als eine einzige Determinante vom gleichen Grade dargestellt werden. Man erhält die Elemente der letzteren, wenn man die Elemente je einer Reihe der einen gegebenen mit den entsprechenden Elementen je einer Reihe der andern gegebenen Determinante multiplicirt und die Produkte jedesmal addirt.** Ist also

$$A = \Sigma \pm a_1^1\, a_2^2 \ldots a_n^n,\ B = \Sigma \pm b_1^1\, b_2^2 \ldots b_n^n,$$

so ist

$$A \cdot B = C = \Sigma \pm c_1^1\, c_2^2 \ldots c_n^n$$

für

$$c_i^k = a_1^i\, b_1^k + a_2^i\, b_2^k + \ldots + a_n^i\, b_n^k.$$

Ist beispielsweise

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{vmatrix},$$

so ist

$$C = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 + a_3^1 b_3^1, & a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_3^2, & a_1^1 b_1^3 + a_2^1 b_2^3 + a_3^1 b_3^3 \\ a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_3^2 b_3^1, & a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2, & a_1^2 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_3^2 b_3^3 \\ a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_2^1 + a_3^3 b_3^1, & a_1^3 b_1^2 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_3^2, & a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix}$$

Wir können den Beweis der Richtigkeit dieses Satzes an dem vorstehenden besonderen Beispiel zweier Determinanten dritten Grades führen, da derselbe

sich in ganz gleicher Weise für Determinanten jedes beliebigen Grades ent wickeln lässt, und nur die Darstellungsweise bei allgemeiner Behandlung um ständlicher und weniger übersichtlich wird.

Die oben angegebene Determinante C lässt sich nun, da jede ihrer Reihe ein Aggregat von drei Gliedern ist, in eine Summe von $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ einzelne Determinanten zerlegen. Die erste derselben ist

$$\begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1, & a_1^1 b_1^2, & a_1^1 b_1^3 \\ a_1^2 b_1^1, & a_1^2 b_1^2, & a_1^2 b_1^3 \\ a_1^3 b_1^1, & a_1^3 b_1^2, & a_1^3 b_1^3 \end{vmatrix}$$

und verwandelt sich durch Absonderung der gemeinschaftlichen Faktoren b_1^1, b_1^2, b_1^3 der drei Colonnen in

$$b_1^1 b_1^2 b_1^3 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^1 & a_1^1 \\ a_1^2 & a_1^2 & a_1^2 \\ a_1^3 & a_1^3 & a_1^3 \end{vmatrix},$$

welcher Ausdruck, da die Colonnen übereinstimmen, gleich Null ist. Dasselbe muss der Fall sein bei jeder andern Combination aus C, welche wenigstens zwei gleichstellige Colonnen enthält. Scheidet man aus der Entwicklung von C in einzelne Determinanten alle diese gleich Null werdenden aus, so bleiben von jenen 27 nur noch 6 übrig. Wählen wir als Repräsentanten der letzteren eine derselben aus, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1, & a_2^1 b_2^2, & a_3^1 b_3^3 \\ a_1^2 b_1^1, & a_2^2 b_2^2, & a_3^2 b_3^3 \\ a_1^3 b_1^1, & a_2^3 b_2^2, & a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1\, b_2^2\, b_3^3 \begin{vmatrix} a_1^1, & a_2^1, & a_3^1 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2 \\ a_1^3, & a_2^3, & a_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1\, b_2^2\, b_3^3 \cdot A,$$

so sieht man, dass dieselbe gleich dem Produkt der einen von den oben zu multiplicirenden Determinanten mit einem Gliede der Entwicklung der anderen ist. Dieses letztere Glied muss für jede andere der vorher erwähnten sechs Determinanten ein anderes sein, und somit ist das Aggregat der letzteren gleich dem Produkt der Determinante A mit der Determinante B, was zu beweisen war.

Man beachte noch, dass das Produkt zweier Determinanten nach dem vorstehenden Satze auf vier verschiedene Arten gebildet werden kann, da nicht bloss, wie in dem Beispiel geschehen, je eine Colonne von A mit einer Colonne von B, sondern auch je eine Zeile von A mit einer Zeile von B, ferner je eine Zeile von A mit einer Colonne von B und endlich je eine Colonne von A mit einer Zeile von B verbunden werden kann.

Sollen in entsprechender Weise drei oder mehr Determinanten multiplicirt werden, so kann man das vorstehende Verfahren wiederholt anwenden, also zuerst das Produkt zweier gegebenen Determinanten A, B als eine einzige Determinante C darstellen, dann etwa das Produkt von C mit einer dritten gegebenen D wieder in eine einzige Determinante verwandeln und so bis zum Ende fortfahren.

Da endlich jede Determinante niedern Grades sich als eine solche von beliebig höherem Grade darstellen lässt, so kann auch die Beschränkung, nach welcher die zu multiplicirenden Determinanten von demselben Grade sein sollten, aufgehoben werden, d. h. man kann jedes Produkt von beliebig vielen Determinanten beliebiger Grade in eine einzige Determinante verwandeln, deren Grad gleich dem höchsten bei jenen einzelnen vorkommenden ist, und deren Elemente Aggregate aus Elementen jener einzelnen sind.

4. Man kann noch auf eine andere Weise das Produkt $A \cdot B$ zweier Determinanten als eine einzige Determinante darstellen. Es sei A eine Determinante $p$ten, B eine solche $q$ten Grades, so bilde man eine neue Determinante $p+q$ten Grades, indem man für die p ersten Elemente der p ersten Zeilen und die der p ersten Colonnen die entsprechenden Elemente von A, und für die q letzten Elemente der q noch folgenden Zeilen und der q noch folgenden Colonnen die entsprechenden Elemente von B setzt, die noch übrigen Stellen aber mit Nullen ausfüllt, also nach Art des folgenden Beispiels verfährt:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & .. & a_1^p & 0 & 0 & . & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & .. & a_2^p & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ a_p^1 & a_p^2 & .. & a_p^p & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & b_1^1 & b_1^2 & . & b_1^q \\ 0 & 0 & .. & 0 & b_2^1 & b_2^2 & . & b_2^q \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 & b_q^1 & b_q^2 & . & b_q^q \end{vmatrix}$$

Man hat also hier ein Quadrat, welches aus zwei kleineren, von der Diagonale durchschnittenen Quadraten und daneben aus zwei Rechtecken, deren Elemente sämmtlich gleich Null sind, besteht.

Bildet man nun die Determinante des ganzen Systems und nimmt aus derselben alle diejenigen Glieder, welche eine und dieselbe Combination der q letzten Indices enthalten, in denen also diese Indices nicht permutirt sind, so muss das Aggregat dieser Glieder das jener Combination entsprechende Glied der Determinante B als gemeinsamen Faktor enthalten, und nach Absonderung dieses Faktors müssen die anderen Faktoren das Aggregat aller Produkte sein, welche aus Elementen der übrigen p Zeilen und Colonnen nach dem Bildungsgesetz der Determinanten entstehen können. Dieses Aggregat ist die Determinante A. Lässt man nun die q letzten Indices eine Permutation machen und vereinigt wieder alle Glieder der ganzen Determinante, welche das so entstehende neue Glied von B als gemeinsamen Faktor haben, so muss wieder das Produkt dieses Gliedes von B mit der Determinante A entstehen. Vereinigt man in dieser Weise nach einander alle diejenigen Glieder der ganzen Determinante, welche irgend ein Glied von B als Faktor haben, so muss das Aggregat aller dieser Glieder gleich dem Produkt $A \cdot B$ sein. Die noch übrigen Glieder der ganzen Determinante, welche somit aus mindestens einer der q letzten Zeilen oder Colonnen ein Element enthalten, welches nicht dem Systeme von B angehört, müssen sämmtlich gleich Null sein, und somit ist bewiesen, dass die obige ganze Determinante gleich dem Produkt der einzelnen Determinanten A, B ist.

Diese Verwandlung des Produktes $A \cdot B$ in eine einzige Determinante unterscheidet sich von der früheren dadurch, dass die letzte nicht den gleichen Grad mit den einzelnen, bezw. der höchsten derselben hat, sondern dass der Grad derselben gleich der Summe $p+q$ der Grade der einzelnen ist.

Es ist nicht nöthig, die Elemente von A in die p ersten, die von B in die q letzten Reihen zu stellen, man kann vielmehr diese Reihen auch beliebig wählen, falls sie nur einander ausschliessen und dann das Vorzeichen der ganzen

Determinante nach der Anzahl der Vertauschungen von Reihen bestimmt wird, die man vornehmen muss, um die im Vorigen vorausgesetzte Stellung zu bewirken.

5. Werden die Elemente in den erwähnten beiden Rechtecken nicht durch Nullen ausgefüllt, sondern sind dieselben irgend welche Zahlen, so enthält die Determinante des ganzen Systems ausser dem Produkte $A \cdot B$ noch weitere Glieder, deren Beschaffenheit noch untersucht werden soll. Zur Erleichterung der Darstellung führen wir vorher folgende Bezeichnungen ein:

Wählt man aus dem System der n^2 Elemente einer Determinante p beliebige Zeilen und p beliebige Colonnen in unveränderter Reihenfolge aus, so heisst die Determinante des Systems der in diesen Zeilen und diesen Colonnen zugleich stehenden p^2 Elemente eine Unterdeterminante oder eine partiale Determinante der gegebenen im weitern Sinn. Wählt man ferner die noch übrigen $n - p = q$ Zeilen und die noch übrigen q Colonnen aus, so erhält man ein zweites partiales System, welches mit dem vorigen kein Element gemeinschaftlich hat, und dieses System von q^2 Elementen liefert ebenfalls eine Unterdeterminante. Je zwei in dieser Weise zusammengehörige Unterdeterminanten werden correspondirende genannt.

Es seien die zur Bildung einer Unterdeterminante ausgewählten p Zeilen die $a$te, $b$te, $c$te u. s. w., und die ausgewählten p Colonnen die a'te, b'te, c'te u. s. w., wobei $a < b < c \ldots$ und $a' < b' < c' \ldots$ angenommen werde, so lässt sich die $a$te Zeile dadurch, dass man sie nach einander mit der $a - 1$ten, $a - 2$ten u. s. w. vertauscht, also im Ganzen durch $a - 1$ Vertauschungen zur ersten Zeile, darauf die $b$te in gleicher Weise durch $b - 2$ Vertauschungen zur zweiten, die $c$te durch $c - 3$ Vertauschungen zur dritten Zeile machen u. s. w. Ebenso werden die a'te, b'te, c'te ... Colonne durch bezüglich $a' - 1$, $b' - 2$, $c' - 3$, ... Vertauschungen in die p ersten Stellen gebracht. Man kann also durch im Ganzen

$$a + b + c + \ldots + a' + b' + c' + \ldots - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots)$$

Vertauschungen bewirken, dass die p Zeilen und die p Colonnen der Unterdeterminante die ersten sind. Berechnet man dann den Werth dieser Unterdeterminante, so ist zur Bestimmung des ursprünglichen, richtigen Vorzeichens derselben zu unterscheiden, ob jene Anzahl der Vertauschungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob die Summe

$$a + b + c + \ldots + a' + b' + c' + \ldots$$

gerad oder ungerad ist; beide Fälle lassen sich dahin zusammenfassen, dass jene Unterdeterminante der ersten Reihen mit $(-1)^{a+b+c+\ldots+a'+b'+c'+\ldots}$ zu multipliciren ist.

Schreibt man aus einer Determinante R alle Glieder heraus, welche irgend ein Glied einer Unterdeterminante A als Faktor haben, so können in diesen Gliedern keine der Elemente vorkommen, welche mit einem Elemente der Unterdeterminante in derselben Zeile oder Colonne stehen, die Werthe dieser letzteren Elemente sind daher auf das Aggregat der ausgewählten Glieder von R ohne Einfluss, oder dieses Aggregat muss identisch sein mit demjenigen Werthe, welchen R erhalten würde, wenn die genannten Elemente sämmtlich gleich Null wären. Die vorhergehende Entwicklung lässt also erkennen, dass das genannte Aggregat gleich dem Produkt der Unterdeterminante A mit der correspondirenden Unterdeterminante B ist, und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem die Summe der oberen und unteren Indices im Anfangsglied von A gerad oder ungerad ist.

Die Auswahl von p Zeilen und von p Colonnen aus dem System der Elemente einer Determinante $n$ten Grades behufs Bildung einer Unterdeterminante kann auf verschiedene Weisen geschehen, deren Anzahl durch die Anzahl der möglichen entsprechenden Combinationen angegeben wird. In jedem dieser Fälle erhält man eine correspondirende Unterdeterminante und somit auch ein Produkt $A \cdot B$ der gedachten Art. Will man aber eine Determinante R nach solchen Produkten ordnen, so ist Sorge zu tragen, dass kein Glied von R, welches zur Bildung eines dieser Produkte verwendet wurde, bei einem zweiten ebenfalls benutzt werde. Denken wir uns zu diesem Zweck die Glieder von R durch Permutation der unteren Indices aus dem Anfangsgliede

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, a_4^4 \ldots . a_n^n$$

entwickelt, die Faktoren jedes Gliedes also nach den oberen Indices geordnet, und sondert man die n unteren Indices in Gruppen zu bezw. $n - p$ Elementen, so sieht man, dass die p Elemente der ersten Gruppe sich auf so viele verschiedene Arten auswählen lassen, als Combinationen von n Elementen zur $p$ten Klasse ohne Wiederholungen möglich sind, d. h auf

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots \quad p}$$

Arten. Jede dieser Gruppen liefert zu dem System der n^2 Elemente eine Unterdeterminante $p$ten Grades nebst der correspondirenden Unterdeterminante; das Produkt dieser beiden Unterdeterminanten enthält alle diejenigen Glieder von R, in welchen eine der $p!$ Permutationen der ausgewählten Indices unter sich mit einer der $(n-p)!$ Permutationen der anderen Indices unter sich verbunden ist; in dem Aggregat aller dieser Produkte kann kein Glied von R zweimal vorkommen, und die Anzahl der in ihm enthaltenen Glieder ist gleich dem Produkte von $p! \cdot (n-p)!$ mit der obigen Anzahl der Gruppen, d. i. gleich $n!$ Es sind also die $n!$ Glieder der Gesammtdeterminante sämmtlich in jenen Produkten vorhanden, und man hat also den Satz:

Jede Determinante $n$ten Grades kann in eine Summe von $\binom{n}{p}$ Produkten je einer Unterdeterminante $p$ten Grades und der correspondirenden Unterdeterminante $n-p$ten Grades zerlegt werden, wobei die Vorzeichen der Produkte mittelst der vorher zu diesem Zweck entwickelten Regel bestimmt werden.

So ist beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung einer Determinante in Produkte von Unterdeterminanten kann, wie leicht ersichtlich, auf sehr verschiedene Weisen ausgeführt werden, man kann weiterhin auch jede der Unterdeterminanten wieder als Summe derartiger Produkte und somit die Gesammtdeterminante als Summe von Produkten von mehr als je zwei Unterdeterminanten darstellen.

Auf eine eingehendere Behandlung dieses Gegenstandes, wie auf weitere Entwicklung der Eigenschaften, Gesetze und Anwendungen der Determinanten,

welche übrigens zum grossen Theile die Bekanntschaft mit erst später vorzu tragenden Theilen der Mathematik erfordern würde, darf an dieser Stelle ver zichtet werden. Auch von den zuletzt angestellten elementaren Untersuchungen wird innerhalb der sogenannten Elementar-Mathematik keine Anwendung gemacht sie sind jedoch als Grundlage für ein tieferes Eindringen in die Theorie und di Anwendung der Determinanten von Bedeutung. Für ein weitergehendes Studium sind nachstehende Werke zu empfehlen:

BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig, S. Hirzel
GÜNTHER, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen, Besold.

Planimetrie.

Bearbeitet von

Dr. F. Reidt

in Hamm.

Die Grundbegriffe.

§ 1.

Die Grundbegriffe der Geometrie, welche hier als gegeben vorausgesetzt werden, sind die des Raumes, der Fläche, der Linie und des Punktes.

Der Raum an sich wird als unbegrenzt und ohne Unterbrechung ausgedehnt gedacht. Derselbe ist ferner theilbar, jeder Raumtheil ist ein Raum im engeren Sinne und wieder theilbar, u. s. f. bis in's Unendliche. Die Grenze, welche zwei Raumtheile von einander scheidet, ist eine Fläche. Ein Raumtheil kann unvollständig oder vollständig begrenzt sein. Ein vollständig begrenzter Raum heisst ein Körper.

Der mathematische Körper ist eine Abstraction von den physischen Körpern der Sinnenwelt, indem bei ihm einerseits von dem den Raum erfüllenden Inhalt, dem Stoff oder der Materie, abgesehen, andererseits ihm die Eigenschaften der Theilbarkeit bis in's Unendliche und der Durchdringlichkeit zugeschrieben werden. Denn während die Physik annimmt, dass die Theilbarkeit des Stoffes an den Atomen desselben eine Grenze finde, kann für den reinen Gedanken kein räumlich Ausgedehntes gesetzt werden, bei welchem eine weitere Theilbarkeit nicht gedacht werden könnte. Ebenso bringt es die Abstraction von den besonderen Eigenschaften des den Raum erfüllenden Stoffes mit sich, dass in dem Raume eines mathematischen Körpers gleichzeitig ein zweiter Körper gedacht werden kann. Nur in diesem Sinne sind also jene Eigenschaften des mathematischen Körpers zu verstehen, dass es der Vorstellung erlaubt und möglich sei, von den entgegenstehenden physikalischen Eigenschaften der Materie zu abstrahiren.

Jede Fläche hat als Grenze zweier Raumtheile zwei Flächenseiten.*) Jede Fläche ist ebenfalls theilbar, jeder Flächentheil ist wieder eine Fläche und wieder theilbar; die Theilung wird auch hier als ohne Ende wiederholbar gedacht. Eine Fläche kann in sich selbst zurücklaufen**), indem sie einen Körper für sich allein vollständig begrenzt; sie kann sich ferner bis in's Unendliche erstrecken, und sie kann theilweise oder vollständig begrenzt sein. Die Grenze zweier Flächentheile gegen einander ist eine Linie. Eine durch Linien vollständig begrenzte Fläche heisst eine Figur.

Jede Linie hat als Grenze zweier Flächentheile zwei Seiten. Jede Linie wird ebenfalls als bis in's Unendliche theilbar gedacht, und jeder Linientheil ist wieder eine Linie. Eine Linie kann in sich selbst zurücklaufen, d. h. eine Fläche

*) So ist z. B. die eine Seite einer Kugelfläche gewölbt, die andre hohl.

**) Z. B. eine Kugelfläche.

vollständig begrenzen; sie kann sich bis in's Unendliche erstrecken, und sie kann theilweise oder vollständig begrenzt sein. Die Grenze zweier Linientheile ist ein Punkt.

Ein Punkt ist ein ohne Ausdehnung gedachter Ort im Raume. Derselbe ist daher auch nicht theilbar. Als Grenze zweier Theile einer Linie hat er in letzterer zwei Seiten. — Auf einer Linie können unendlich viele Punkte gedacht werden, in einer Fläche unendlich viele Linien, in einem Körper unendlich viele Flächen.

Eine Linie ist zu beiden Seiten eines in ihr liegenden Punktes, eine Fläche ausserdem zu beiden Seiten einer in ihr liegenden Linie, ein Körper auch zu beiden Seiten einer in ihm liegenden Fläche ausgedehnt. Daher sagt man, eine Linie sei nach einer Dimension, nämlich der Länge, eine Fläche nach zwei Dimensionen, nämlich Länge und Breite, ein Körper, wie überhaupt der Raum, nach drei Dimensionen, nämlich Länge, Breite und Dicke (Höhe, Tiefe) ausgedehnt.

Kein Theil einer Linie ist nach dem Vorigen ein Punkt; ebenso erhält man als Theil einer Fläche nie eine Linie, als Theil eines Raumes nie eine Fläche. Umgekehrt kann eine Linie nicht durch Aneinanderreihen von Punkten, eine Fläche nicht durch Aneinanderlegen von Linien, ein Körper nicht durch Aufeinanderlegen von Flächen entstehen.

§ 2.

Jedes der vier Raumgebilde, Körper, Fläche, Linie und Punkt, wird ferner als beweglich gedacht. Durch die Bewegung kann dasselbe in eine von der ursprünglichen verschiedene Lage gelangen, indem es seine Stellung zu anderen Gebilden des Raumes verändert.

Bewegt sich ein Punkt, so dass er nach einander und ohne Unterbrechung in die Lagen anderer Punkte gelangt, so ist der von ihm beschriebene Weg eine Linie. Mit dem Begriff der Bewegung nehmen wir hier den Begriff der Richtung als gegeben an, nach welcher in jedem Augenblick die Bewegung des Punktes erfolgt, und welche in jedem Fall durch einen zweiten Punkt als Zielpunkt der Bewegung bestimmt werden kann. Ein bewegter Punkt kann immer oder zeitweilig dieselbe Richtung beibehalten, oder er kann seine Richtung ändern. Jede Aenderung der Richtung nennen wir Drehung.

Behält ein bewegter Punkt beständig dieselbe Richtung, so heisst die von ihm beschriebene Linie eine gerade Linie oder schlechthin eine Gerade. Man pflegt in der Geometrie Punkte mit (grossen lateinischen) Buchstaben zu benennen, und entsprechend bezeichnet man eine Gerade durch zwei solche, an beliebige Punkte derselben gesetzte Buchstaben, z. B. die Linie AB. — Jede gerade Linie kann von einem Punkte auf zwei verschiedene Arten durchlaufen werden, nämlich sowol in der Richtung von A nach B, als in der Richtung von B nach A. Jede Gerade hat also zwei Richtungen; dieselben sind einander entgegengesetzt.



Ein Punkt, welcher eine gerade Linie beschreibt, kann nach beiden Richtungen derselben ohne Ende fortgehend, jede gerade Linie kann also nach beiden Richtungen als unbegrenzt (unendlich lang) gedacht werden. Sie kann ferner nach einer ihrer Richtungen oder nach beiden zugleich durch je einen Punkt begrenzt gedacht werden. Durch zwei Punkte (Endpunkte) ist also eine Gerade vollständig begrenzt: sie heisst dann eine Strecke und hat eine bestimmte Länge, welche die Entfernung oder den Abstand der beiden Endpunkte

von einander angiebt. Eine nur einseitig begrenzte Gerade heisst auch ein Strahl, eine nach beiden Richtungen unbegrenzte wird eine Gerade schlechthin genannt. Im Folgenden ist daher, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, unter einer Geraden stets eine solche von unbegrenzter Ausdehnung nach beiden Richtungen zu verstehen.

§ 3.

Da durch Angabe eines zweiten Punktes als des Zielpunktes zu einem beweglich gedachten ersten Punkt die Richtung des letztern bestimmt ist, so genügt die Angabe der beiden Punkte in der betreffenden Aufeinanderfolge zur Bezeichnung einer Richtung. Wir unterscheiden also die Richtung *AB* (d. i. von *A* nach *B*) von der ihr entgegengesetzten *BA*.

Durch einen Punkt und seine unverändert bleibende Richtung ist auch der Weg desselben, d. h. die entsprechende Gerade, der Lage nach bestimmt. Daher lässt sich durch zwei gegebene Punkte stets eine und nur eine einzige Gerade legen, oder durch zwei Punkte einer Geraden ist die Lage derselben bestimmt. Die Länge der Geraden dagegen ist abhängig von der Grösse der Bewegung des beschreibenden Punktes. Sind jene zwei Punkte auch die Endpunkte der Geraden, so bestimmen sie die Lage und Länge derselben zugleich. Soll bei der Bezeichnung der Linie auch die Richtung angegeben werden, in welcher sie beschrieben gedacht wird, so ist die Aufeinanderfolge der beiden Punkte, wie oben angegeben, zu berücksichtigen. Mit Hilfe dieser Unterscheidung der beiden entgegengesetzten Richtungen *AB* und *BA* einer Geraden kann nun auch die gerade Linie zur sichtbaren Darstellung einer Richtung benutzt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich noch, dass zwei gerade Linien, welche durch dieselben zwei Punkte gezogen werden, ihrer ganzen Länge nach auf einander fallen, oder mit anderen Worten, einander decken. Zwei Gerade, welche theilweise auf einander liegen, fallen also ebenfalls ihrer ganzen unendlichen Erstreckung nach auf einander. Jeder Theil einer Geraden kann längs derselben verschoben gedacht werden, so dass er stets mit einem andern Theil derselben in Deckung befindlich ist.

Von einem jeden Punkte im Raume aus giebt es unendlich viele verschiedene Richtungen; durch einen Punkt lassen sich daher auch unendlich viele Gerade ziehen. Aendert ein bewegter Punkt fortwährend seine Richtung, ist also seine Bewegung in jedem Moment eine fortschreitende und eine drehende zugleich, so beschreibt derselbe eine krumme Linie. Eine solche Linie, auch eine Curve genannt, ist also in keinem ihrer Theile gerad. Eine Linie, welche aus Geraden von verschiedenen Richtungen besteht, heisst eine gebrochene; eine Linie, welche aus geraden und krummen zusammengesetzt ist, heisst eine gemischte.

§ 4.

Wie ein bewegter Punkt eine Linie, so beschreibt eine aus ihrer Lage heraustretende Linie eine Fläche. Ist die beschreibende Linie eine Gerade, so heisst die Fläche eine geradlinige oder eine Regelfläche. Durch jeden Punkt einer solchen lässt sich daher eine Gerade ziehen, welche ihrer ganzen Länge nach in die Fläche fällt.

Denkt man sich zu einer gegebenen Fläche eine zweite, welche vollständig mit ihr zusammenfällt, und sodann die eine dieser Flächen so umgewendet, dass die entgegengesetzten Flächenseiten beider einander zugekehrt sind, so kann im Allgemeinen nicht verlangt werden, dass die beiden Flächen auch in dieser

Stellung zur Deckung gebracht werden können. Es ist aber auch möglich, sich solche Flächen zu denken, bei welchen dies der Fall ist, die man sich also mit den entgegengesetzten Flächenseiten so zusammengelegt denken kann, dass kein Körperraum zwischen ihnen bleibt. Eine solche Fläche heisst eine ebene Fläche oder eine Ebene (planum).

Hieraus folgt, dass jede gerade Linie, welche zwei Punkte einer Ebene verbindet, ihrer ganzen Erstreckung nach in die Ebene fallen muss, da andernfalls bei dem Umlegen der Ebene auf eine vorher mit ihr in Deckung befindliche zwei gerade Linien möglich sein müssten, welche durch dieselben zwei Punkte gingen ohne einander zu decken.

Ferner ergiebt sich hieraus, dass eine Ebene durch Bewegung einer Geraden beschrieben gedacht werden kann, die durch einen gegebnen festen Punkt geht und mit einer gegebnen Geraden (die nicht diesen Punkt enthält) beständig einen Punkt gemeinsam hat.

Eine Fläche, von welcher kein Theil eben ist, heisst krumm.

§. 5.

Die Geometrie behandelt die Eigenschaften der Körper, Flächen, Linien und Punkte, welche ihre Lage, sowie die Art ihrer Begrenzung und Ausdehnung, d. h. ihre Gestalt und Grösse betreffen. Man theilt dieselbe aus praktischen Gründen in zwei Theile, die ebene Geometrie oder Planimetrie und die körperliche Geometrie oder Stereometrie. Die erstere behandelt die Eigenschaften solcher Raumgebilde, welche sämmtlich in einer und derselben Ebene liegend gedacht werden können, während die letztere diese Beschränkung aufhebt.

Kapitel 1.

Die Grundgebilde und ihre allgemeinen Eigenschaften.

§ 6. Die gerade Linie und die Strecke insbesondere.

Die Begriffe der geraden Linie und der Strecke sind bereits im Vorstehenden erklärt worden. Aus den daselbst entwickelten Eigenschaften der Gebilde ergeben sich zunächst folgende Forderungen (sog. Postulate) bezw. Aufgaben:

a) Eine gerade Linie zu ziehen, und zwar beliebig oder durch einen oder durch zwei gegebene Punkte.

Die praktische Ausführung dieser Forderung geschieht mit Hülfe des Lineals in als bekannt vorauszusetzender Weise. Der Gebrauch dieses Instrumentes erfordert eine vorhergegangene Prüfung seiner Richtigkeit, welche in folgender Weise ausgeführt werden kann: Man ziehe durch zwei (möglichst weit von einander entfernte) Punkte A, B die Gerade, kehre dann das Lineal so um, dass seine beiden Enden mit einander die Plätze wechseln, lege es mit derselben Kante wie vorher an die Punkte A, B und ziehe in dieser Lage wieder die Linie AB. Ist das Lineal richtig, so müssen die beiden gezogenen Linien einander decken, da durch zwei Punkte nur eine einzige Gerade möglich ist.

b) Eine gegebne (festliegende) Strecke über einen ihrer Endpunkte oder über beide beliebig zu verlängern.

Zwei oder mehrere gerade Linien lassen sich mit einander in Beziehung auf ihre Länge oder auf ihre Lage vergleichen. Der Länge nach können zwei gegebene Strecken AB, CD gleich oder ungleich sein. Denkt man sich die eine derselben so auf die andre gelegt, dass ihr einer Endpunkt C auf einen Endpunkt A der andern und sie selbst in die Richtung von AB fällt, so ist CD

gleich AB, wenn auch der andere Endpunkt D der erstern Strecke auf den andern Endpunkt B der letztern fällt. Fällt D zwischen A und B, so ist CD kleiner als AB, fällt endlich D auf die Verlängerung von AB, so ist CD grösser als AB. Die Zeichen für gleich, kleiner und grösser sind bezüglich $=, <, >$, so dass man also die drei eben genannten Fälle, wie folgt, schreiben kann:

$$CD = AB, \ CD < AB, \ CD > AB.$$

Ist eine Strecke AB über einen ihrer Endpunkte verlängert und die Verlängerung BE gleich einer zweiten Strecke CD, so sagt man, die ganze Strecke AE sei gleich der Summe von AB und CD. In entsprechender Weise kann man von der Summe von drei oder mehr Strecken reden. Ist dagegen auf AB von dem einen Endpunkt B aus in der Richtung nach dem andern Endpunkt A eine Strecke BE abgeschnitten, welche gleich CD ist (wobei $CD < AB$ vorausgesetzt wird), so heisst AE die Differenz von AB und CD.

Zur Bezeichnung von Strecken bedient man sich — namentlich wenn nur die Länge derselben in Betracht gezogen wird — auch je eines kleinen lateinischen Buchstabens. Die Summe zweier Strecken a und b kann (entsprechend den Bezeichnungen der Arithmetik) durch $a + b$, die Differenz derselben durch $a - b$ bezeichnet werden.

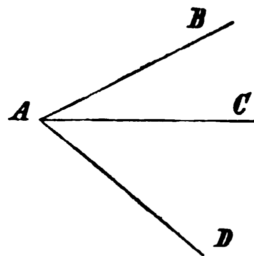
Ist eine Strecke c die Summe einer beliebigen Anzahl (n) einander gleicher Strecken, so heisst erstere ein Vielfaches jeder einzelnen der letzteren, und jede von diesen ein aliquoter Theil $\left(\frac{1}{n}\right)$ der letzteren. Man kann in diesem Falle $c = n \cdot a$ und $a = \frac{1}{n} \cdot c$ oder $\frac{c}{n}$ schreiben.

Die Vergleichung der Lage zweier Geraden erfordert die Einführung eines neuen Grundgebildes, des Winkels.

§ 7. Die Winkel.

Von jedem gegebnen, also festliegenden Punkte gehen auch in der Ebene unendlich viele verschiedene Richtungen aus, und somit lassen sich auch in der Ebene durch jeden gegebnen Punkt unendlich viele verschiedene gerade Linien gelegt denken.

Bezeichnet man jede der von einem Punkt A ausgehenden Richtungen durch einen Strahl AB, AC, AD u. s. w., so kann jeder einzelne dieser Strahlen durch Drehung um A nach einander in die Lage eines jeden der anderen gebracht werden. Die Grösse der Drehung von AB, welche nöthig ist, damit AB in die Lage von AC gelange, wird im Allgemeinen verschieden sein von derjenigen, durch welche AB in die Lage von AD gelangt. Der durch diese Grösse der Drehung gemessene Unterschied zweier Richtungen heisst der Winkel der letzteren. Die Strahlen, welche hierbei die beiden Richtungen darstellen, heissen die Schenkel, der gemeinschaftliche Ausgangspunkt derselben der Scheitel des Winkels. Man bezeichnet den Winkel, dessen Schenkel die Strahlen AB, AC sind, durch $\angle BAC$. Der Buchstabe für den Scheitelpunkt steht bei dieser Bezeichnung durch drei Buchstaben stets in der Mitte. Man sagt, der Winkel BAC werde durch Drehung des einen Schenkels um den Scheitel bis zum Zusammenfallen mit dem andern Schenkel beschrieben.



Die Schenkel eines Winkels schliessen als unendlich lange Gerade einen

bestimmten, aber nicht vollständig begrenzten Theil der Ebene ein, welchen man den Winkelraum nennen kann. Der Kürze halber sagt man von Punkten oder Linien, welche innerhalb, bezw. ausserhalb dieses Winkelraumes liegen, auch wol, dieselben lägen innerhalb, bezw. ausserhalb des Winkels. — Als Schenkel eines Winkels können übrigens auch Strecken gelten, insofern auch durch sie die bestimmten Richtungen, deren Unterschied durch den Winkel angegeben werden soll, bezeichnet sind. In diesem Sinne kann man sagen, dass die Grösse eines Winkels durch Verlängerung oder Verkürzung eines oder beider Schenkel nicht verändert werde.

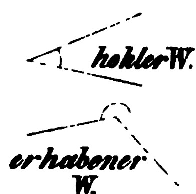
Um zwei Winkel BAC, $B'A'C'$ ihrer Grösse nach zu vergleichen, kann man sich den Winkelraum des einen in der Ebene so verschoben denken, dass der Scheitel A' auf den Scheitel A und der Schenkel $A'B'$ in die Richtung des Schenkels AB fällt, und dass die beiden anderen Schenkel auf derselben Seite von AB liegen. Fällt dann auch $A'C'$ in die Richtung von AC, so sind die beiden Winkel gleich gross, fällt $A'C'$ innerhalb des Winkels BAC, so ist $\angle B'A'C' < \angle BAC$; fällt endlich $A'C'$ ausserhalb des Winkels BAC, so ist $\angle B'A'C' > \angle BAC$.

Man bezeichnet Winkel, namentlich bei Grössenvergleichungen, auch durch je einen kleinen griechischen Buchstaben, welcher innerhalb des Winkels nahe bei dem Scheitel geschrieben wird.

Ein Winkel BAC kann sowol durch Drehung des Schenkels AB bis zum Zusammenfallen mit AC, als durch Drehung des Schenkels AC in entgegengesetzter Weise bis zum Zusammenfallen mit AB beschrieben werden. Auf die Grösse des Winkels ist dieser Unterschied ohne Einfluss, und wir sehen daher vorerst von demselben ab. Jeder einzelne Schenkel aber kann ausserdem auf zwei Arten durch Drehung um den Scheitel in die Lage des andern gebracht werden, denn die Drehung kann auf der einen oder auf der andern Flächenseite des bewegten Schenkels erfolgen. Man kann hierbei die Seiten des Schenkels als die rechte und die linke (entsprechend der Bewegung einer Person in der Richtung des Schenkels), und demnach eine Drehung nach rechts und eine solche nach links unterscheiden. Die Grösse der Drehung, welche AB zu machen hat, um in die Lage von AC zu gelangen, wird im Allgemeinen in beiden Fällen verschieden sein; beide Drehungen aber müssen einander stets zu einer vollen Umdrehung ergänzen. Es giebt also stets zwei Winkel, welche denselben Scheitel und dieselben Schenkel haben.

Sind diese beiden Winkel einander gleich, so heisst jeder derselben ein gestreckter oder flacher. Ein solcher entspricht der Hälfte einer vollen Umdrehung, und seine Schenkel liegen in gerader Linie, aber nach entgegengesetzten Richtungen. Aus dieser Lage der Schenkel folgt, dass je zwei gestreckte Winkel, wie oben angegeben, zur Deckung gebracht werden können, und dass somit der Lehrsatz besteht:

Alle gestreckten Winkel sind gleich gross. (1)



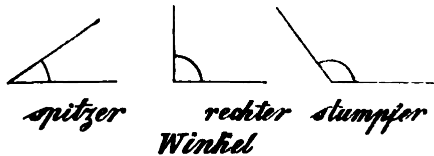
Daher kann man auch den gestreckten Winkel als Grundlage einer Eintheilung der Winkel nach ihrer Grösse benutzen. Man unterscheidet zunächst solche Winkel, welche kleiner, und solche, welche grösser als ein gestreckter sind. Erstere nennt man hohle oder concave, letztere erhabene oder convexe (auch wol überstumpfe). Von den beiden Winkeln, welche zu demselben Scheitel und denselben Schenkeln

gehören, ist, wenn nicht beide gestreckte sind, der eine stets ein hohler, der andre ein erhabener. Der Einfachheit und Bestimmtheit wegen ist man übereingekommen, wenn von dem Winkel zweier Richtungen die Rede ist, darunter stets den hohlen zu verstehen, falls nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt wird.

Die hiernach vorzugsweise in Betracht kommenden hohlen Winkel werden nun, wie folgt, weiter eingetheilt: Ein Winkel, welcher halb so gross ist als ein gestreckter, heisst ein rechter Winkel oder schlechthin ein Rechter und wird häufig durch R bezeichnet. Derselbe entspricht also dem vierten Theile einer vollen Umdrehung, und es gilt der Satz:

Alle rechten Winkel sind gleich gross. (2)

Von den Schenkeln eines rechten Winkels sagt man, dass jeder derselben auf dem andern senkrecht oder perpendikulär stehe, und nennt dem entsprechend jede Gerade, welche mit einer andern Geraden einen rechten Winkel bildet, eine Senkrechte oder ein Perpendikel auf der letztern. — Winkel, welche kleiner als ein rechter sind, heissen spitze; hohle Winkel, welche grösser als ein rechter sind, werden stumpfe genannt.



§ 8. Verbindungen zweier Winkel.

Zwei Winkel BAC, CAD, welche den Scheitelpunkt A und einen Schenkel AC gemeinsam haben, und deren andere Schenkel auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen liegen, heissen aneinanderliegende Winkel. Die beiden äusseren Schenkel bilden dann mit einander einen dritten Winkel BAD, welcher gleich der Summe der beiden erstern ist. Haben zwei Winkel BAD, CAD den Scheitel und einen Schenkel AB gemeinsam, liegen aber die nicht gemeinschaftlichen Schenkel auf derselben Seite des gemeinschaftlichen, so bilden erstere mit einander einen Winkel BAC, welcher die Differenz der beiden anderen ist. Man sagt dann, der kleinere Winkel CAD sei von dem grösseren BAD abgetragen. In entsprechender Weise kann man durch Aneinanderlegen von mehr als zwei Winkeln, bezw. durch Abtragen von solchen, die Summe oder irgend ein Aggregat beliebig vieler Winkel erhalten. Sind die Summanden gleich gross, so erhält man ein Vielfaches des einzelnen Winkels; dieser letztere ist ein aliquoter Theil des ganzen und kann als Maass desselben dienen.

Um statt des gestreckten Winkels ein kleineres und somit bequemeres Maass für Winkelgrössen zu erhalten, ist man übereingekommen, den neunzigsten Theil eines rechten Winkels unter dem Namen Grad zu diesem Zwecke zu verwenden und demselben noch als Unter-Abtheilungen die Minute gleich $\frac{1}{60}$ Grad und die Secunde gleich $\frac{1}{60}$ Minute beizufügen. Da alle rechten Winkel gleich gross sind, so haben auch der Grad, die Minute und die Secunde fest bestimmte, also unveränderliche Grösse. Man bezeichnet dieselben bezüglich durch die Zeichen $^\circ$, $'$, $''$ und schreibt also z. B. statt 15 Grad, 17 Minuten und 12 Secunden kürzer $15^\circ\ 17'\ 12''$. Die früher noch übliche Theilung der Secunde in 60 Tertien ist nicht mehr gebräuchlich; man bedient sich an ihrer Stelle der Decimaltheile der Secunde. Neuerdings findet man auch häufig für die Minute, ja selbst für den Grad die Decimaltheilung angewendet.

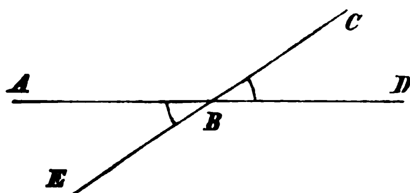
Ein rechter Winkel enthält also 90°, ein gestreckter 180°, eine volle Umdrehung 360°.

Winkel, deren Summe 90° beträgt, heissen complementär, und jeder derselben das Complement des andern. Für Winkel, deren Summe 180° beträgt, gelten entsprechend die Benennungen supplementär und Supplement.

Zwei aneinanderliegende Winkel, deren nicht gemeinschaftliche Schenkel eine einzige Gerade bilden, also entgegengesetzte Richtungen haben, heissen Nebenwinkel. Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar der Satz:

Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt zwei Rechte. (1)

Nebenwinkel sind also zu einander supplementär; durch jeden von zwei Nebenwinkeln wird die Grösse des andern bestimmt. Daher gehören zu gleichen Winkeln gleiche Nebenwinkel (und umgekehrt); dagegen hat der grössere von zwei Winkeln einen kleineren Nebenwinkel (und umgekehrt). Sind zwei Nebenwinkel ungleich, so ist stets der kleinere spitz, der grössere stumpf; dagegen sind gleiche Nebenwinkel stets rechte, und der gemeinschaftliche Schenkel derselben steht also in diesem Fall senkrecht zu der Geraden der beiden anderen Schenkel. — Ist die Grösse eines Winkels in Zahlen gegeben, so berechnet man die seines Nebenwinkels durch Subtraction des ersteren von 180°; so ist z. B. der Nebenwinkel zu 75° gleich 105°, der Nebenwinkel zu 15° 58′ 12″ gleich 164° 1′ 48″. Ist dagegen ein Winkel durch Zeichnung gegeben, so zeichnet man seinen Nebenwinkel, indem man einen Schenkel des ersteren über den Scheitel verlängert. Da hierzu jeder der beiden Schenkel gewählt werden kann, so hat jeder Winkel der Lage nach zwei Nebenwinkel, z. B. der Winkel ABC die Nebenwinkel CBD und ABE.



Diese letzteren heissen Scheitelwinkel zu einander. Scheitelwinkel sind also solche Winkel, welche den Scheitel gemeinschaftlich haben, und bei denen jeder Schenkel des einen durch Verlängerung eines Schenkels des andern über den Scheitelpunkt erhalten wird.

Da zwei Scheitelwinkel stets einen und denselben Winkel zum gemeinschaftlichen Nebenwinkel haben, also mit demselben Winkel dieselbe Summe von 180° geben, so folgt der Satz:

Scheitelwinkel sind gleich. (2)

Liegen mehrere Winkel so aneinander, dass die beiden äussersten Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine Gerade bilden, so beträgt die Summe derselben zwei Rechte oder 180°. Fällt dagegen der letzte Schenkel wieder mit dem ersten zusammen, so erhält man diese Summe zweimal. Die Winkel um einen Punkt betragen also zusammen vier Rechte oder 360°. (3)

§ 9. Vergleichung der Lage zweier Geraden. Parallele Linien.

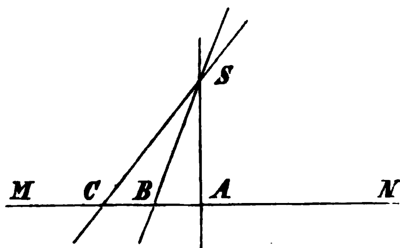
Da zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemeinsam haben, einander decken, so sind bei der Frage nach den möglichen Lagen zweier Geraden gegeneinander ausserdem nur noch die beiden Hauptfälle denkbar, dass dieselben einen einzigen, und dass sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Zwei Gerade, welche einander decken, können als eine einzige Gerade angesehen werden. Da aber jede Gerade zwei Richtungen hat, so kann auch in diesem Fall von einem Winkel der beiden Geraden, oder genauer ihrer entgegengesetzten Richtungen gesprochen werden. Der Winkel der beiden Richtungen einer Geraden (oder zweier einander deckenden Geraden) ist ein gestreckter.

Der Allgemeinheit wegen spricht man auch von einem Winkel der gleichen Richtungen zweier aufeinanderfallenden Geraden, und sagt, derselbe sei gleich Null oder ein Nullwinkel. Es ist dies eine erlaubte Ausdrucksweise, indem eben dadurch gesagt wird, dass ein Richtungsunterschied nicht mehr vorhanden sei. Denkt man sich aber, dass die eine Richtung, nachdem sie ursprünglich mit der andern zusammengefallen, durch eine volle Umdrehung wieder die frühere geworden sei, so bezeichnet man dies durch die Angabe, der Winkel der beiden Umdrehungen sei gleich 360° oder ein Vollwinkel.

Von zwei Geraden, welche einen einzigen Punkt gemeinsam haben, sagt man, dass dieselben einander schneiden, und der gemeinschaftliche Punkt heisst ihr Durchschnittspunkt. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Geraden begrenzt oder unbegrenzt sind, und im erstern Falle ob man eine derselben oder beide verlängern muss, um den Durchschnittspunkt zu erhalten. Man sagt ferner, dass zwei solche Gerade von irgend welchen Punkten derselben aus in den nach dem Durchschnittspunkte hinführenden Richtungen convergiren, in den entgegengesetzten divergiren. Die Richtungen zweier einander schneidenden Geraden bilden stets mit einander vier hohle Winkel. Zu jedem derselben sind zwei der anderen Nebenwinkel, der dritte ist sein Scheitelwinkel.

Dass zwei Gerade einen einzigen Punkt gemeinsam haben können, bedurfte nach dem Vorhergegangenen keines Beweises. Dass es aber möglich ist, dass zwei gerade Linien (selbstverständlich in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung gedacht) keinen Punkt gemeinsam haben, kann nicht ohne Weiteres bejaht werden, vielmehr bedarf diese Möglichkeit eines Nachweises. Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Gerade SA, welche eine andere Gerade MN in einem Punkte A schneide, und sodann die erstere um den festbleibenden Punkt S gedreht, sodass sie in ununterbrochener Aufeinanderfolge die Lagen aller möglichen durch S gehenden Geraden der Ebene erhält. Bei dieser Drehung muss auch der Durchschnittspunkt A auf der zweiten Geraden MN fortwährend seine Lage verändern und in ununterbrochener Aufeinanderfolge zunächst die Lagen aller von A aus nach derselben Richtung auf MN liegenden Punkte annehmen. Nachdem sich so der Durchschnittspunkt B, C, ... mehr und mehr von A entfernt hat, findet man, dass derselbe im Verlaufe der Drehung nach der entgegengesetzten Richtung von MN übergesprungen ist und nun, ebenfalls in ununterbrochener Aufeinanderfolge die Lagen der Punkte von MN annehmend, sich A wieder nähert, bis er nach einer vollen Umdrehung der bewegten Geraden wieder mit A zusammenfällt. Unter den verschiedenen Lagen der bewegten Geraden muss hiernach eine sein, in welcher der Uebergang des Durchschnittspunktes von der einen Richtung der Geraden MN nach der andern erfolgt.



Man darf es als einleuchtend betrachten, dass in dieser Lage beide Linien keinen Punkt gemeinsam haben, und dass die geringste Drehung der bewegten Geraden aus solcher Lage nach der einen oder der andern Seite wieder einen Durchschnittspunkt in der einen oder der andern Richtung von MN zur Folge hat.

Gerade Linien, welche (in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung) keinen Punkt gemeinsam haben, heissen einander parallel, und wir können nach dem

Vorhergehenden den Grundsatz aufstellen: **Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu dieser stets eine und nur eine einzige Parallele legen.**

Da eine Richtung durch einen festen Ausgangspunkt und einen Zielpunkt bestimmt ist, wobei der Zielpunkt auch als veränderlich gedacht werden kann, indem er in der durch die betreffende Gerade bezeichneten Richtung in immer weitere Entfernung verlegt werden darf, so kann man in der vorstehenden Erörterung den beweglichen Durchschnittspunkt der beiden Geraden als gemeinsamen Zielpunkt für die convergirenden Richtungen derselben ansehen. Hierbei bleibt die Richtung von MN beständig dieselbe, während diejenige der bewegten Geraden sich beständig verändert. Daher verändert sich auch fortwährend der Unterschied der beiden Richtungen, d. h. der am Durchschnittspunkt gebildete Winkel derselben. Da nun die Entfernung des Durchschnittspunktes vom Punkte A zuerst immer grösser wird, und da ersterer nach einander die Lagen aller in der betreffenden Richtung liegenden Punkte von MN ihrer ganzen unendlichen Erstreckung nach annehmen muss, ehe er nach der entgegengesetzten Richtung überspringen kann (denn es giebt keinen Punkt in der erstern Richtung auf MN, der nicht mit S durch eine Gerade verbunden gedacht werden könnte), so kann man sagen, dass der Durchschnittspunkt bei der parallelen Lage beider Linien in **unendliche** Entfernung gerückt, und dass hiermit auch der Richtungsunterschied der beiden Geraden nach diesem Zielpunkt hin aufgehoben sei.

In diesem Sinne kann man parallele Gerade als solche definiren, deren Durchschnittspunkt im Unendlichen liege. Diese Erklärung widerspricht nur scheinbar der früheren, nach welcher parallele Gerade einander in keinem Punkte schneiden, denn die Negation der letztern findet sich bei der erstern in dem Worte »unendlich« wieder, ist also hier nur unter einer Form versteckt, welche den grossen Vorzug hat, bei vielen Untersuchungen die getrennte Behandlung der beiden Fälle (a, die Linien schneiden einander, b, die Linien sind parallel) unnöthig zu machen. Aber die zweite Definition leistet noch mehr, als die Unterordnung zweier verschiedener Fälle unter dieselbe Ausdrucksform, sie versteckt nicht etwa bloss das »einander **nie** schneiden« hinter dem »einander im **Unendlichen** schneiden«, sondern sie enthält auch die Thatsache, dass der Durchschnittspunkt zweier convergirenden Geraden in immer grössere Entfernung von einem beliebigen endlichen Anfangspunkte rückt, je mehr die Geraden sich dem Parallelismus nähern, und dass diese Entfernung über jede denkbare Grenze hinaus vergrössert gedacht werden kann.

Nach welcher der Richtungen zweier parallelen Geraden der unendlich entfernte Durchschnittspunkt derselben anzunehmen sei, bleibt unbestimmt. Der Sprung, welchen der Durchschnittspunkt der beiden Geraden vermittelst ihrer parallelen Lage von der einen Richtung von MN nach der andern macht, nöthigt zu der Ausdrucksweise, dass der unendlich entfernte Punkt nach beiden Richtungen zugleich liege, aber man darf denselben gleichwol nur als einen einzigen Punkt in diese Art der Darstellung einführen.

Die fernere Annahme, nach welcher parallele Linien gleiche Richtungen haben, bedarf ebenfalls einer näheren Erläuterung. Man könnte zunächst ebenso gut sagen, dass parallele Linien entgegengesetzte Richtungen haben, je nachdem man die eine oder die andere Richtung in derselben Geraden in Betracht zieht. Genauer ist also: die Richtungen in zwei parallelen Geraden sind, je nachdem man die eine oder die andere wählt, entweder gleich oder entgegengesetzt.

Hierbei mag auf die Unterscheidung zwischen gleicher und derselben Richtung aufmerksam gemacht werden. Von derselben Richtung reden wir bei zwei einander deckenden, von gleichen Richtungen bei zwei parallelen Geraden.

Man vergleiche hierzu die Anmerkung am Schlusse des § 15.

§ 10. Der Kreis.

Bei der Drehung der Geraden SA um einen in derselben angenommenen festen Punkt S beschreibt jeder andere Punkt derselben eine Linie, welche zufolge dieser Entstehung die Eigenschaft hat, dass jeder ihrer Punkte von dem festen Punkt S dieselbe Entfernung hat. Da nach Vollendung einer ganzen Umdrehung von SA der beschreibende Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt sein muss, so hat auch die beschriebene Linie die Eigenschaft, dass sie in sich selbst zurückkehrt und also einen Theil der Ebene vollständig begrenzt. Jede solche Linie heisst ein Kreis.

Ein Kreis ist also eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie von der Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte von einem bestimmten, im Innern der von ihr begrenzten Fläche liegenden Punkte gleich weit entfernt ist. Dieser feste Punkt heisst der Mittelpunkt oder das Centrum, jede von einem Punkt des Kreises und dem Mittelpunkt begrenzte Strecke ein Halbmesser oder ein Radius, jede von zwei Punkten des Kreises begrenzte Strecke eine Sehne oder Chorde, und wenn dieselbe zugleich durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser oder Diameter des Kreises. Jeder Theil des Kreises selbst wird ein Kreisbogen oder ein Bogen schlechthin genannt.

Aus diesen Erklärungen folgen die Sätze: Alle Radien eines Kreises sind gleich. Jeder Durchmesser ist doppelt so gross als jeder Radius desselben Kreises. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich.

In der Praxis bedient man sich zur Zeichnung von Kreisen in der Regel des Zirkels, dessen Einrichtung und Gebrauch hier als bekannt vorausgesetzt werden darf. Derselbe dient zugleich zu der Lösung der Aufgabe:

Auf einer gegebenen Geraden eine Strecke abzutragen, welche einer andern gegebenen Strecke gleich ist, oder auch überhaupt eine Strecke zu zeichnen, welche eine (mittelst einer andern Strecke) gegebene Länge habe.

Hiernach können nun folgende Fundamental-Constructionen ausgeführt werden:

a) Einen Kreis zu zeichnen, und zwar entweder ganz beliebig, oder mit gegebenem Radius oder um einen gegebenen Punkt, oder endlich mit gegebenem Radius und Mittelpunkt zugleich.

b) Eine gegebene Strecke über einen ihrer Endpunkte um eine andere gegebene Strecke zu verlängern.

c) Eine Strecke zu zeichnen, welche gleich der Summe zweier oder mehrerer Strecken oder gleich einem bestimmten Vielfachen einer gegebenen Strecke ist.

d) Eine Strecke zu zeichnen, welche gleich der Differenz zweier gegebener Strecken ist.

e) In einem gegebenen Kreis einen Radius oder einen Durchmesser zu zeichnen, welcher (selbst oder in seiner Verlängerung) durch einen gegebenen Punkt geht.

f) Ebenso in einem gegebenen Kreis eine Sehne zu zeichnen, welche durch irgend zwei gegebene Punkte geht.

g) In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen.

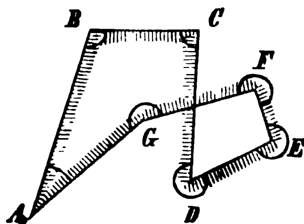
§ 11. Figuren.

Aus der Untersuchung über die verschiedenen möglichen Lagen zweier Geraden zu einander geht hervor, dass in keinem Falle durch zwei gerade Linien ein Theil der Ebene vollständig begrenzt werden kann. Dagegen sind hierzu drei Gerade hinreichend, denn verbindet man je zwei von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten durch die betreffenden Strecken mit einander, so schliessen diese Strecken einen vollständig begrenzten Theil der Ebene ein. — Dagegen kann schon mit einer einzigen krummen Linie ein Theil der Ebene vollständig begrenzt werden.

Unter einer Figur versteht man im weitern Sinne eine jede Zusammenstellung von Punkten oder Linien, im engern Sinne dagegen die Gesammtheit gerader oder krummer Linien, welche einen Theil der Ebene vollständig begrenzen. Eine Figur heisst geradlinig, wenn sie nur gerade Linien, krummlinig, wenn sie nur eine oder mehrere krumme Linien, und gemischtlinig, wenn sie gerade und krumme Linien (eine oder mehrere) zugleich enthält.

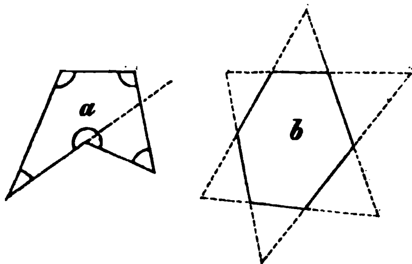
Insbesondere erhält man ein n-Eck (Drei-, Vier-, Fünf-Eck u. s. w.), wenn man einen Punkt mit einem zweiten, diesen mit einem dritten, u. s. w. bis zum $n$ten (3ten, 4ten, 5ten u. s. w.) durch gerade Strecken verbindet und zuletzt in gleicher Weise vom $n$ten zum ersten zurückkehrt. Jene Punkte heissen die Eckpunkte, ihre Verbindungsstrecken die Seiten der Figur. Ein n-Eck hat also n Eckpunkte und n Seiten. Man nennt solche Figuren auch Vielecke oder Polygone; im engeren Sinn wird diese Bezeichnung jedoch nur dann gebraucht, wenn die Anzahl der Seiten grösser als 4 ist.

An jedem Eckpunkte eines n-Ecks bilden die zwei in demselben zusammenstossenden Seiten einen Winkel. Somit hat jedes n-Eck n (innere) Winkel. Hierbei bedarf es, da im Allgemeinen an jedem Eckpunkt zwei solche Winkel, ein hohler und ein erhabener, entstehen, einer nähern Bestimmung. Zu diesem Zweck denken wir uns einen Punkt, welcher die Seiten der Figur nach einander durchlaufe und schliesslich zu seiner Anfangsstellung zurückkehre. Diese Bewegung kann auf zwei einander entgegengesetzte Weisen geschehen, z. B. von A über B, C u. s. w. oder von A über G, F u. s. w. In jedem Fall kann man mit Beziehung auf die Bewegung des Punktes eine rechte und eine linke Flächenseite jeder von ihm beschriebenen Strecke unterscheiden, und man versteht dann unter den Winkeln des Polygons entweder diejenigen, deren Winkelräume nur auf den rechten, oder diejenigen, deren Winkelräume nur auf den linken Flächenseiten liegen. (Vergl. die nebenstehende Figur.) Die Wahl zwischen beiden Annahmen ist in jedem einzelnen Falle zu treffen.



Im Nachstehenden werden wir zunächst nur solche geradlinige Figuren voraussetzen, deren Umfänge (d. i. die Gesammtheit ihrer Seiten) sich nicht selbst schneiden, die also einen einzigen bestimmten Flächenraum begrenzen. In diesem Fall werden immer diejenigen Winkel als die Winkel des Polygons angesehen, in deren Winkelräumen die Punkte der begrenzten Fläche liegen. Schneidet dabei auch keine Verlängerung einer Seite eine der andern Polygonseiten (vergl. die nachstehenden Figuren a und b), so sind diese Winkel sämmtlich hohl. — Der bewegte Punkt, welcher den Umfang eines Polygons durchläuft, verändert an jedem Eckpunkt seine Richtung. Diese Richtungsänderung wird bestimmt

durch den Winkel, welchen die Verlängerung der vorhergehenden Seite in der Richtung der Bewegung mit derjenigen Richtung der folgenden Seite bildet, in welcher sich der Punkt nach erfolgter Drehung weiter bewegt. Dieser Winkel heisst der **Aussenwinkel** des Polygons an dem betreffenden Eckpunkt. Dabei hat man sich die Drehung immer in demselben Sinne zu denken (rechts oder links herum). Ist der an demselben Eckpunkte liegende innere Polygonwinkel hohl, so ist der zugehörige Aussenwinkel sein Nebenwinkel.



Zieht man alle möglichen geraden Verbindungsstrecken zwischen je zwei von n Punkten (von denen nie mehr als zwei in gerader Linie liegen), so erhält man, da jeder der n Punkte mit jedem der $n-1$ übrigen verbunden werden kann, jede Verbindungsstrecke aber an zwei Punkten vorkommt, im Ganzen $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Strecken.

Von diesen sind bei einem n-Eck n Seiten; die übrigen werden **Diagonalen** des n-Ecks genannt. Von jedem Eckpunkt eines n-Ecks aus lassen sich $n-3$ Diagonalen desselben ziehen; die Gesammtzahl der Diagonalen eines n-Ecks beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ein Dreieck hat keine, ein Viereck zwei Diagonalen.

Die Elemente der ebenen Geometrie behandeln die Eigenschaften der geradlinigen Figuren und von den krummlinigen oder gemischtlinigen nur diejenigen, welche von einem Kreise oder von Theilen eines Kreises und einer oder mehreren Geraden begrenzt werden.

Man kann daher sagen, die Aufgaben der elementaren Geometrie beschränken sich auf diejenigen Eigenschaften der Figuren, welche sich mit alleiniger Hilfe von Lineal und Zirkel entwickeln lassen. — Dass der Kreis in allen seinen Theilen eine krumme Linie ist, wird übrigens später bewiesen werden.

Die elementaren Untersuchungen über die Eigenschaften der Figuren lassen sich in drei Hauptabschnitte gliedern. An jeder Figur im engern Sinn kann man zunächst Gestalt und Grösse des zugehörigen Flächenraumes unterscheiden. Figuren, welche gleiche Flächengrösse haben, heissen **gleich**, Figuren, welche in der Gestalt übereinstimmen, heissen **ähnlich**.

Ein Dreieck kann z. B. einem Viereck gleich, aber nicht ihm ähnlich sein; ein Dreieck auf dem Felde kann einem Dreieck auf dem kleinern Papier ähnlich sein.

Figuren, welche sowol in der Gestalt als in der Grösse übereinstimmen, heissen **congruent**. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, das der Aehnlichkeit $\sim$ (ein liegendes s, der Anfangsbuchstabe von »similis«); das der Congruenz ist aus den beiden vorigen zusammengesetzt, nämlich $\cong$ oder $\overset{\sim}{=}$. Man schreibt also, dass eine Figur A einer andern B gleich, ähnlich oder congruent sei, in Zeichen bezüglich $A=B$, $A\sim B$, $A\cong B$.

Hiernach kann der Inhalt der nachfolgenden Untersuchungen in drei Hauptabschnitte zerlegt werden, deren erster von der Congruenz und den mit ihr zusammenhängenden Eigenschaften der Seiten, Winkel u. s. w., deren zweiter von der Aehnlichkeit und deren dritter von der Gleichheit der Figuren bezw. den damit zusammenhängenden Lehren handelt.

Die vorstehenden Erklärungen der Congruenz, Aehnlichkeit und Gleichheit haben nur den Zweck eine vorläufige Orientirung über den Inhalt des Folgenden zu ermöglichen. Ihre genauere Fassung wird an den betreffenden Stellen gegeben werden.

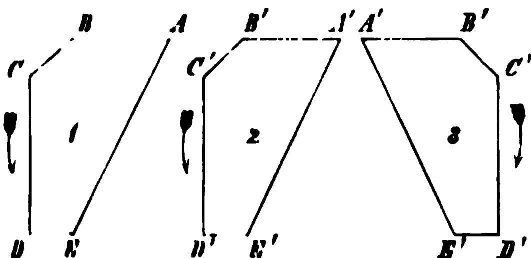
Kapitel 2.
Die Congruenz.

§ 12. Vorbemerkungen.

Zwei Raumgebilde heissen congruent, wenn sie sich so zusammengestellt denken lassen, dass jedes Stück, d. h. jeder Punkt, jede Linie und jeder Flächentheil, der einen mit einem entsprechenden Stück der andern zusammenfällt.

Von zwei Raumgebilden, welche sich in solcher Stellung zu einander befinden, sagt man, dass sie einander decken. Je zwei Stücke zweier congruenten Raumgebilde, welche in dieser Stellung der letzteren zusammenfallen, heissen gleichliegend oder homolog.

Damit zwei geradlinige Figuren congruent sind, ist es nothwendig, dass jede Seite der einen einer Seite der andern und jeder Winkel der einen einem Winkel der andern gleich ist, und dass diese gleichen Stücke auch in beiden Figuren in gleicher Weise gegen die anderen liegen, also in gleicher Reihenfolge auf einander folgen. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind die Figuren congruent, doch sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden: Folgen die einander entsprechenden Stücke beider Figuren nicht bloss in derselben Ordnung, sondern auch in demselben Sinne aufeinander, d. h. bewegen sich zwei Punkte, welche nacheinander den Umfang je einer der Figuren so durchlaufen, dass sie in gleicher Weise die einander entsprechenden Seiten nach einander beschreiben, beide in demselben Sinn (beide rechts herum oder beide links herum), so lassen sich die Figuren durch blosse Verschiebung in der Ebene zur Deckung bringen



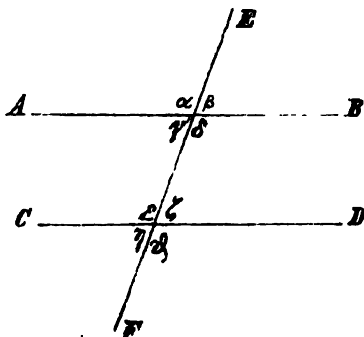
(Fig. 1 und 2). Folgen dagegen die einander entsprechenden Stücke in umgekehrtem Sinn auf einander (bewegt sich also der eine jener Punkte rechts herum, wenn sich der andere links herum bewegt), so lässt sich im Allgemeinen die Deckung nicht bloss durch eine solche Verschiebung bewirken (Fig. 2 u. 3). Daher unterscheidet man den erstern Fall vom letztern, und nennt in jenem die Figuren congruent im engern Sinne, in diesem dagegen symmetrisch.

Kehrt man eine Figur so um, dass die beiden Flächenseiten derselben (die obere und die untere) ihre Lagen vertauschen — was z. B. dadurch geschehen kann, dass man die Ebene der einen Figur um eine in dieser Ebene selbst liegende Gerade eine halbe Umdrehung machen lässt — so wird der Sinn, in welchem die Stücke aufeinanderfolgen, umgekehrt. Die eine Flächenseite einer Figur ist also der andern symmetrisch. Hiernach können auch zwei symmetrische Figuren zur Deckung gebracht werden, wenn man zuvor die Flächenseiten einer derselben mit einander vertauscht (also die eine Figur umwendet). Aus diesem

Grunde wird im Folgenden, ausser wo es besonders erwähnt wird, die Symmetrie zweier Figuren nicht von der Congruenz unterschieden.

Die Gleichheit zweier Strecken, sowie die zweier Winkel wurde in Früheren durch Aufeinanderlegen derselben erprobt. Es ergiebt sich hieraus, dass gleiche Strecken und ebenso die zu gleichen Winkeln gehörigen Winkelräume stets auch congruent sind.

§ 13. Die Winkel der geradlinigen Figuren.



Werden zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten EF durchschnitten, so entstehen acht hohle Winkel, welche nach Anleitung der nebenstehenden Figur durch (kleine griechische) Buchstaben bezeichnet werden mögen, und für welche zunächst die Bedingungen der Gleichheit und Ungleichheit untersucht werden sollen.

Von diesen acht Winkeln liegen vier, nämlich γ, δ, ε, ζ, zwischen den geschnittenen Linien und sollen innere Winkel genannt werden; die vier anderen, α, β, η, ϑ, heissen äussere Winkel. Man kann ferner vier Winkel auf der einen Seite der schneidenden Linie (α, γ, ε, η) und vier Winkel auf der andern Seite derselben (β, δ, ζ, ϑ) unterscheiden.

Die Beziehungen zwischen je zwei Winkeln, welche an demselben Durchschnittspunkt liegen, sind aus dem Früheren bekannt; dieselben sind entweder Nebenwinkel oder Scheitelwinkel. Verbindet man dagegen einen der Winkel an dem einen Durchschnittspunkt mit einem der Winkel an dem andern Durchschnittspunkt zu einem Paar, so erhält man neue Beziehungen. Die so entstehenden Winkelpaare lassen sich, wie folgt, gruppiren.

a) Die beiden Winkel liegen auf derselben Seite der schneidenden Linie EF, und sind entweder gleichartig, d. h. beide äussere oder beide innere, oder sie sind ungleichartig, d. h. der eine ist ein äusserer, der andere ein innerer. Im erstern Fall heissen die Winkel Gegenwinkel, im letztern correspondirende Winkel. Es giebt 4 Paare Gegenwinkel, nämlich α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ, sowie 4 Paare correspondirende Winkel, nämlich α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ.

b) Die beiden Winkel liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie EF. Sind dieselben dabei gleichartig, so heissen sie Wechselwinkel, und es giebt derselben wieder 4 Paare, nämlich α und ϑ, β und η, γ und ζ δ und ε. Sind dagegen die beiden Winkel ungleichartig, wie α und ζ, β und ε, γ und ϑ, δ und η, so hat das betreffende Paar keinen allgemein angenommenen Namen.

Die Unterscheidung der letzten Art von Winkelpaaren ist in der That entbehrlich, da dieselben im Folgenden nie gebraucht werden. Der wissenschaftlichen Gleichmässigkeit wegen sind jedoch auch für sie von verschiedenen Seiten besondere Namen, wie »conjugirte,« oder »anonyme«, oder »innere und äussere Wechselwinkel« vorgeschlagen worden. Ueberhaupt besteht auch in Betreff der vorerwähnten Benennungen leider keine völlige Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Schriftstellern. So bezeichnen z. B. manche die besonders häufig gebrauchten correspondirenden Winkel mit dem — hier anderweit benutzten — Namen Gegenwinkel. Man hat sich daher bei dem Studium mathematischer Werke vorkommenden Falls über den bezüglichen Sprachgebrauch des Verfassers zu unterrichten.

Sind zwei correspondirende Winkel, z. B. α und ε, einander gleich, so lässt sich das von CD und EF an ihrem Durchschnittspunkt gebildete Winkelkreuz so in der Ebene verschoben denken, dass der Winkel ε den Winkel α deckt. In diesem Fall muss offenbar das ganze genannte Winkelkreuz mit dem von AB und EF gebildeten so zusammenfallen, dass auch ζ und β, η und γ, ϑ und δ einander decken. Hierbei kommt ϑ in die Lage des Scheitelwinkels, dagegen kommen η und ζ in die Lage je eines Nebenwinkels von α u. s. w. Somit ergiebt sich ohne Weiteres der Satz:

Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden zwei correspondirende Winkel einander gleich, so sind auch je zwei andere correspondirende Winkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, und die Summe je zweier Gegenwinkel beträgt zwei Rechte.

Setzt man umgekehrt voraus, dass zwei Wechselwinkel, z. B. α und ϑ, einander gleich seien, oder dass die Summe zweier Gegenwinkel, z. B. α und η, zwei Rechte betrage, so kann man in gleicher Weise beide Winkelkreuze zur Deckung bringen, indem man ϑ mit dem Scheitelwinkel δ von α, bezw. η mit dem Nebenwinkel γ von α zur Deckung bringt.

Ist dagegen an einem der genannten Winkelpaare die betreffende Bedingung nicht erfüllt, ist z. B. α nicht gleich ε, so kann man durch den Durchschnittspunkt von AB und EF eine andere Gerade MN ziehen, welche an demselben zu jedem der vier bisherigen Winkel einen entsprechenden α', β', γ', δ', liefert, und zwar so, dass letztere die betreffenden Bedingungen erfüllen, dass also $\alpha' = \varepsilon$ und folglich auch $\beta' = \zeta$, $\gamma' = \eta$ u. s. w. ist. Da nun β' nicht gleich β ist, so kann auch β nicht gleich ζ sein, u. s. w. für die übrigen Fälle. Somit ergeben sich folgende Sätze:

Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so sind entweder gleichzeitig a) je zwei correspondirende Winkel gleich und b) je zwei Wechselwinkel gleich und c) je zwei Gegenwinkel zusammen gleich zwei Rechten, oder es finden diese Beziehungen gleichzeitig bei sämmtlichen Winkelpaaren nicht statt. (1) Ist also die betreffende Beziehung bei einem einzigen Winkelpaar erfüllt, so ist sie es auch bei jedem andern Paar, und ist sie bei einem einzigen Paar nicht erfüllt, so ist sie es auch bei keinem andern Paar.

Sind die im Vorigen aufgestellten Beziehungen zwischen den Winkelpaaren erfüllt, so sind die geschnittenen Linien parallel: Denn werden AB und CD von EF bezüglich in G und H geschnitten, und sind die Wechselwinkel γ und ζ, ε und δ einander gleich, so kann man in Folge dieser Gleichheit die Figur $AGHC$ so auf $BGHD$ legen, dass ε und δ, sowie γ und ζ einander decken, also HC auf GB und GA auf HD fällt. Schnitten nun die Geraden AB und CD einander auf der einen Seite von EF in einem Punkte M, so müsste bei jenem Aufeinanderlegen auch M mit einem zweiten gemeinschaftlichen Punkte auf der andern Seite von EF zusammenfallen. Die Geraden AB und CD würden einander also in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist.

Durch diesen Lehrsatz wird zugleich die in § 9 gemachte Annahme, das

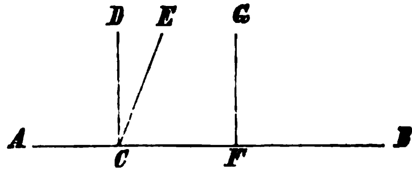
parallele Linien möglich sind, und dass sich durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser eine Parallele ziehen lässt, in voller Schärfe bewiesen. Indem so bewiesen worden, dass die Gleichheit der Wechselwinkel den Parallelismus der geschnittenen Linien mit Nothwendigkeit zur Folge hat, ist jedoch keineswegs der Nachweis geliefert, dass umgekehrt bei parallelen Linien stets die Wechselwinkel gleich sein müssen. Diese Umkehrung des im Vorstehenden bewiesenen Satzes könnte vielmehr nur dann als bewiesen gelten, wenn gezeigt wäre, dass nur bei der Gleichheit der Wechselwinkel die geschnittenen Linien parallel sein könnten. Der Nachweis dieser letztern Behauptung ergiebt sich jedoch ohne Weiteres, wenn man den in § 9 aufgestellten Grundsatz gelten lässt, dass sich durch einen gegebenen Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser nur eine einzige Parallele ziehen lässt. Denn in diesem Fall würde die Annahme, dass AB parallel zu CD und z. B. γ nicht gleich ζ wäre, auf den Widerspruch führen, dass man durch Anlegen eines Winkels $\gamma' = \zeta$ an GH im Punkte G eine zweite durch diesen Punkt gehende Parallele zu CD erhalten könnte.

Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich nunmehr kurz, wie folgt zusammenfassen: Bei parallelen Linien sind alle oben genannten Bedingungen für die Winkelpaare erfüllt, und umgekehrt, ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so sind die geschnittenen Linien parallel. Daher ist bei nicht parallelen Linien keine jener Bedingungen erfüllt und umgekehrt. (2.)

Dass bei parallelen Geraden AB und CD die correspondirenden Winkel, z. B. α und ε, also die Unterschiede der Richtungen GA, HC gegen dieselbe Richtung FE, gleich sind, bestätigt die in § 9. gemachte Annahme, dass parallele Linien gleiche Richtungen haben.

§ 14. Folgerungen.

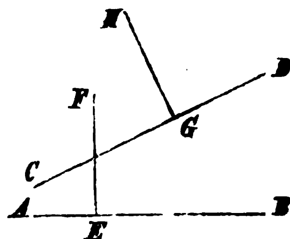
Auf einer Geraden AB lässt sich in demselben Punkte C nur eine einzige Senkrechte errichten (1), denn ist CD in C senkrecht auf AB, und CE eine beliebige andere durch C gehende Gerade, so sind die Winkel ECB und DCB ungleich, also kann ersterer kein rechter sein, wenn DCB ein rechter Winkel ist.



Errichtet man dagegen in jedem von zwei verschiedenen Punkten C, F einer Geraden AB auf dieser die Senkrechte, so sind die correspondirenden Winkel GFB und DCF als rechte gleich, und somit sind Senkrechte auf derselben Geraden parallel (2). Dieser Satz ist gleichbedeutend mit dem folgenden: Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden lässt sich auf diese nur eine einzige Senkrechte fällen. (3)

Umgekehrt folgt, dass alle Geraden, welche einer andern parallel sind, zu jeder geraden Linie senkrecht stehen müssen, zu welcher letztere senkrecht ist (4), denn dies folgt unmittelbar aus der Gleichheit der betreffenden correspondirenden Winkel.

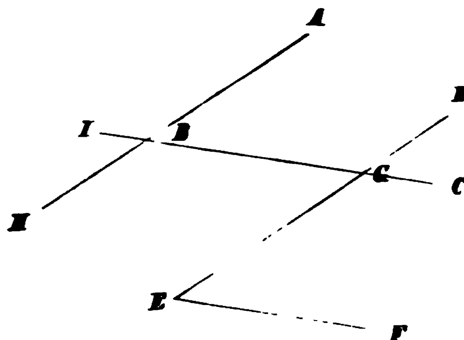
Errichtet man dagegen auf jeder von zwei verschiednen Geraden AB, CD eine Senkrechte EF, bezw. GH, so ist nach dem Vorigen EF zu CD senkrecht oder nicht senkrecht, je nachdem CD parallel oder nicht parallel zu AB ist. Im erstern Falle muss



EF zu der andern Senkrechten GH parallel, im letztern Fall muss EF zu GH nicht parallel sein. **Senkrechte auf parallelen Geraden sind also parallel, Senkrechte auf nicht parallelen Geraden sind nicht parallel.** (5)

Der vorstehende Satz lässt sich auch auf schiefe Gerade ausdehnen, welche mit parallelen oder nicht parallelen Linien in einer näher zu bestimmenden Weise gleiche Winkel bilden. Wichtiger für die späteren Anwendungen ist der umgekehrte Satz: **Winkel mit paarweise parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich.** (6)

Ist nämlich $BA \parallel ED$, $BC \parallel EF$, und schneidet ED den Schenkel BC in G, so ist $\angle ABC = DGC$ als correspondirender Winkel für die Parallelen BA und GD, und $\angle DGC = DEF$ als correspondirender Winkel für die Parallelen GC und EF; mithin ist auch $\angle ABC = DEF$.

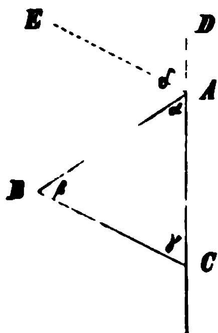


Es sei ferner BI die Verlängerung von CB, BH die Verlängerung von AB. Dann ergiebt die Vergleichung der Winkel IBA und IBH mit ABC die Sätze: Winkel mit parallelen Schenkeln, von denen das eine Paar gleich gerichtet, das andere Paar entgegengesetzt gerichtet ist, sind supplementär. Sind dagegen beide Paare entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel einander gleich.

Dass in dem vorstehenden Beweise ED den Schenkel BC schneiden muss, folgt daraus, dass durch E sich ausser EF keine zweite Parallele zu BC ziehen lässt. Der letztere Grundsatz wird zuweilen auch in folgender Fassung gebraucht: **Gerade Linien, welche einer und derselben Geraden parallel sind, sind auch unter einander parallel** (7). Schnitten nämlich zwei solche Gerade einander, so wären durch ihren Durchschnittspunkt zwei zu derselben dritten parallele Gerade vorhanden.

§ 15. Die Winkel der Vielecke.

Werden zwei nicht parallele Linien von einer dritten Geraden geschnitten, so entsteht ein Dreieck, und es genügt, behufs einer genaueren Kenntniss der Beziehungen zwischen den Winkeln an zwei solchen Geraden, die Eigenschaften der Winkel eines Dreiecks zu untersuchen. Der Einfachheit halber soll im Folgenden ein Dreieck in der Regel durch ABC, und die an den Eckpunkten A, B, C liegenden inneren Winkel desselben sollen bezüglich durch α, β, γ bezeichnet werden.



Verlängert man CA über A, so entsteht ein Aussenwinkel BAD, welcher durch δ bezeichnet werden möge und Nebenwinkel von α ist. Zieht man AE parallel zu CB, so muss AE innerhalb des Winkels DAB fallen, denn fiele AE innerhalb BAC, so müsste sie den Umfang der geschlossenen Figur ABC in einem zweiten Punkte, und somit BC schneiden. Daher theilt AE den Aussenwinkel in zwei Theile, und von diesen ist $EAD = \gamma$ als correspondirender, und

$EAB = \beta$ als Wechselwinkel an den Parallelen AE und CB. Hieraus folgt, dass $EAD + EAB$ oder DAB gleich $\beta + \gamma$ ist, oder der Satz:

Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel. (1)

Hieraus folgt ohne Weiteres, dass jeder Aussenwinkel eines Dreiecks grösser als jeder einzelne ihm gegenüberliegende innere Winkel, und dass die Differenz gleich dem andern gegenüberliegenden Winkel ist.

Da also $\delta = \beta + \gamma$, und da ausserdem $\alpha + \delta = 2R$, so ist auch $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, d. h. die Summe der inneren Winkel eines jeden Dreiecks ist gleich zwei Rechten. (2)

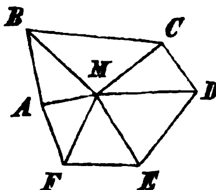
Hiernach ist durch zwei Winkel eines Dreiecks stets der dritte bestimmt und kann, wenn jene durch Zeichnung oder durch Zahlen gegeben sind, entsprechend durch Zeichnung oder Rechnung gefunden werden. Ist z. B. $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, so ist $\gamma = 180° - (70° + 50°) = 60°$, ist $\beta = 15° \, 12' \, 19'',4$ und $\gamma = 107° \, 14' \, 48'',7$, so ist $\alpha = 57° \, 32' \, 51'',9$.

Durch einen einzelnen Winkel eines Dreiecks ist in gleicher Weise die Summe der andern bestimmt. Ist insbesondere ein Winkel eines Dreiecks ein rechter, so ist die Summe der beiden anderen ebenfalls gleich einem Rechten, diese einzeln sind also spitze. Ist ein Winkel eines Dreiecks ein stumpfer, so ist die Summe der beiden anderen kleiner als ein rechter. Hiernach hat jedes Dreieck mindestens zwei spitze Winkel; der dritte kann stumpf, recht oder ebenfalls spitz sein. Man kann somit nach der Beschaffenheit der Winkel drei Arten von Dreiecken unterscheiden: ein stumpfwinkeliges Dreieck hat einen stumpfen, ein rechtwinkeliges einen rechten, ein spitzwinkeliges nur spitze Winkel.

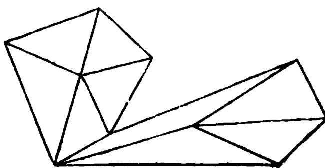
In einem rechtwinkeligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die ihm anliegenden Seiten die Katheten.

Durch einen der spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks ist der andere bestimmt; man findet diesen aus jenem durch Rechnung, indem man letztern von 90° subtrahirt.

Um in entsprechender Weise die Summe der Winkel eines beliebigen Vielecks zu bestimmen, verbinde man einen beliebigen Punkt M im Innern eines n-Ecks mit sämmtlichen Eckpunkten. Hierdurch entstehen n Dreiecke, und die Gesammtsumme aller Winkel der letzteren muss $n \cdot 2$ Rechte betragen. In dieser Summe sind die n Winkel, welche um den angenommenen Punkt M liegen, und welche zusammen vier Rechte betragen, einbegriffen. Durch Subtraction erhält man hiernach für die Summe der Polygonwinkel $2n - 4$ Rechte, d. h. die Summe der Winkel eines jeden Vielecks beträgt doppelt so viel Rechte als dasselbe Seiten hat, weniger vier Rechte. (3)



Bei Polygonen mit überstumpfen Winkeln kann der Fall vorkommen, dass die Annahme eines einzigen Punktes im Innern nicht genügt, um das Polygon in Dreiecke zerlegen zu können. In solchen Fällen lässt sich die Richtigkeit des vorstehenden Satzes durch entsprechende Benutzung von zwei oder mehreren solchen Punkten nachweisen. Vergl. die nebenstehende Figur.



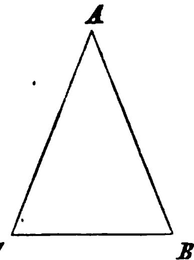
Insbesondere beträgt also die Summe der Winkel eines jeden Vierecks vier Rechte.

Der Satz, dass durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt nur eine einzige Parallele zu derselben möglich sei, kann strenggenommen nicht als Grundsatz (Axiom), d. h. als ein von selbst gewisser, eines Beweises nicht bedürftiger Satz gelten, obgleich seine thatsächliche Richtigkeit von Niemand bezweifelt wird. Auf diesen Satz aber stützt sich die im Vorstehenden gegebene Entwicklung der Lehre von den Parallelen, und diese kann daher mit allen aus ihr weiterhin gezogenen Folgerungen nicht als a priori, d. h. durch reine Vernunftschlüsse, ohne Hinzuziehung der Erfahrung begründet angesehen werden. Es ist zwar nicht nothwendig, gerade diesen Satz als einen solchen Grundsatz hinzustellen, allein es ist auch nicht gelungen, auf einem anderen Wege die Parallelentheorie so zu entwickeln, dass nicht dafür irgend ein anderer, hier aus dem Grundsatze abgeleiteter Satz ohne Beweis bliebe und demgemäss als allein durch die Erfahrung begründet gelten müsste. Die zahlreichen verschiedenen Systeme der Parallelenlehre, welche man aufgestellt hat, unterscheiden sich daher von einander im Wesentlichen nur durch die verschiedene Wahl des a priori unbewiesen bleibenden Satzes, aus welchem dann die übrigen abgeleitet werden. In den Elementen EUKLID's, dem ältesten und berühmtesten Lehrbuche der Geometrie, ist als dieser Grundsatz der Satz benutzt, dass zwei Gerade, die von einer dritten durchschnitten werden, wenn die Summe zweier inneren Gegenwinkel kleiner als zwei Rechte ist, einander auf derjenigen Seite schneiden, auf welcher diese Winkel liegen. Die Wahl dieses berühmt gewordenen elften Grundsatzes EUKLID's kann insofern keine glückliche genannt werden, als derselbe weniger von selbst einleuchtet wie beispielsweise der in der vorliegenden Schrift gewählte. Die vielen vergeblichen Versuche, welche gemacht worden sind, um diesen elften EUKLID'schen Grundsatz oder den statt desselben gesetzten zu beseitigen, haben zu der Einsicht geführt, dass diese Beseitigung unmöglich sei, weil hier in der That keine Erkenntniss a priori, sondern eine Erfahrungsthatsache unseres Raumes vorliege, und dass es somit gestattet sei, die Möglichkeit eines anders beschaffenen Raumes anzunehmen, in welchem jene Sätze nicht gelten und also beispielsweise zu einer Geraden durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt mehr als eine einzige Parallele gezogen werden könne. Hierdurch entstand zunächst die Aufgabe, diejenigen Sätze der Geometrie, welche unabhängig von jenem »Grundsatz« bewiesen werden können und also in jeder Raumform Giltigkeit haben müssen, von den anderen zu scheiden, die zu ihrem Beweis des Grundsatzes bedürfen und also nur für unsern erfahrungsmässigen Raum Geltung beanspruchen können. Einer der wichtigsten dieser letztern Sätze ist der von der Winkelsumme des Dreiecks, § 15, (2), welcher somit auch umgekehrt an Stelle jenes Grundsatzes treten, d. h. aus welchem, wenn er als richtig angenommen, alle übrigen jener Sätze streng bewiesen werden könnten. Durch eine völlig strenge Beweisführung lässt sich nun zeigen, dass die Winkelsumme eines Dreiecks niemals grösser als zwei Rechte sein kann, sowie dass die Winkelsumme eines jeden Dreiecks dann zwei Rechte betragen muss, wenn nachgewiesen werden kann, dass dies in irgend einem einzelnen Dreieck der Fall ist. Dieser letztere Beweis aber ist nur durch die Erfahrung (Beobachtung, Messung) zu erbringen, und für den von dieser Erfahrung sich losmachenden Gedanken bleibt also die Möglichkeit einer anderen, Nicht-EUKLID'schen Geometrie, in welcher die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Hierauf beruht die von den Mathematikern BOLYAI und LOBATSCHEWSKY begründete absolute Geometrie. Zu näherer Belehrung über dieselbe kann auf FRISCHAUF, absolute Raumlehre, nach JOHANN BOLYAI bearbeitet, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, verwiesen werden, da an dieser Stelle ein weiteres Eingehen auf die abstracten Untersuchungen dieses Gebietes nicht am Platze sein würde. Wir haben es vielmehr in der vorliegenden Schrift, deren Aufgabe nur die Entwicklung der thatsächlich geltenden empirischen oder EUKLID'schen Geometrie sein kann, für nothwendig gehalten, als den »Grundsatz« der Parallelentheorie einen solchen zu wählen, der einerseits möglichst einleuchtend ist und andererseits eine ungezwungene Entwicklung der folgenden Sätze gestattet, die nicht durch die Rücksichtnahme auf die Grundlagen der absoluten Geometrie beeinflusst zu werden braucht.

§ 16. Die Seiten der Dreiecke.

Nach der Beschaffenheit ihrer Seiten kann man die Dreiecke unterscheiden in solche mit drei oder zwei oder keinen gleichen Seiten. Ein Dreieck, welches keine gleichen Seiten hat, heisst **ungleichseitig**, ein solches mit zwei gleichen Seiten **gleichschenkelig**. Im letztern Falle heissen die gleichen Seiten die **Schenkel**, die dritte Seite die **Grundlinie** oder **Basis** und derjenige Eckpunkt, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, der **Scheitel** oder die **Spitze** des Dreiecks. Sind alle drei Seiten eines Dreiecks einander gleich, so heisst dasselbe ein **gleichseitiges**. Dasselbe kann als ein gleichschenkeliges betrachtet werden, in welchem die Basis den Schenkeln gleich ist, und in welchem daher auch jede der drei Seiten als Basis angenommen werden kann.

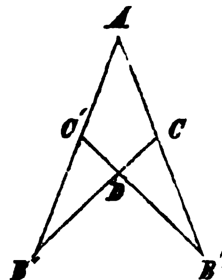
Jedes gleichschenkelige Dreieck hat die Eigenschaft, dass seine beiden Flächenseiten nicht bloss symmetrisch, sondern auch congruent sind. Denn denkt man sich zu dem Dreieck ABC, in welchem AB gleich AC ist, ein zweites $A'B'C'$, welches mit ihm in Deckung befindlich ist, und wendet man dann ABC um, so kann man so ABC auf $A'B'C'$ legen, dass A auf A', AB in die Richtung von $A'C'$ und — da die Winkel A und A' gleich sind — AC in die Richtung von $A'B'$ fällt. Dann muss in Folge der Gleichheit der Schenkel auch B auf C' und C auf B', also BC auf $C'B'$ fallen, und beide Dreiecke decken einander mithin auch in dieser Lage.



Hierbei kommt der Winkel B mit C' und C mit B' zur Deckung, woraus der Satz folgt; **Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber** (1), oder, was dasselbe ist, die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind gleich.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes auf ein gleichseitiges Dreieck ergiebt sich: **In jedem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel gleich** (2). Da die Summe derselben $2R$ beträgt, so folgt hieraus weiter, dass jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks gleich $\frac{2}{3}R$, das ist gleich $60°$ ist.

Sind dagegen die Seiten AB, AC eines Dreiecks ungleich, so fällt bei entsprechendem Verfahren, wie vorher, der Endpunkt C der kürzern Seite zwischen A' und B' und der Endpunkt B auf die Verlängerung von $A'C'$. Die Seite CB schneidet daher $C'B'$ in einem Punkte D, und der Winkel ACB ist als Aussenwinkel des Dreiecks DCB' grösser als der ihm gegenüberliegende innere $A'B'C'$. Hieraus folgt: **Der grössern Seite eines Dreiecks liegt ein grösserer Winkel gegenüber** (3).



Demnach muss auch der grössten von allen drei Seiten eines Dreiecks der grösste Winkel desselben gegenüberliegen.

Umgekehrt liegen gleichen Winkeln eines Dreiecks gleiche Seiten, und dem grössern Winkel liegt eine grössere Seite gegenüber (4), denn die Annahme des Gegentheils widerspricht einem der vorstehenden Sätze. Ist nämlich $\angle B = C$, und wäre $AB \lesseqgtr AC$, so müsste nach dem zweiten Satze $\angle C \lesseqgtr B$ sein; ist aber $\angle B \lesseqgtr C$, und wäre $AB = AC$, so müsste nach dem ersten Satze $\angle B = C$ sein.

Daher ist auch jedes Dreieck, dessen drei Winkel einander gleich sind, ein gleichseitiges, und dem grössten von allen drei Winkeln eines Dreiecks liegt die grösste Seite gegenüber.

In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist also die Hypotenuse grösser als jede Kathete, und in jedem stumpfwinkeligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die grösste.

Als weitere Anwendungen des Vorstehenden sind noch folgende Sätze bemerkenswerth:

In jedem gleichschenkeligen Dreieck ist durch einen Winkel jeder der anderen bestimmt. Ist z. B. der Winkel an der Spitze gleich α gegeben, so ist jeder der Winkel an der Grundlinie gleich der Hälfte von $180° - \alpha$, also gleich $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Ist dagegen ein Winkel an der Basis gleich β gegeben, so ist der andere Winkel an der Basis ebenfalls gleich β und der Winkel an der Spitze gleich $180° - 2\beta$. — Stimmen daher zwei gleichschenkelige Dreiecke in den Winkeln an der Spitze, oder stimmen dieselben in einem der Winkel an der Grundlinie überein, so stimmen sie auch in je zwei anderen gleichliegenden Winkeln überein.

Ferner sind in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie spitze, da kein Dreieck zwei rechte oder zwei stumpfe Winkel haben kann. Die Aussenwinkel an der Basis sind stets stumpfe Winkel. Der Aussenwinkel an der Spitze ist doppelt so gross als jeder der inneren Winkel an der Grundlinie. — Ein rechtwinkeliges oder ein stumpfwinkeliges Dreieck kann nie gleichseitig sein; es kann gleichschenkelig sein, und dann ist der rechte oder stumpfe Winkel der Winkel an der Spitze. Im rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreieck beträgt jeder Winkel an der Grundlinie einen halben Rechten oder 45 Grad.

§ 17. Fortsetzung.

Verlängert man eine Seite CA eines Dreiecks ABC um $AD = AB$ und verbindet D mit B, so ist ABD ein gleichschenkeliges Dreieck, folglich $\angle ADB = ABD$. Fügt man nun zu dem letztern Winkel den Winkel ABC hinzu, so ergiebt sich, dass in dem Dreieck CBD der Winkel CBD grösser als CDB und mithin auch die Seite CD grösser als CB ist. Da man nun für CD auch $CA + AB$ setzen kann, so folgt:

In jedem Dreieck ist die Summe je zweier Seiten grösser als die dritte Seite. (1)

Trägt man dagegen $AE = AB$ auf der grössern AC der beiden Seiten AC und AB ab und zieht BE, so ist der Aussenwinkel CEB an der Grundlinie des gleichschenkeligen Dreiecks ABE stumpf, und mithin im Dreieck BEC die Seite CB grösser als CE. Hieraus folgt:

In jedem Dreieck ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. (2)

Die beiden vorstehenden Sätze sind streng genommen nur verschiedene Ausdrucksweisen desselben Satzes, denn ist $a + b > c$, so muss nothwendig $c > b - a$ sein. Mit anderen Worten: Die Behauptung $AC - AB < BC$ ist identisch mit der Behauptung $AB + BC > AC$.

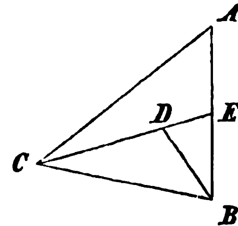
Ist ferner $ABCDE$ eine beliebige, die Punkte A und E verbindende gebrochene Linie, AE die zugehörige Gerade, und zieht man AC und AD, so

ist nach dem Vorigen $AD + DE > AE$, ferner $AC + CD > AD$, mithin um so mehr $AC + CD + DE > AE$. Ebenso ist $AB + BC > AC$, mithin um so mehr $AB + BC + CD + DE > AE$.

Man sieht leicht ein, dass man diesen Beweis für jede beliebige Anzahl von Theil-Geraden der gebrochenen Linie führen kann.

Denkt man sich die einzelnen Strecken der gebrochenen Linie hierbei an Zahl ohne Ende zunehmend, dagegen an Grösse ohne Ende abnehmend, so nähert sich die gebrochene Linie mehr und mehr einer krummen. Jede krumme Linie zwischen zwei Punkten A und E kann umgekehrt als die Grenze angesehen werden, welcher man durch eine zwischen denselben Punkten liegende gebrochene Gerade bei unendlicher Zunahme der Anzahl der Strecken der letztern beliebig nahe kommen kann, denn man hat nur nöthig, auf der krummen Linie eine Anzahl von Punkten anzunehmen, je zwei benachbarte derselben durch eine Gerade verbunden, und die angenommenen Punkte unendlich nahe an einander rückend zu denken. Da nun der vorstehende Satz für jede Anzahl der Theilstrecken der gebrochenen Geraden gilt, so lässt sich auch behaupten, dass nicht nur jede gebrochene, sondern auch jede krumme Linie zwischen zwei Punkten länger als die gerade Verbindungslinie dieser Punkte oder dass die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. (3)

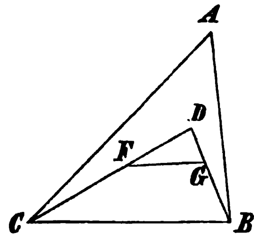
Verbindet man einen beliebigen im Innern eines Dreiecks liegenden Punkt D mit zwei Eckpunkten B, C des Dreiecks, so schliessen die Verbindungslinien einen Winkel BDC ein, welcher grösser ist als der gegenüberliegende Winkel des Dreiecks. Denn verlängert man CD bis zum Durchschnitt mit AB in E, so ist $\angle CDB > \angle DEB$ (als Aussenwinkel des Dreiecks DEB), und ebenso $\angle DEB > \angle CAB$, folglich um so mehr $\angle CDB > \angle CAB$.



Dagegen ist die Summe der Verbindungslinien $CD + DB$ kleiner als die Summe der einschliessenden Seiten $CA + AB$, denn es ist $CA + AE > CD + DE$, $DE + EB > DB$, mithin auch

$$CA + AE + DE + EB > CD + DE + DB, \text{ und da}$$
$$DE = DE,$$
so ist
$$CA + AE + EB > CD + DB, \text{ oder}$$
$$CA + AB > CD + DB.$$

Schneidet man in der vorigen Figur von CDB durch eine Gerade FG ein Dreieck FDG ab, so ist, da $FD + DG > FG$, die gebrochene Linie $CFGB$ kleiner als $CD + DB$, und daher um so mehr kleiner als $CA + AB$. Dieses Verfahren kann man beliebig oft wiederholen, und umgekehrt kann man von einer gebrochenen Linie mit beliebig vielen Theilstrecken, welche C mit B verbindet und der Seite CB nur hohle Winkelräume zukehrt, nach einander zu gebrochenen Linien mit je einer Theilstrecke weniger als vorher zurückgehen. Man kann auch hier eine krumme Linie als Grenze einer gebrochenen bei unendlich wachsender Anzahl der Theilstrecken betrachten, und man erhält somit den Satz: Jede zwischen zwei Eckpunkten eines Dreiecks innerhalb desselben gezogene gebrochene oder krumme Linie, welche der dieselben Punkte verbindenden Seite keine con-



vexen Winkelräume, bezw. keine convexe Krümmung zukehrt, ist kleiner als die Summe der sie einschliessenden Dreiecksseiten. (4)

Noch allgemeiner lässt sich zeigen, dass jede solche gebrochene oder krumme Linie, welche eine andere solche gebrochene oder krumme Linie einschliesst, grösser als die letztere ist.

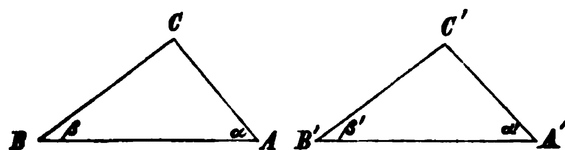
§ 18. Die Congruenzsätze.

Zeichnet man, um ein Dreieck ABC zu construiren, zunächst eine Seite AB desselben und dann an diese in ihren Endpunkten A, B bezüglich die Winkel α und β, so sieht man, dass die Längen der beiden anderen Seiten AC und BC nicht mehr willkürlich angenommen werden können, sondern sich mittelst des Durchschnittspunktes C der an AB angelegten Schenkel von selbst ergeben. Dass auch der dritte Winkel γ nicht mehr willkürlich annehmbar ist, folgt schon aus dem Satze von der Winkelsumme des Dreiecks.

Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind also die übrigen Stücke des Dreiecks unzweideutig bestimmt, und daher müssen Dreiecke, welche in jenen ersteren Stücken übereinstimmen, auch in den anderen übereinstimmen, also congruent sein. Somit ergiebt sich der erste Congruenzsatz:

Dreiecke, welche in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind congruent. (1)

Der Beweiss dieses Satzes kann auch dadurch geführt werden, dass man unmittelbar zeigt, wie zwei solche Dreiecke zur Deckung gebracht werden können.



Denn ist $AB = A'B'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so denke man sich das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, dass A' auf A und $A'B'$ in die Richtung von AB, also zufolge der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B, und dass beide Dreiecke auf dieselbe Flächenseite der gemeinschaftlichen Strecke fallen. Dann muss in Folge der Gleichheit von β und β' auch $B'C'$ in die Richtung von BC, und in Folge der Gleichheit von α und α' auch $A'C'$ in die Richtung von AC fallen. Da aber zwei gerade Linien nur einen einzigen Durchschnittspunkt haben, so fällt auch C' auf C, und das Dreieck $A'B'C'$ deckt mithin das Dreieck ABC.

Es fragt sich nun, ob auch jede drei auf andere Weise ausgewählte Stücke des Dreiecks die übrigen bestimmen. Untersucht man alle hierbei möglichen Fälle, so ergiebt sich Folgendes:

Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite, einem ihr anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel überein, so müssen sie in Folge des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks auch in dem andern anliegenden Winkel übereinstimmen und somit nach dem eben bewiesenen Satze congruent sein. Man kann also diesen Satz dahin erweitern dass allgemein

Dreiecke, welche in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, congruent sind. (2)

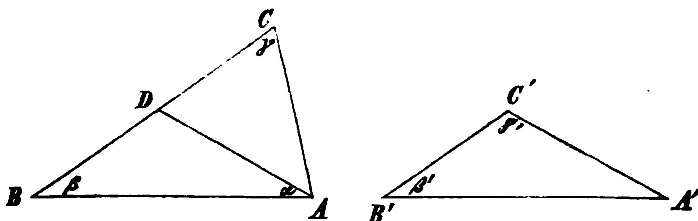
Es sei ferner angenommen, dass $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $\angle\,\alpha = \alpha'$, so kann man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC gelegt denken, dass A' auf A, $A'B'$ in die Richtung von AB und mithin zufolge der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B fällt. Dann wird wegen der Gleichheit von α' und α auch $A'C'$ in die Richtung von AC und somit — in Folge der Gleichheit von $A'C'$ und AC — auch C' auf C fallen. Da nun zwischen den

Punkten B und C nur eine einzige Gerade möglich ist, so fällt auch $B'C'$ auf BC, und das Dreieck $A'B'C'$ deckt also das Dreieck ABC. Somit erhält man den zweiten Congruenzsatz:

Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind congruent. (3)

Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel sind also auch die drei übrigen Stücke des Dreiecks der Grösse nach bestimmt. Dies lässt sich auch dadurch zeigen, dass, wenn man AB zeichnet, an AB in A den Winkel α anlegt, und dem angelegten Schenkel die bestimmte Länge AC giebt, die Verbindungslinie BC und mit ihr die Winkel an B und C nicht mehr beliebig angenommen werden können.

Stimmen ferner die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in zwei Seiten AB, $A'B'$ und AC, $A'C'$, sowie in einem der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel β, β' überein, und denkt man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, dass A' auf A, $A'B'$ in die Richtung von AB, mithin wegen der Gleichheit von $A'B'$ und AB auch B' auf B und weiterhin wegen der Gleichheit von β' und β auch $B'C'$ in die Richtung von BC fällt, so kann zunächst nicht behauptet werden, dass auch C' auf C fallen müsse. Nimmt man nun an, $B'C'$ sei kleiner als BC, es fiele also C' zwischen B und C, etwa nach D, und mithin $A'C'$ nach AD, so müsste wegen der Gleichheit von $A'C'$ und AC auch $AD = AC$, also das Dreieck ACD gleichschenklig und folglich $\angle ACB = ADC$ sein. Der Winkel BDA des Dreiecks BDA oder, was dasselbe ist, der Winkel γ' des Dreiecks $A'B'C'$ muss also in diesem Fall, wie den Winkel ADC, so auch den Winkel ACB oder γ des Dreiecks ABC zu zwei Rechten ergänzen. Umgekehrt, ist $\gamma' = 180^\circ - \gamma$, so lässt sich das Dreieck $A'B'C'$ in die Lage des Dreiecks ABD bringen. — Nimmt man dagegen an, dass $B'C' > BC$ sei, also C' auf die Verlängerung von BC falle, so kann man durch ein entsprechendes Verfahren, oder auch indem man umgekehrt ABC auf $A'B'C'$ legt, wobei derselbe Fall wie vorher eintreten muss, zeigen, dass $\gamma = 180^\circ - \gamma'$ sein muss. — Aus beiden Annahmen vereinigt ergiebt sich, dass, wenn γ und γ' nicht zusammen zwei Rechte betragen, C' auf C fallen, das Dreieck $A'B'C'$ also das Dreieck ABC decken muss. Somit hat man den dritten Congruenzsatz:



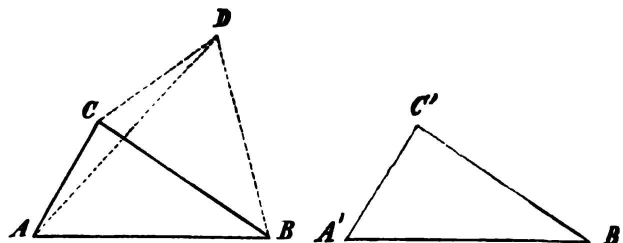
Dreiecke, welche in zwei Seiten und einem der gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent, wenn die anderen gegenüberliegenden Winkel nicht supplementär zu einander sind. (4)

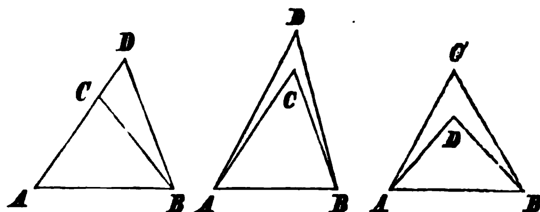
Selbstverständlich müssen die Dreiecke auch dann congruent sein, wenn die anderen gegenüberliegenden Winkel beide rechte sind, denn in diesem Falle sind die letzteren nicht nur supplementär, sondern auch gleich. — Sollen Dreiecke, welche in zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, nicht congruent sein, so muss der andere gegenüberliegende Winkel nothwendig in dem einen Dreieck ein spitzer, in dem andern ein stumpfer sein, und dieses Merkmal, obgleich ungenauer als das vorher angegebene, genügt in praktischen Fällen meist zur Entscheidung der Frage. In diesem Sinne kann man den obigen

Congruenzsatz auch dahin fassen, dass Dreiecke congruent sind, welche in zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, und in welchen die anderen gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. beide entweder spitze oder beide rechte oder beide stumpfe sind. — Da ferner der grössern der beiden Seiten auch der grössere Winkel gegenüberliegt, und ein Winkel, welcher einer kleinern Seite gegenüberliegt, somit nothwendig ein spitzer sein muss, so kann man aus dem obigen Congruenzsatz auch folgende engere Fassung ableiten: Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem der grössern von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent. In dieser letztern Fassung, welche keine Kenntniss der anderen gegenüberliegenden Winkel voraussetzt und somit das Kriterium der Congruenz nur an als übereinstimmend gegebene Stücke knüpft, findet der Satz die meisten Anwendungen.

Aus der vorstehenden Entwicklung folgt noch, dass durch zwei Seiten b, c und einen gegenüberliegenden Winkel β die übrigen Stücke des Dreiecks im Allgemeinen nicht völlig bestimmt sind, sondern dass, damit dies der Fall sei, noch eine weitere Bedingung, wie $b > c$, oder die schärfere $\gamma + \gamma' \gtrless 180°$ hinzutreten muss. Ist nicht bekannt, dass diese Bedingung erfüllt sei, so sind jedoch die übrigen Stücke auch nicht völlig unbestimmt, sondern es bleibt nur die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten, d. h. es giebt höchstens zwei nicht congruente Dreiecke aus jenen Stücken. Man kann also sagen, das Dreieck sei in diesem Falle zweideutig bestimmt.

Stimmen endlich zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, ist also $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, und denkt man sich wieder das Dreieck $A'B'C'$ so auf ABC gelegt, dass beide Dreiecke die Seite AB gemeinschaftlich haben, so kann zunächst nicht behauptet werden, dass $B'C'$ in die Richtung von BC fallen müsse. Nimmt man an, dies finde in der That nicht statt, sondern es falle $B'C'$ etwa nach BD, also $A'C'$ nach AD, und zieht man dann CD, so muss, da $BD = BC$ ist, das Dreieck BCD gleichschenkelig, also $\angle BCD = BDC$ sein. Hieraus würde folgen, dass $\angle ACD > ADC$ sein müsste, da ACD um ACB grösser als BCD und ausserdem ADC kleiner als BDC ist. Im Dreieck ACD müsste also, da dem grössern Winkel eines Dreiecks die grössere Seite gegenüberliegt, $AD > AC$ sein, und somit wäre auch $A'C' > AC$. Dies widerspricht der Voraussetzung, und es kann also $B'C'$ nicht in die Lage von BD fallen. — Hierbei ist in der Figur angenommen worden, dass AD die Seite BC schneide. Diese Annahme ist die einzige gestattete, denn bei jeder anderen Lage von D, wie in den nebenstehenden Figuren, würde nach dem vorigen Paragraphen $AD + DB \gtrless AC + CB$ sein, was wieder der vorausgesetzten Gleich-





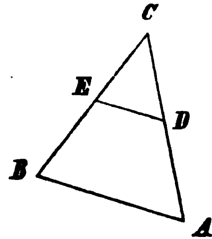
heit der homologen Seiten widersprechen würde. Somit muss BD in die Richtung von BC fallen, und in gleicher Weise AD in die Richtung von AC fallen; die beiden Dreiecke müssen also einander decken. Man hat somit den vierten Congruenzsatz:

Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen, sind congruent. (5)

Durch die drei Seiten eines Dreiecks sind daher auch die Winkel desselben bestimmt.

§ 19. Nicht-Congruenz-Sätze.

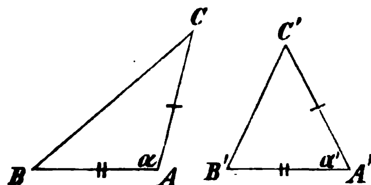
Die vorstehenden vier Congruenzsätze zeigen, dass im Allgemeinen drei Stücke eines Dreiecks die Gestalt und Grösse desselben bestimmen. Eine Ausnahme macht zunächst der Fall, in welchem diese Stücke die drei Winkel sind. Dass Dreiecke, welche in den drei Winkeln übereinstimmen, nicht congruent zu sein brauchen, kann leicht gezeigt werden, indem man in einem Dreieck ABC zu einer Seite AB eine Parallele DE zwischen den beiden anderen Seiten zieht. Aus der Gleichheit der correspondirenden Winkel folgt, dass das abgeschnittene Dreieck CDE mit dem grösseren CAB in den Winkeln übereinstimmt. — Diese Ausnahme erklärt sich dadurch, dass durch zwei Winkel eines Dreiecks der dritte mit bestimmt ist, dass also die drei Winkel nicht von einander unabhängige Bestimmungsstücke sind. Mit anderen Worten: Sind zur Bestimmung eines Dreiecks zwei Winkel gegeben, so ist der dritte auch bekannt und kann also nicht gegeben werden. — Eine andere Ausnahme macht der Fall, in welchem zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind; doch ist in diesem Fall das Dreieck nicht unbestimmt, sondern nur zweideutig bestimmt. Man kann hiernach die Congruenzsätze dahin zusammenfassen: Ein Dreieck ist seiner Gestalt und Grösse nach eindeutig oder zweideutig bestimmt, wenn drei Stücke desselben, unter denen sich wenigstens eine Seite befindet, gegeben sind.



Der für den vierten Congruenzsatz gegebene Beweis zeigt ausserdem unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten, aber nicht in dem eingeschlossenen Winkel überein, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreieck grösser als in dem anderen, welches den grössseren eingeschlossenen Winkel hat. (1)

Umgekehrt muss daher auch der Satz gelten: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten, aber nicht in der dritten Seite überein, so ist der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreieck grösser als in dem anderen, welches die grössere dritte Seite hat (2). Denn ist $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, aber $BC > B'C'$, so kann zunächst $\angle \alpha$ nicht gleich α' sein, da in diesem Fall aus der Uebereinstimmung beider Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Congruenz der Dreiecke, also die der Voraussetzung widersprechende Gleichheit der dritten Seiten folgen würde. Wäre aber $\alpha' > \alpha$, so müsste nach dem vorhergehenden Satz, wieder gegen die Voraussetzung, $B'C' > BC$ sein. Somit ist nur möglich, dass $\alpha > \alpha'$ ist.

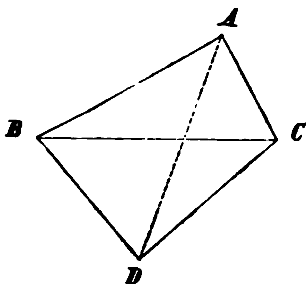


Man kann die beiden vorstehenden Sätze als Nicht-Congruenzsätze mit den entsprechenden Congruenzsätzen, wie folgt, verbinden: Stimmt ein Dreieck mit einem anderen in zwei Seiten überein, so ist der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel in demselben grösser, ebenso gross oder kleiner als in dem anderen, je nachdem die dritte Seite des ersteren grösser, ebenso gross oder kleiner als die dritte Seite des letzteren ist, und umgekehrt.

Noch andere Nicht-Congruenz-Sätze lassen sich ebenfalls leicht im Anschluss an die Congruenzsätze ableiten. Wir führen die nachstehenden, welche später gebraucht werden, kurz an:

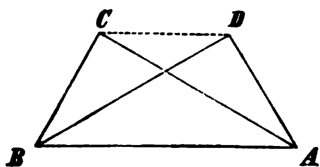
Stimmt ein Dreieck mit einem anderen in einer Seite und einem ihr anliegenden Winkel überein, so ist der andere anliegende Winkel in demjenigen Dreieck der grössere, in welchem ihm eine grössere Seite gegenüberliegt, und umgekehrt. — Der Beweis kann nach Analogie des Beweises zum ersten Congruenzsatz geführt werden. (3)

Stimmen zwei Dreiecke in der grössten Seite und in dem derselben gegenüberliegenden Winkel überein, ist aber eine zweite Seite des einen Dreiecks grösser als eine zweite Seite des anderen, so ist die dritte Seite des ersteren kleiner als die dritte Seite des letzteren (4). — Zum Beweise denke man sich beide Dreiecke so an einander gelegt, dass ihre gleichen Seiten zusammenfallen, beide Dreiecke aber auf verschiedenen Flächenseiten liegen. Es seien ABC und BCD die beiden Dreiecke in dieser Lage. Ist nun $AB > BD$, und zieht man AD, so ist im Dreieck ABD der der grösseren Seite gegenüberliegende Winkel BDA grösser als BAD. Da aber die ganzen Winkel BAC und BDC nach Voraussetzung gleich sind, so muss der Rest ADC kleiner als DAC, mithin auch in dem Dreieck ACD die Seite AC kleiner als DC sein, was zu beweisen war. — Die Forderung, dass BC die grösste Seite sei, ist deshalb gestellt, damit AD, wie in der nebenstehenden Figur die Seite BC zwischen B und C schneiden müsse. Schnitte nämlich AD die Linie BC in C oder auf der Verlängerung über C in F, so wären die Winkel AFB, DFB entweder beide rechte, oder einer von ihnen, z. B. AFB, ein stumpfer, in beiden Fällen also $AB > BF$ und mithin auch $AB > BC$, die gestellte Forderung also nicht erfüllt, wie auch der vorstehende Beweis nicht anwendbar.



Insbesondere ist also in zwei rechtwinkeligen Dreiecken mit gleichen Hypotenusen die zweite Kathete des einen grösser, ebenso gross oder kleiner als die zweite des anderen, je nachdem die erste Kathete des einen kleiner, ebenso gross oder grösser als die erste des anderen ist. (5)

Haben zwei rechtwinkelige Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist ein Winkel des einen grösser als ein Winkel des anderen, so liegt dem grösseren Winkel eine grössere Kathete gegenüber (6). Zum Beweise denke man sich beide Dreiecke so aufeinander gelegt, dass die gleichen Hypotenusen einander decken. Ist nun AB die gemeinschaftliche Hypotenuse und $\angle CBA > \angle DBA$, so ist — wie aus der Winkelsumme folgt — $\angle CAB < \angle DAB$,

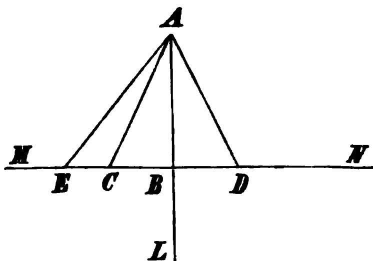


also fällt AD ausserhalb des Dreiecks ABC, und BD schneidet CA. Zieht man nun CD, so ist $\angle CDA > \angle BDA$, also ein stumpfer Winkel, mithin ist im Dreieck CDA die Seite CA die grösste, also auch $CA > DA$, was zu beweisen war.

§ 20. Unmittelbare Anwendungen.

Die vorhergehenden Sätze dieses Kapitels bieten zunächst die nöthigen Hilfsmittel für eine genauere Untersuchung der gegenseitigen Lagen von Punkten und Linien.

Von einem Punkte A ausserhalb einer gegebenen Geraden MN lassen sich unzählig viele Verbindungs-Strecken nach Punkten der letzteren ziehen. Unter allen diesen Strecken ist die senkrechte die kürzeste (1), denn ist AB senkrecht und AC schief zu BC, so ist im rechtwinkeligen Dreieck ABC die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite AC die grösste. Die Senkrechte AB wird daher auch der Abstand oder die Entfernung des Punktes A von der Geraden MN genannt.



Von den vom Punkte A nach der Geraden MN gehenden Strecken sind ferner je zwei, welche zu verschiedenen Seiten der Senkrechten AB so liegen, dass ihre Fusspunkte C, D vom Fusspunkt B der Senkrechten gleich weit abstehen, von gleicher Länge (2). Denn ist $BC = BD$, so stimmen die Dreiecke ABC und ABD in zwei Seiten und dem eingeschlossenen (rechten) Winkel überein, sind also congruent, und mithin ist $AC = AD$.

Umgekehrt lässt sich in entsprechender Weise leicht zeigen, dass aus der Gleichheit der Strecken AC, AD auch die der Strecken BC und BD folgt, sowie ferner, dass in diesem Fall auch die Winkel ACB und ADB gleich sind.

Sind dagegen die Abstände der Fusspunkte zweier Verbindungsstrecken vom Fusspunkt der Senkrechten ungleich, so gehört zu dem grösseren Abstand die längere Verbindungsstrecke und der kleinere Winkel derselben gegen die Gerade (3).

Ist nämlich $EB > CB$, und nimmt man an, dass C und E nach derselben Richtung der Geraden MN von B aus liegen — was immer erlaubt ist, da man anderenfalls nur eine der beiden Strecken durch die ihr nach dem vorhergehenden Satze gleiche zu ersetzen braucht — so ist $\angle ACE$ als Aussenwinkel des Dreiecks ABC grösser als der ihm gegenüberliegende rechte ABC. Jener ist also ein stumpfer, und es liegt ihm also im Dreieck ACE die grösste Seite gegenüber. Somit ist $AE > AC$.

Der Winkel ACB aber ist als Aussenwinkel des Dreiecks ACE grösser als der Winkel AEC.

Auch dieser Satz lässt sich, wie leicht zu beweisen, umkehren.

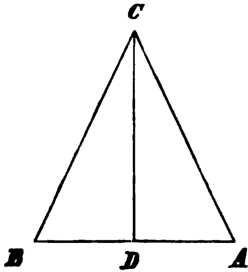
Aus den vorstehenden Entwicklungen ergiebt sich, dass wenn man die zu MN senkrechte Gerade AL um A dreht, der Winkel beider Geraden zuerst fortwährend abnimmt, der Richtungsunterschied beider Linien also um so kleiner wird, je mehr die Gerade AL sich der parallelen Lage mit MN nähert. Dies stimmt mit der früheren Anschauung, wonach parallele Linien gleiche Richtungen haben, überein.

Von einem Punkte A lassen sich nach dem Vorstehenden nach einer Ge-

raden *MN* nie mehr als zwei Strecken von gleicher, gegebener Länge ziehen. Diese Strecken *AC*, *AD* bilden mit der Verbindungsstrecke *CD* ihrer Fusspunkte ein gleichschenkeliges Dreieck, welches durch die Senkrechte *AB* in zwei congruente rechtwinkelige getheilt wird. Dies führt zur Aufstellung der folgenden Sätze:

§ 21. Fortsetzung.

Fällt man in einem gleichschenkeligen Dreieck *ABC* die Senkrechte *CD* von der Spitze auf die Grundlinie, so sind die Dreiecke *BCD*, *ACD* congruent, denn es ist $BC = AC$ nach Voraussetzung, $CD = CD$ und $\angle CDB = \angle CDA$ als Rechte; die beiden Dreiecke stimmen also in zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel überein. Hieraus folgt weiter, dass auch $BD = DA$ und $\angle BCD = \angle ACD$ sein muss. Da ferner nur eine einzige Linie existiren kann, welche den Winkel an der Spitze halbirt, so muss umgekehrt, wenn der Winkel *BCA* halbirt wird, die Halbirungslinie mit der gefällten Senkrechten identisch sein. In gleicher Weise muss die Verbindungslinie der Spitze *C* mit der Mitte *D* der Basis, und ebenso die in dem Halbirungspunkt *D* der Grundlinie auf dieser errichtete Senkrechte dieselbe Linie, wie vorher sein. Man kann hiernach folgende Sätze aufstellen:



Die von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbirt die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

Die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks steht senkrecht zu der Grundlinie und halbirt dieselbe.

Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks mit dem Halbirungspunkt der Grundlinie steht senkrecht zu letzterer und halbirt den Winkel an der Spitze.

Die auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks in dem Halbirungspunkt derselben senkrecht stehende Gerade geht durch die Spitze und halbirt den Winkel an derselben. (1)

Aus dem letzteren Satze folgt weiter: Die Spitzen aller gleichschenkeligen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis haben, liegen auf der zu dieser Basis in deren Halbirungspunkt senkrechten Geraden.

Verbindet man also die Spitzen zweier gleichschenkeligen Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Basis haben, mit einander, so muss die Verbindungslinie senkrecht zu der Basis stehen.

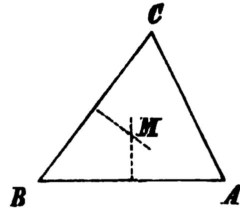
Umgekehrt haben alle Punkte der auf einer Strecke in deren Halbirungspunkt senkrechten Geraden von den beiden Endpunkten dieser Strecke gleiche Entfernungen. (Beweis durch die Congruenz der entstehenden Dreiecke.) Punkte, welche nicht auf dieser Senkrechten liegen, haben von jenen Endpunkten ungleiche Entfernungen.

Eine (gerade oder krumme) Linie von der Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte, und ausserdem kein anderer Punkt, eine gestellte Bedingung erfüllt, heisst der geometrische Ort der verlangten Punkte.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten *A*, *B* gleich weit entfernt sind, ist also die Gerade, welche zu der Strecke *AB* in deren Halbirungspunkt senkrecht steht.

Wir wollen diese Gerade der Kürze halber die **Mittelsenkrechte** der Strecke AB oder der Punkte A und B nennen.

Construirt man die Mittelsenkrechten zu jeder der drei Seiten des Dreiecks ABC, so müssen je zwei derselben als Senkrechte auf nicht parallelen Geraden einander schneiden. Es sei M der Durchschnittspunkt der Mittelsenkrechten von AB und BC, so muss einerseits $MA = MB$, andererseits $MB = MC$ sein; daher ist auch $MA = MC$, mithin M auch ein Punkt der Mittelsenkrechten von AC. Somit hat man den Satz:

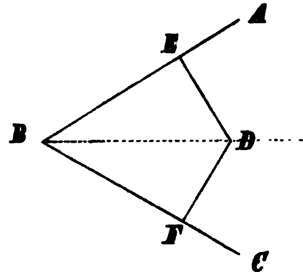


Die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines jeden Dreiecks schneiden einander in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von allen Eckpunkten des Dreiecks gleichweit entfernt. (2)

Derselbe ist ausserdem der einzige Punkt, welcher diese letztere Eigenschaft hat.

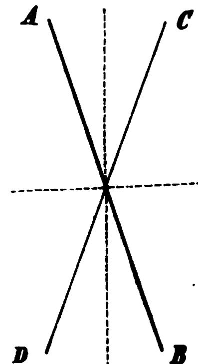
§ 22. Fortsetzung.

Fällt man von einem Punkte D der Halbirungslinie eines Winkels ABC die Senkrechten DE, DF auf die Schenkel, so stimmen die Dreiecke BED, BFD in einer Seite (BD), einem anliegenden ($\angle EBD = \angle DBF$) und dem gegenüberliegenden (rechten) Winkel überein, sind also congruent. Daher ist $DE = DF$. **Jeder Punkt der Halbirungslinie eines Winkels ist also von den beiden Schenkeln desselben gleichweit entfernt.** (1)



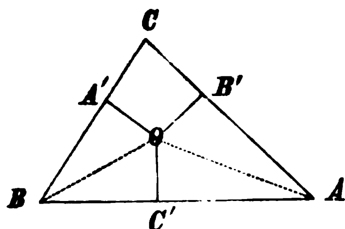
Umgekehrt muss jeder von den beiden Schenkeln gleichweit entfernte Punkt auf der Halbirungslinie des Winkels liegen, denn ist $DE = DF$, und sind die Winkel BED und BFD rechte, so stimmen die Dreiecke BED, BFD in zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel überein, folglich müssen die Winkel EBD, FBD als homologe Stücke congruenter Dreiecke gleich sein.

Soll ein Punkt von zwei einander schneidenden Geraden AB, CD gleich weit entfernt sein, so muss er hiernach auf einer der Halbirungslinien der vier von diesen Geraden gebildeten hohlen Winkel liegen. Diese vier Halbirungslinien bilden nur zwei Gerade (da jede Halbirungslinie eines Winkels, wie leicht zu zeigen, auch den Scheitelwinkel desselben halbiren muss), und diese Geraden stehen senkrecht zu einander, da die Hälften zweier Nebenwinkel zusammen die Hälfte eines gestreckten Winkels betragen müssen.

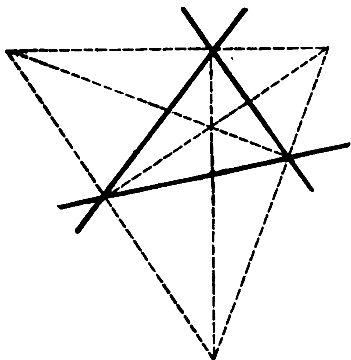


Der geometrische Ort aller von zwei gegebenen einander schneidenden Geraden gleich weit entfernten Punkte wird also von den zwei zu einander senkrechten Geraden gebildet, welche die Winkel der ersteren halbiren.

Halbirt man die drei inneren Winkel eines Dreiecks ABC, so müssen je zwei der Halbirungslinien einander in einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte schneiden. Es sei O der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Winkel an A und B, und von O seien auf die Seiten AB, AC, BC bezüglich die Senkrechten OC', OB', OA' gefällt, so muss einerseits $OC' = OA'$, andererseits $OC' = OB'$ sein. Mithin ist auch $OA' = OB'$, und O ist daher auch ein

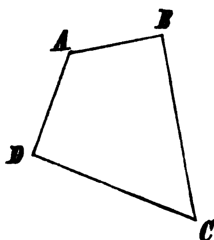


Punkt der Halbirungslinie des Winkels an C. Somit hat man den Satz: **Die drei Winkelhalbirenden eines jeden Dreiecks schneiden einander in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt.** (2)



Halbirt man auch die Aussenwinkel des Dreiecks, so findet man in entsprechender Weise, dass die Halbirungslinien der Aussenwinkel an je zwei Eckpunkten sich mit der Halbirungslinie des inneren Winkels am dritten Eckpunkt in einem einzigen Punkte schneiden, und dass dieser Punkt von den — über die Eckpunkte verlängert gedachten — Seiten gleich weit entfernt ist. Man erhält so ausser dem zuerst gefundenen Punkt noch drei andere von dieser Eigenschaft; der erstere ist hierbei der einzige, welcher innerhalb des Dreiecks liegt, und für welchen der Fusspunkt keines der auf die Seiten gefällten Perpendikel auf die Verlängerung der betreffenden Seite fällt.

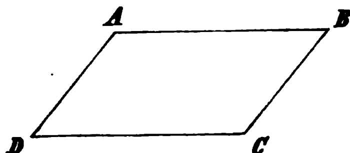
§ 23. Die Vierecke, und die Parallelogramme insbesondere.



Ein Viereck im engeren Sinn hat zwei Paare einander gegenüberliegender Seiten, d. h. solcher, welche keinen Eckpunkt gemeinschaftlich haben. Sind die Seiten beider Paare einander parallel, so heisst das Viereck ein **Parallelogramm**, hat es nur ein Paar parallele Seiten, so heisst das Viereck ein **Trapez**, hat es keine parallelen Seiten, so heisst es ein **Trapezoid**.

Mit dem Namen Trapez bezeichnet man auch im weiteren Sinne die Parallelogramme und die Trapeze im engeren Sinn zusammen, indem man ein Parallelogramm als ein Trapez ansieht, in welchem auch die sonst nicht als parallel vorausgesetzten Seiten parallel geworden sind.

Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, also $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, so sind je zwei aneinanderliegende Winkel, wie A und D, D und C, u. s. w. Gegenwinkel an parallelen Linien, und ihre Summe ist also gleich zwei Rechten. Da nun



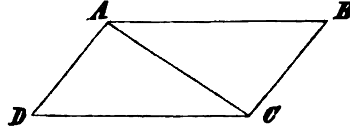
jeder Winkel des Parallelogramms zwei anderen zugleich anliegt, also z. B. $A + D = 2R$ und $C + D = 2R$, mithin $A + D = C + D$ ist, so folgt durch Subtraction des gemeinschaftlichen Winkels D von beiden Summen, dass $A = C$ ist, oder allgemein der Satz:

In jedem Parallelogramm sind je zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich. (1)

Hieraus geht hervor, dass durch einen Winkel eines Parallelogramms alle übrigen bestimmt sind; ist z. B. $\angle A = \alpha$ gegeben, so ist $B = 180° - \alpha$, $C = \alpha$, $D = 180° - \alpha$. Insbesondere folgt hieraus: Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind alle rechte; ist einer schief, so sind alle schief, und

zwar zwei spitz, und zwei stumpf. Hiernach kann man **rechtwinkelige** Parallelogramme, welche nur rechte Winkel haben, und **schiefwinkelige**, welche nur schiefe Winkel haben, unterscheiden.

Zieht man in einem Parallelogramm $ABCD$ eine Diagonale AC, so stimmen die entstehenden Dreiecke ABC, ADC ausser in der gemeinschaftlichen Seite AC auch in den derselben anliegenden Winkeln überein, denn die Winkel BAC und ACD, und ebenso ACB und DAC sind als Wechselwinkel an parallelen Linien gleich. **Jedes Parallelogramm wird also durch jede seiner Diagonalen in zwei congruente Dreiecke getheilt.** (2)



Daher sind auch die anderen homologen Seiten AB und DC, sowie AD und BC einander gleich, d. h.:

In jedem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich. (3)

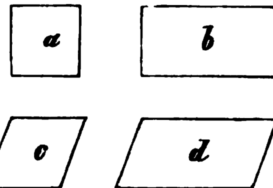
Dieser Satz kann auch in folgender Form ausgesprochen werden: Parallele Gerade zwischen Parallelen sind gleich.

Insbesondere ist jede zwischen zwei Parallelen gezogene, zu denselben senkrechte Gerade jeder anderen solchen Senkrechten gleich, oder

Parallele Geraden haben überall gleichen Abstand von einander. (4)

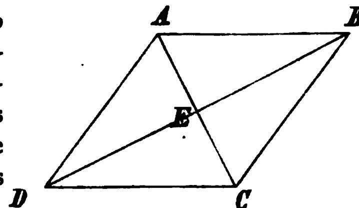
Sind auch zwei aneinanderliegende Seiten eines Parallelogramms von gleicher Länge, so sind alle Seiten desselben gleich. Man kann daher **gleichseitige** Parallelogramme und **ungleichseitige** unterscheiden. Durch Verbindung dieser Eintheilung mit der früheren nach den Winkeln erhält man vier Arten von Parallelogrammen:

a) das rechtwinkelige und gleichseitige, oder das **Quadrat**,
b) das rechtwinkelige und ungleichseitige, oder das **Rechteck**,
c) das schiefwinkelige und ungleichseitige, oder der **Rhombus**,
d) das schiefwinkelige und ungleichseitige, oder das **Rhomboid**.



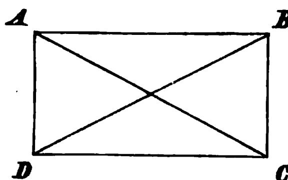
Das Rechteck wird auch Oblongum, der Rhombus Raute genannt. Man gebraucht auch die Bezeichnung Rechteck im weiteren Sinne für rechtwinkeliges und ebenso Rhombus im weiteren Sinn für gleichseitiges Parallelogramm, sodass das Quadrat sowol als ein besonderer Fall des Rechtecks, wie als ein besonderer Fall des Rhombus erscheint.

Zieht man die beiden Diagonalen AC, BD eines Parallelogramms zugleich, so entstehen vier Dreiecke, von denen je zwei gegenüberliegende, AEB, CED und ebenso AED, BEC, in einer Seite und den gleichliegenden Winkeln übereinstimmen und also congruent sind. Aus dieser Congruenz folgt, dass $AE = EC$, $BE = ED$ ist, oder der Satz: **Die Diagonalen eines jeden Parallelogramms halbiren einander.** (5)



Ist das Parallelogramm dabei gleichseitig, also $AB = AD$, so stimmen somit auch je zwei aneinander liegende jener Dreiecke, wie AEB, und AED, in den drei Seiten überein; es sind also alle vier Dreiecke congruent. Daher

sind in diesem Fall auch die Nebenwinkel *AED*, *AEB* gleich, also rechte. Ebenso sind die Winkel *DAE*, *BAE* als homologe Stücke congruenter Dreiecke gleich. Daher gilt der Satz: In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht zu einander und halbiren die betreffenden Winkel. (6)



Ist das Parallelogramm rechtwinkelig, so sind je zwei Dreiecke, welche eine Seite des Parallelogramms gemeinschaftlich haben, wie *ADC* und *BCD*, congruent, denn sie stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel überein. Daher ist $AC = BD$, oder:

In jedem rechtwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich. (7)

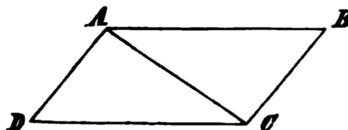
Zieht man durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms irgend eine Gerade und begrenzt dieselbe durch ihre Durchschnittspunkte mit zwei parallelen Seiten des Parallelogramms, oder auch den Verlängerungen derselben, so lässt sich wieder mittelst der Congruenz von Dreiecken beweisen, dass jene Gerade durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen halbirt wird. (8)

§ 24. Fortsetzung.

Die im § 23 aufgestellten Sätze über die Winkel, Seiten und Diagonalen der Parallelogramme gestatten Umkehrungen, welche im Folgenden aufgestellt und bewiesen werden sollen:

Sind in einem Viereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (1)

Denn ist $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, so ist $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$, mithin jede dieser Summen gleich der Hälfte der Gesammtsumme aller vier Winkel. Diese letztere beträgt aber in jedem Viereck vier Rechte, also ist $\angle A + \angle B = 2R$, und da $\angle A$ und $\angle B$ innere Gegenwinkel an den Linien *AD*, *BC* sind, so muss $AD \parallel BC$ sein. In derselben Weise lässt sich zeigen, dass auch $AB \parallel CD$ ist.



Sind in einem Viereck je zwei Gegenseiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm. (2)

Denn ist $AB = CD$, $AD = BC$ und zieht man *AC*, so stimmen die Dreiecke *ABC*, *ADC* in den drei Seiten überein und sind also congruent. Daher sind die Winkel *BAC* und *DCA* als homologe Stücke in congruenten Dreiecken gleich, und da dieselben ausserdem Wechselwinkel an den Linien *AB* und *DC* sind, so sind diese Linien parallel. In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Winkel *DAC* und *ACB* gleich, und hieraus dass auch *AD* und *BC* parallel sind.

Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich und dieselben zwei Seiten parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (3)

Denn ist $AB = DC$ und $AB \parallel DC$ und zieht man wieder *AC*, so stimmen die entstehenden Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein — in letzterem, weil $\angle BAC$ und $\angle ACD$ als Wechselwinkel an parallelen Geraden gleich sind. Aus der Congruenz der Dreiecke folgt, wie im vorigen Beweise, dass auch $AD \parallel BC$ ist.

Ist dagegen von einem Viereck bekannt, dass zwei Seiten desselben parallel und die beiden anderen Seiten gleich sind, so kann nicht behauptet werden, dass das Viereck nothwendig ein Parallelogramm sein müsse, denn zieht man wieder eine Diagonale, so stimmen die entstehenden Dreiecke in zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel überein, und es bleibt also die Möglichkeit bestehen, dass dieselben nicht congruent sind.

Halbiren die Diagonalen eines Vierecks einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm. (4)

Der Beweis dieses Satzes geschieht leicht mit Hilfe der Congruenz je zweier einander gegenüberliegender Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Stehen die Diagonalen eines Parallelogramms senkrecht zu einander, so ist dasselbe gleichseitig. Dieselbe Behauptung gilt, wenn die Diagonalen eines Parallelogramms die betreffenden Winkel desselben halbiren. (5)

Der Beweis folgt aus der Congruenz zweier aneinanderliegender Dreiecke, welche in zwei Seiten und entweder dem eingeschlossenen (rechten) oder in dem der grösseren (resp. in beiden) gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Sind die Diagonalen eines Parallelogramms einander gleich, so ist dasselbe rechtwinkelig. (6)

Der Beweis folgt aus der Congruenz zweier Dreiecke, welche eine Seite des Parallelogramms gemeinschaftlich haben, und welche in den drei Seiten übereinstimmen. Daher sind zwei innere Gegenwinkel an jener gemeinschaftlichen Seite einander gleich, also rechte.

In den beiden letzten der vorstehenden Umkehrungssätze musste, dass das Viereck ein Parallelogramm sei, mit in die Voraussetzung aufgenommen werden.

Durch Verbindung der Umkehrungssätze dieses Paragraphen mit den Sätzen des § 23 ergiebt sich noch Folgendes:

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, besteht aus den zwei Geraden, welche der ersteren in dem gegebenen Abstand parallel sind und auf verschiedenen Flächenseiten der ersteren liegen.

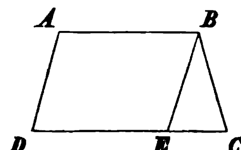
Umgekehrt ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen parallelen Geraden gleichweit entfernt sind, die zu beiden in gleichem Abstand von ihnen parallele Gerade.

In jedem ungleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen schief zu einander und theilen die betreffenden Winkel in je zwei ungleiche Theile.

In jedem schiefwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen ungleich; die grössere Diagonale geht durch die Scheitel der beiden spitzen Winkel.

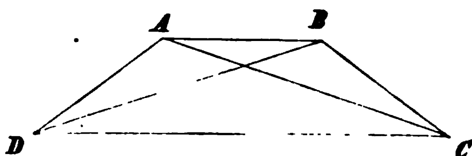
§ 25. Vom Trapez.

Wie bereits gezeigt wurde, können in einem Viereck zwei Seiten parallel und die beiden anderen gleich sein, ohne dass letztere parallel zu sein brauchen. Man erhält ein solches Trapez, welches ein gleichschenkeliges Trapez oder ein Antiparallelogramm genannt wird, wenn man an eine Seite BE eines schiefwinkeligen Parallelogramms $ABED$ in der Forderung entsprechender Weise ein gleichschenkeliges Dreieck BEC anlegt.



Ist umgekehrt $ABCD$ ein gleichschenkeliges Trapez, so lässt sich dasselbe in ein Parallelogramm und ein gleichschenkeliges Dreieck zerlegen, denn ist $AB \parallel DC$, $AD = BC$ und zieht man BE parallel zu AD bis zum Durchschnittspunkt E mit DC, so ist $ABED$ ein Parallelogramm, mithin $BE = AD$, und somit BE auch gleich BC, also BEC ein gleichschenkeliges Dreieck.

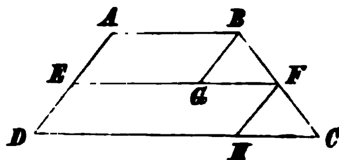
Hieraus folgt weiter, dass $\angle BEC = \angle BCE$, und da $\angle BEC = \angle ADE$ sein muss (als correspondirender an parallelen Linien), so ist auch $\angle BCD = \angle ADC$. Ferner betragen die Gegenwinkel an den parallelen Trapezseiten, also BAD und ADC, und ebenso ABC und BCD zusammen zwei Rechte. Nach Abzug der gleichen Winkel an D und C von je zwei Rechten bleiben daher auch für die beiden anderen Winkel des Trapezes gleiche Werthe übrig. Somit gilt der Satz: In jedem gleichschenkeligen Trapez sind je zwei an einer der parallelen Seiten liegende Winkel gleich. (1)



Zieht man ferner die Diagonalen AC, BD, so sind die Dreiecke ADC, BCD congruent, da $DC = DC$, $AD = BC$, $\angle ADC = \angle BCD$ ist. Hieraus folgt: Die Diagonalen eines jeden gleichschenkeligen Trapezes sind gleich lang. (2).

Wie von den beiden vorstehenden Sätzen richtige Umkehrungen gebildet und bewiesen werden können, bedarf keiner näheren Erörterung.

Zieht man in einem beliebigen Trapez durch den Halbirungspunkt einer der nicht parallelen Seiten die Parallele zu den parallelen Seiten, so muss dieselbe die andere nicht parallele Seite ebenfalls halbiren. Denn ist $AB \parallel EF \parallel DC$ und $AE = ED$, und zieht man $BG \parallel AE$ bis zum Durchschnitt mit EF und $FH \parallel ED$ bis zum Durchschnitt mit DC, so ist $BG = AE$ und $FH = ED$ (als Parallele zwischen Parallelen), mithin auch $BG = FH$.



Da ferner die Winkel BFG und FCH und ebenso die Winkel FBG und CFH als correspondirende an parallelen Linien gleich sind, so sind die Dreiecke BGF und FHC congruent, und mithin die homologen Seiten BF und FC einander gleich.

Umgekehrt muss die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes den parallelen Seiten desselben parallel sein, denn aus der Annahme des Gegentheils würde folgen, dass die durch E zu AB und DC gezogene, von der Verbindungslinie EF verschiedene Parallele die Seite BC in einem zweiten Halbirungspunkte treffen müsste, was nicht möglich ist.

Die Gerade EF, welche somit die doppelte Eigenschaft hat, dass sie die nicht parallelen Seiten des Trapezes halbirt uud den parallelen Seiten parallel ist, heisst die Mittellinie des Trapezes.

Aus der Congruenz der Dreiecke BGF und FHC folgt noch, dass auch $GF = HC$ ist. Da nun $EG = AB$, $DH = EF$ (als Parallele zwischen Parallelen), so ist $EF - AB = DC - EF$, oder wenn man der Kürze halber $AB = a$, $DC = b$ und $EF = m$ setzt, $m - a = b - m$, oder $2m = a + b$, oder $m = \frac{a+b}{2}$.

Die Hälfte der Summe zweier Grössen heisst das arithmetische Mittel der letzteren. Man kann daher den Satz aufstellen:

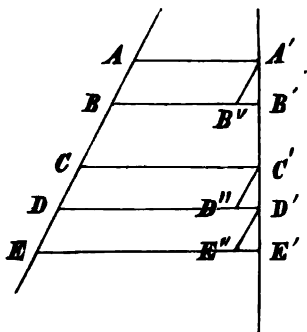
Die Mittellinie eines jeden Trapezes ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden parallelen Seiten. (3)

Die vorstehenden Sätze gelten auch dann, wenn die kleinere parallele Seite des Trapezes in Folge stetiger Abnahme schliesslich verschwindet, in welchem Falle sich das Trapez auf ein Dreieck reducirt. Die Beweise bleiben im Wesentlichen unverändert; der einzige Unterschied besteht darin, dass BG mit AE zusammenfällt, also nicht construirt zu werden braucht. Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks ist also der dritten Seite parallel und halb so gross als dieselbe.

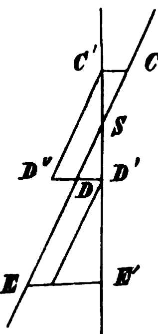
Die vorstehenden Sätze erleiden ferner keine Ausnahme, wenn die nicht parallelen Seiten des Trapezes durch parallele ersetzt werden, das Trapez also zu einem Parallelogramm wird; die Beweise werden in diesem Fall nur wesentlich vereinfacht, indem BF und FC bezüglich mit BG und FH zusammenfallen.

Durch eine noch weitergehende Verallgemeinerung führt die vorstehende Untersuchung zur Aufstellung folgender Sätze:

Sind auf einer von zwei beliebigen Geraden beliebig gleiche Strecken AB, CD, DE, .. abgetragen und durch die Endpunkte derselben nach beliebiger Richtung unter sich parallele Linien gezogen, welche die andere Gerade schneiden, so sind auch die auf letzterer abgschnittenen Strecken, welche mit je einer der Strecken AB, CD, DF, ... zwischen denselben Parallelen liegen, einander gleich. (4)



Zum Beweise ziehe man, wenn die gegebenen Geraden nicht parallel sind, die Parallelen $A'B''$, $C'D''$, $D'E''$ u. s. w. bezüglich zu AB, CD, DE u. s. w. und benutze ganz ebenso, wie bei dem obigen einfachsten Fall dieses Satzes für ein Trapez, die Congruenz der Dreiecke $A'B'B''$, $C'D'D''$, $D'E'E''$ u. s. w. Sind dagegen die gegebenen Geraden selbst parallel, so folgt die Richtigkeit des Satzes ohne Weiteres daraus, dass die Strecken $A'B'$, $C'D'$ u. s. w. den Strecken AB, CD u. s. w. selbst als Parallele zwischen Parallelen gleich sind. — Geht eine der parallelen Linien AA' u. s. w. durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten Geraden, so gilt dieser Punkt für beide Gerade zugleich, ohne dass eine wesentliche Aenderung des Beweises eintritt; liegt der Durchschnittspunkt S zwischen zweien der Parallelen CC' und DD', so bleibt der Beweis ebenfalls im Wesentlichen derselbe, nur trifft die durch C zu CD gezogene Parallele $C'D''$ die Gerade DD' auf ihrer Verlängerung über D.



Man kann auch zu dem vorstehenden allgemeineren Satz eine Umkehrung, sowie einen auf der Gleichheit der Strecken $B'B''$, $D'D''$, $E'E''$, ... beruhenden Satz über die Beziehungen zwischen den Längen der parallelen Verbindungslinien ableiten. Wir übergehen dies hier, da die betreffenden Sätze als besondere Fälle in noch allgemeineren enthalten sind, welche an einer späteren Stelle zur Behandlung kommen.

§ 26. Die Congruenz der Vielecke überhaupt.

Jedes Vieleck kann auf verschiedene Arten, z. B. durch Diagonalen oder durch Verbindung eines im Innern gelegenen Punktes mit allen Eckpunkten, in Dreiecke zerlegt werden.

Ist jedes von zwei Vielecken in n Dreiecke zerlegt, ist ferner jedes der Dreiecke des einen einem entsprechenden Dreiecke des anderen congruent, und liegen endlich diese congruenten Dreiecke in beiden Vielecken in durchaus übereinstimmender Weise aneinander, so können die beiden Vielecke so auf einander gelegt gedacht werden, dass jedes Dreieck des einen das ihm entsprechende des anderen, und dass somit die Vielecke selbst einander decken. Mithin sind letztere in solchem Falle congruent. In der Zerlegung von Vielecken in Dreiecke ist somit ein Mittel gegeben, um unter geeigneten Verhältnissen die Congruenz der ersteren zu beweisen.

Jedes n-Eck lässt sich durch eine Diagonale in ein $(n-1)$-Eck und ein Dreieck zerlegen. Sind die Stücke des n-Ecks, welche zur Bestimmung des $(n-1)$-Ecks erforderlich sind, gegeben, so ist mit letzterem auch eine Seite des Dreiecks bestimmt. Man bedarf also nur noch zweier Bestimmungsstücke dieses Dreiecks, um auch dasselbe, und somit das n-Eck selbst zu bestimmen. Somit ergiebt sich, dass man zur Bestimmung eines n-Ecks zwei (von einander unabhängige) Stücke mehr braucht, als zur Bestimmung eines $(n-1)$-Ecks. Da nun ein Dreieck im Allgemeinen durch drei Stücke bestimmt ist, so beträgt die Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke bei einem Viereck 5, bei einem Sechseck 7, u. s. w., allgemein bei einem n-Eck $2n-3$. Es sind also im Allgemeinen je drei Stücke eines n-Ecks durch die $2n-3$ übrigen bestimmt. Die letzteren müssen selbstverständlich von einander unabhängig sein und dürfen daher z. B. nicht alle n Winkel des Polygons enthalten.

Ein solches Bestimmungsstück kann durch eine anderweite Bedingung für Stücke des Polygons ersetzt werden, wie z. B. durch diejenige, dass zwei bestimmte Seiten einander parallel sein sollen. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich u. A. aus den folgenden besonderen Fällen:

Parallelogramme, welche in zwei aneinander liegenden Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind congruent (1). Der Beweis dieses Satzes kann sowol durch Zerlegung der Parallelogramme in congruente Dreiecke, als auch unmittelbar durch Deckung geführt werden.

Ein Parallelogramm kann also schon durch drei von einander unabhängige Stücke bestimmt werden, während für ein Viereck überhaupt fünf Bestimmungsstücke nöthig sind. Dies rührt offenbar daher, dass die doppelte Bedingung des Parallelismus je zweier Gegenseiten die fehlenden Bestimmungsstücke liefert.

Ueberhaupt ist ein Parallelogramm durch irgend welche drei Stücke (selbstverständlich unter Angabe der gegenseitigen Lage derselben im Parallelogramm bestimmt, die eins der Dreiecke bestimmen, in welche das Parallelogramm durch die beiden Diagonalen zugleich getheilt wird.

Insbesondere ist weiterhin ein Rechteck durch zwei aneinanderliegende Seiten, ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, ein Quadrat durch eine Seite bestimmt. — Nimmt man, wie bei dem Parallelogramm überhaupt, die Diagonalen und die von ihnen mit den Seiten und unter sich gebildeten Winkel unter die Bestimmungsstücke auf, so ist ein Rechteck und ebenso ein Rhombus im Allgemeinen durch zwei von einander unabhängige Stücke, ein Quadrat durch ein (nicht, wie die betreffenden Winkel, ohne dies bekanntes) Stück bestimmt.

Eine analoge Untersuchung zeigt, dass ein gleichschenkeliges Trapez durch drei, ein Trapez überhaupt durch vier Stücke im Allgemeinen bestimmt ist.

Die Zerlegung der Polygone in Dreiecke reicht nicht in allen Fällen hin, um im Besonderen

den Nachweis führen zu können, dass das Polygon durch die gegebenen Stücke bestimmt ist, oder dass die in diesen Stücken übereinstimmenden Polygone congruent sind. Beispielsweise findet dies schon bei Vierecken statt, wenn zwei gegenüberliegende Seiten und drei Winkel desselben als Bestimmungsstücke gewählt sind. Doch reicht das Vorstehende für die nachfolgenden Untersuchungen hin, und es kann daher eine allgemeinere Theorie der Congruenz beliebiger Polygone einer anderen Stelle überlassen bleiben.

§ 27. Kreis und Punkt.

Ein Punkt kann innerhalb der von einem Kreise eingeschlossenen Fläche oder ausserhalb derselben oder auf dem Kreise selbst liegen. Der Kürze halber sagt man in den beiden ersteren Fällen, der Punkt liege innerhalb, bezw. ausserhalb des Kreises.

Aus der Erklärung des Kreises folgt unmittelbar: Je nachdem ein Punkt innerhalb eines Kreises, auf demselben oder ausserhalb desselben liegt, ist sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, ebenso gross oder grösser als ein Radius des Kreises. Umgekehrt, je nachdem der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt eines Kreises kleiner, ebenso gross oder grösser als ein Radius des letzteren ist, liegt der Punkt innerhalb des Kreises, auf demselben oder ausserhalb desselben.

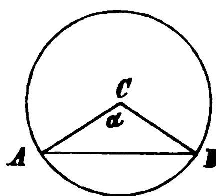
Hieraus ergeben sich folgende Sätze: Kreise mit gleichen Radien sind congruent (1), denn sie lassen sich zur Deckung bringen, indem man sie so aufeinander legt, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen. Fiele nämlich hierbei irgend ein Punkt des einen Kreises nicht auf einen entsprechenden Punkt des anderen, so müsste er ausserhalb oder innerhalb des letzteren liegen, und in diesem Fall könnte sein Abstand vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt nicht gleich dem gemeinschaftlichen Radius sein.

Ebenso, wie die Kreise sind zufolge dieses Beweises die von ihnen begrenzten Kreisflächen congruent. — Umgekehrt ist von zwei Kreisflächen mit ungleichen Radien diejenige grösser als die andere, welche den grösseren Radius hat. (Gleiche Kreisflächen sind congruent.)

Jeder Durchmesser eines Kreises theilt diesen und die zugehörige Fläche in zwei congruente Theile (2). Der Beweis kann in gleicher Weise, wie der des vorigen Satzes, durch Deckung geführt werden. —

Man nennt jeden der beiden gleichen Theile eines Kreises einen Halbkreis.

Zu jeder Sehne eines Kreises gehören zwei durch dieselbe begrenzte Bogen desselben. Diese Bogen sind nach dem Vorstehenden einander gleich, wenn die Sehne ein Durchmesser ist; dagegen sind sie in jedem anderen Fall ungleich. Verbindet man die Endpunkte eines Bogens mit dem Mittelpunkt, so begrenzen die beiden verbindenden Radien mit dem Bogen einen Theil der Kreisfläche, welcher ein Sector oder Kreisausschnitt genannt wird. Derjenige Theil einer Kreisfläche, welcher von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, heisst ein Segment oder Kreisabschnitt. Jeder Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist (dessen Schenkel also durch Radien angegeben werden können), heisst ein Centriwinkel. Zu jedem Centriwinkel α gehört ein bestimmter (zwischen seinen Schenkeln liegender) Bogen AB, eine bestimmte Sehne AB, ein bestimmter Sector ACB und ein bestimmtes Segment. Ist der Centriwinkel ein gestreckter, so wird der Bogen ein Halbkreis, die Sehne ein Durchmesser, und Sector und Segment werden beide zur Halbkreisfläche. — Ebenso gehört zu jedem Bogen AB ein bestimmter Centriwinkel α, eine bestimmte Sehne AB, u. s. w. Dagegen gehören zu jeder Sehne AB, wie zwei im Allgemeinen verschiedene Bogen, so auch zwei Centriwinkel, zwei Sectoren und zwei Segmente.



Die beiden Centriwinkel betragen stets zusammen vier Rechte, daher ist im Allgemeinen der eine hohl, der andere erhaben. Die beiden Sectoren und ebenso die beiden Segmente bilden zusammen die ganze Kreisfläche. Durch Deckung kann, entsprechend wie in den vorhergehenden Sätzen, bewiesen werden:

Zu gleichen Centriwinkeln gehören (in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen) gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Sectoren und gleiche Segmente. (3)

Umgekehrt gehören zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel, gleiche Sehnen u. s. w., und zu gleichen Sehnen gehören gleiche hohle und gleiche erhabene Centriwinkel, gleiche Bogen, die kleiner als ein Halbkreis, und gleiche Bogen, die grösser als ein Halbkreis sind, u. s. w.

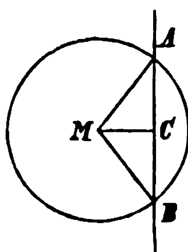
Gleiche Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise, und ebenso gleiche Sectoren und Segmente sind congruent.

§ 28. Kreis und Gerade.

Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Gerade die Senkrechte, so sind alle Punkte der Geraden, welche nicht der Fusspunkt der Senkrechten sind, vom Mittelpunkt des Kreises weiter entfernt als dieser Fusspunkt (Vergl. § 20, (1)). Hieraus folgt:

Ist der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt eines Kreises grösser als ein Radius des letzteren, so liegen alle Punkte der Geraden ausserhalb des Kreises; ist jener Abstand gleich einem Radius, so hat die Gerade mit dem Kreise einen einzigen Punkt gemeinsam, und alle anderen Punkte der Geraden liegen ausserhalb des Kreises; ist endlich jener Abstand kleiner als ein Radius, so geht die Gerade durch einen Punkt im Innern des Kreises. Im zweiten dieser Fälle sagt man, die Gerade berühre den Kreis, im dritten, sie schneide denselben. Eine Gerade, die einen Kreis berührt, heisst eine Berührungslinie oder eine Tangente des Kreises, und der beiden Linien gemeinschaftliche Punkt heisst der Berührungspunkt derselben. Eine Gerade, die einen Kreis schneidet, heisst eine Secante desselben, und jeder gemeinschaftliche Punkt beider Linien heisst ein Durchschnittspunkt derselben.

Da der Kreis eine ringsum geschlossene Figur begrenzt, so muss eine unendliche Gerade, die durch einen Punkt im Innern der letzteren geht, die begrenzende Linie in mindestens zwei Punkten schneiden; denn denkt man sich die Gerade durch einen bewegten Punkt beschrieben, so muss dieser an der Stelle eines Durchschnittspunktes in's Innere der Figur ein-, und an der Stelle eines anderen aus demselben austreten. Es seien A und B diese beiden Durchschnittspunkte einer Secante, C der Fusspunkt der vom Mittelpunkt M des Kreises auf die Secante gefällten Senkrechten, so ist $MA = MB$. Verbindet man einen Punkt der Secante zwischen A und B mit M, so ist die Verbindungslinie nach § 20 kürzer als ein Radius; verbindet man dagegen einen Punkt der Secante, welcher weiter von C entfernt ist, als A oder B, mit M, so ist die Verbindungslinie länger als ein Radius. Demnach kann eine gerade Linie einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden. Alle zwischen diesen Durchschnittspunkten liegenden Punkte der Secante liegen innerhalb, alle anderen



ausserhalb des Kreises. Drei Punkte eines Kreises können niemals auf einer und derselben geraden Linie liegen, kein Theil des Kreises kann also gerade sein, oder der Kreis ist in allen seinen Theilen eine krumme Linie.

Jede Secante hat nach dem Vorstehenden mit dem Kreise eine Sehne gemeinsam. — Verbindet man die Endpunkte A, B einer Sehne mit dem Mittelpunkte M des Kreises, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck. Durch Anwendung der Sätze des § 21 auf dieses und entsprechende Erweiterung bezw. Umkehrung erhält man leicht folgende Sätze über Sehnen:

Das vom Mittelpunkt auf eine Sehne gefällte Perpendikel halbirt die Sehne und die zu derselben gehörigen Centriwinkel. Daher halbirt dasselbe (resp. seine Verlängerung) auch die beiden zu der Sehne gehörigen Bogen. (1)

Der durch den Halbirungspunkt einer Sehne gehende Durchmesser steht umgekehrt senkrecht zur Sehne und halbirt die zugehörigen Centriwinkel und Bogen. (2)

Die Halbirungslinie eines Centriwinkels steht senkrecht auf der zu letzterem gehörigen Sehne und halbirt dieselbe, sowie die zugehörigen Bogen. (3)

Die auf einer Sehne in ihrem Halbirungspunkt senkrecht stehende Gerade geht durch den Mittelpunkt des Kreises, u. s. w. (4)

Der Durchmesser, welcher einen Bogen halbirt, halbirt auch die zugehörige Sehne und steht senkrecht zu derselben, u. s. w. (5)

Die durch den Halbirungspunkt eines Bogens und den Halbirungspunkt der zugehörigen Sehne gehende Gerade geht auch durch den Mittelpunkt und steht senkrecht zu der Sehne, u. s. w. (6)

Dasselbe gilt von der Verbindungslinie der Halbirungspunkte der beiden Bogen, welche zu einer und derselben Sehne gehören. (7)

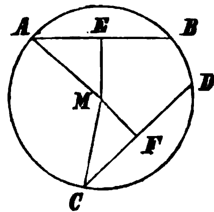
Die vom Halbirungspunkt eines Bogens auf die zugehörige Sehne gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt, u. s. w. (8)

Ist ein Punkt von drei Punkten eines Kreises gleichweit entfernt, so ist er der Mittelpunkt. Denn sind A, B, C jene Punkte, so müssen die Mittelsenkrechten der Sehnen AB, BC beide einander nach (4) im Mittelpunkt, aber auch beide nach § 21 in jenem gleichweit entfernten Punkte schneiden. (9)

Durch jede drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, lässt sich ein Kreis, und nur ein einziger legen. (10)

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gemeinschaftliche Sehne haben (welche also durch dieselben zwei Punkte gehen), ist die Mittelsenkrechte dieser Sehne. (11)

Es seien ferner AB, CD zwei Sehnen eines Kreises und M der Mittelpunkt. Fällt man von M die Senkrechten ME, MF bezüglich auf AB, und CD und zieht MA und MC, so entstehen die rechtwinkeligen Dreiecke MEA und MFC, deren Hypotenusen als Radien gleich sind. Sind nun die Sehnen AB, CD, und also auch ihre Hälften gleich, so sind diese Dreiecke congruent, und mithin ist auch $ME = MF$. Ist umgekehrt bekannt, dass $ME = MF$ ist, so sind wieder die Dreiecke congruent, woraus $AB = CD$ folgt. Ist dagegen eins der Kathetenpaare ungleich, so ist die andere Kathete in demjenigen Dreieck die grössere, in welchem die erstere die kleinere ist. (§ 19, (5)).



Somit hat man die Sätze:

Gleiche Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) haben gleiche

Abstände vom Mittelpunkt, und umgekehrt, Sehnen, welche gleiche Abstände vom Mittelpunkt haben, sind gleich. (12)

Von zwei ungleichen Sehnen hat die grössere den kleineren Abstand vom Mittelpunkt, und umgekehrt, je kleiner der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkt, desto grösser ist die Sehne. (13)

Daher ist jeder Durchmesser grösser als jede nicht durch den Mittelpunkt gehende Sehne. — Streng genommen findet der vorstehende Beweis auf diesen besonderen Fall keine Anwendung, da für einen Durchmesser AB von keinem Dreieck MEA die Rede sein kann. Man kann den Beweis dadurch führen, dass man die beiden Endpunkte der Sehne CD mit dem Mittelpunkt M verbindet; dann ist im Dreieck MCD die Summe der Seiten MC und MD grösser als die dritte Seite CD; da aber der Durchmesser $AB = MC + MD$, so ist auch $AB > CD$.

Eine kleinste Sehne eines Kreises giebt es nicht. Lässt man eine Secante sich so bewegen, dass ihr Abstand vom Mittelpunkt stetig kleiner wird, so wird die zugehörige Sehne ebenfalls stetig kleiner und verschwindet, indem sie sich auf einen Punkt reducirt, wenn der Abstand der bewegten Geraden vom Mittelpunkt gleich dem Radius wird. Die Secante wird in diesem Fall zu einer Tangente. In diesem Sinne kann man sagen, eine Tangente dürfe als eine Secante betrachtet werden, deren beide Durchschnittspunkte mit dem Kreise in einen Punkt zusammengefallen seien.

Die fundamentalen Sätze über Tangenten des Kreises knüpfen sich an den bereits im Eingang dieses Paragraphen bewiesenen Satz, welcher sich auch, wie folgt, aussprechen lässt:

Eine Gerade, welche auf einem Radius in seinem (auf der Peripherie liegenden) Endpunkte senkrecht steht, berührt den Kreis in diesem Punkte. (14)

Dieser Satz gestattet zunächst folgende Umkehrungen:

Jede Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem durch ihren Berührungspunkt senkrechten Radius. (15.) Steht nämlich eine Gerade AB auf einem Radius MC in C schief, so muss das vom Mittelpunkt M auf AB gefällte Perpendikel kleiner als der Radius MC sein, und somit AB den Kreis schneiden.

Daher lässt sich durch einen und denselben Punkt eines Kreises nur eine einzige Tangente an diesen ziehen.

Da ferner nur eine einzige Senkrechte vom Mittelpunkt auf die Tangente möglich ist, so folgt umgekehrt:

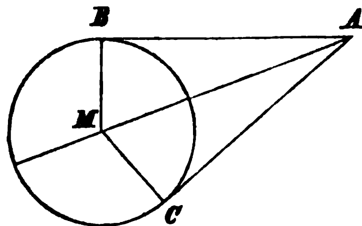
Die vom Mittelpunkt auf eine Tangente gefällte Senkrechte trifft letztere in ihrem Berührungspunkt (16) und

Die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt (17).

Zieht man ferner an einen Kreis zwei Tangenten, so können dieselben nur dann parallel sein, wenn ihre Berührungs-Radien in eine Gerade fallen, und umgekehrt; die durch die Endpunkte eines Durchmessers gezogenen Tangenten sind parallel.

Je zwei Tangenten, deren Berührungspunkte nicht Endpunkte desselben Durchmessers sind, schneiden einander in einem ausserhalb des Kreises liegenden Punkte. Umgekehrt lassen sich von jedem ausserhalb eines Kreises liegenden Punkte zwei, und nicht mehr Tangenten an ersteren ziehen, denn ist A jener

Punkt und M der Mittelpunkt des Kreises, und lässt man die durch A und M gehende Secante sich um A drehen, so erhält dieselbe bei gleichen Winkeln mit ihrer ursprünglichen Lage AM zu beiden Seiten der letzteren auch gleiche Abstände vom Mittelpunkt (denn die betreffenden rechtwinkeligen Dreiecke sind congruent), dagegen bei verschiedenen Winkeln zufolge der Nichtcongruenz der betreffenden rechtwinkeligen Dreiecke auch verschiedene Abstände, und zwar wächst der Abstand stetig bei stetig wachsendem Winkel. Es giebt daher auf jeder Seite von AM eine und nur eine Lage der Secante, bei welcher ihr Abstand vom Mittelpunkt gleich dem Radius ist, sie selbst also zur Tangente wird.



Sind AB und AC die beiden von A an den Kreis M möglichen Tangenten, so stimmen die Dreiecke ABM und ACM ausser in den Radien MB, MC und der gemeinschaftlichen Seite AM auch in den rechten Winkeln bei B und C überein und sind also congruent. Hieraus folgt:

Je zwei von demselben Punkt an einen Kreis gezogene Tangenten sind (von diesem Punkt bis zu den Berührungspunkten gerechnet) gleichlang. (18.)

Der Winkel der beiden von demselben Punkt ausgehenden Tangenten wird durch die Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkt halbirt. (19)

Dasselbe gilt von dem Winkel der beiden Berührungsradien.

Umgekehrt liegt der Mittelpunkt eines jeden Kreises, der die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt, auf der Halbirungslinie des letzteren, oder

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene einander schneidende Gerade berühren, wird von den Halbirungslinien der Winkel dieser Geraden gebildet. (20.)

Wir fügen diesem Orte noch die folgenden hinzu, deren Richtigkeit sich leicht aus den vorhergegangenen Sätzen nachweisen lässt:

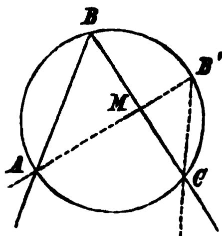
Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene parallele Linien berühren, ist die zu diesen Linien in gleichem Abstand von beiden parallele Gerade.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkt zu der Geraden senkrechte Gerade.

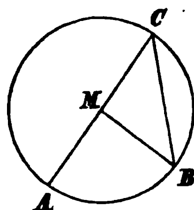
Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade berühren und denselben gegebenen Radius haben, besteht aus den beiden Linien, welche dieser Geraden in einem Abstande gleich dem Radius parallel sind.

§ 29. Kreis und Winkel.

Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie eines Kreises liegt, und dessen Schenkel durch Sehnen des Kreises bestimmt werden, heisst ein Peripheriewinkel des letzteren. Zu jedem Peripheriewinkel ABC gehört ein zwischen seinen Schenkeln liegender Bogen AC. Man sagt, der Peripheriewinkel »stehe auf diesem Bogen.« Zu jedem Peripheriewinkel gehört daher auch ein Centriwinkel, der auf demselben Bogen steht, sowie eine Sehne.

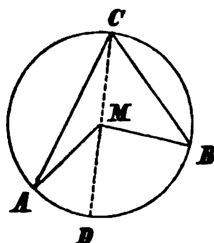


Dagegen gehören zu einem und demselben Bogen AC oder zu einem und demselben Centriwinkel AMC unendlich viele Peripheriewinkel, denn jeder Punkt des Kreises, welcher nicht auf jenem Bogen AC liegt, kann Scheitelpunkt eines solchen Peripheriewinkels sein. Denkt man sich den Scheitel B des Peripheriewinkels auf dem Bogen ABC stetig von A bis C bewegt, so geht in jeder der beiden Grenzlagen, also wenn B mit A oder mit C zusammenfällt, der eine Schenkel des Winkels in die durch diesen Punkt mögliche Tangente über, während die Sehne des anderen mit der Sehne AC zusammenfällt. Man erhält so einen Winkel, dessen Scheitel ebenfalls auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel ebenfalls den Bogen AC zwischen sich fassen, bei denen aber nur der eine Schenkel durch eine Sehne, dagegen der andere durch eine Tangente angegeben wird. Wir nehmen auch Winkel dieser Art, für welche von verschiedenen Seiten verschiedene eigene Namen vorgeschlagen worden sind, in den Begriff Peripheriewinkel im weiteren Sinn auf, da sie sich den vorher mit diesem Namen bezeichneten als Grenzfälle folgerichtig anschliessen.



Jeder Peripheriewinkel ist halb so gross als der Centriwinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht. (1)

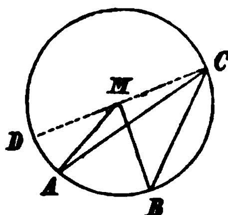
Zum Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes unterscheiden wir vier mögliche Fälle: Ist der Peripheriewinkel zunächst ein solcher im engeren Sinne, und liegt a) der Mittelpunkt M auf einem Schenkel CA des Peripheriewinkels ACB, so ist der Centriwinkel AMB Aussenwinkel des gleichschenkeligen Dreiecks MCB, folglich doppelt so gross als der an der Grundlinie des letzteren liegende Winkel MCB.



b) Liegt der Mittelpunkt M innerhalb des Peripheriewinkels ACB, so ziehe man den Durchmesser CD. Dann ist nach dem vorigen Fall $\angle AMD = 2 \cdot \angle ACD$ und $\angle DMB = 2 \cdot \angle DCB$, also auch

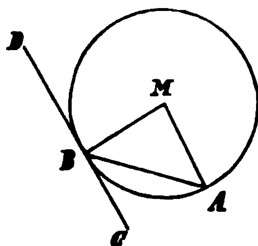
$$\angle AMD + \angle DMB = 2 \cdot (\angle ACD + \angle DCB),$$

d. i. $\angle AMB = 2 \cdot \angle ACB.$



c) Liegt der Mittelpunkt M ausserhalb des Peripheriewinkels ACB, so ziehe man wieder den Durchmesser CD; dann ist wieder der Fall a) zweimal anwendbar, und man erhält diesmal

$$\angle AMB = \angle DMB - \angle DMA = 2 \cdot (\angle DCB - \angle DCA) = 2 \cdot \angle ACB.$$



d) Ist der eine Schenkel des Peripheriewinkels ABC, eine Tangente BC und ABC ein spitzer Winkel, so ist, weil CB senkrecht auf MB, $\angle ABC = 90^\circ - \angle MBA$, dagegen $\angle AMB = 180^\circ - 2 \cdot \angle MBA = 2 \cdot (90^\circ - \angle MBA)$, also wieder $\angle AMB = 2 \cdot \angle ABC$.

Ist dagegen der Peripheriewinkel ein stumpfer ABD, so ist der zugehörige Centriwinkel der erhabene AMB. Da dieser den hohlen Winkel AMB zu vier Rechten, dagegen $\angle ABD$ den Winkel ABC zu zwei Rechten ergänzt, so folgt die Richtigkeit des Satzes auch in diesem Fall aus dem unmittelbar Vorhergehenden. Wäre endlich der Peripheriewinkel ABC ein rechter, so müsste AB ein Durchmesser sein, und der zugehörige Centriwinkel wäre ein gestreckter.

Aus dem vorstehenden Lehrsatz ergeben sich unmittelbar die nachfolgenden:

Alle Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehen, sind gleich (2), denn sie sind sämmtlich gleich der Hälfte eines und desselben Centriwinkels.

Ebenso sind Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen stehen, gleich, denn es gehören zu ihnen gleiche Centriwinkel.

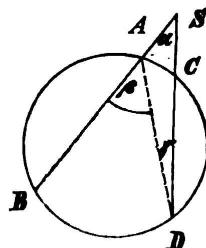
Jeder Peripheriewinkel, welcher auf einem Halbkreise steht, ist ein rechter (3), denn der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter.

Dagegen sind Peripheriewinkel, deren Bogen kleiner als ein Halbkreis sind, spitze, und solche, deren Bogen grösser als ein Halbkreis sind, stumpfe.

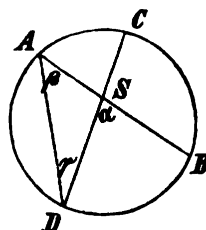
Da zu jeder Sehne zwei Bogen gehören, so gehören auch zu jeder Sehne zweierlei Peripheriewinkel. Die beiden Centriwinkel derselben ergänzen einander zu vier Rechten. Hieraus folgt:

Zwei Peripheriewinkel, welche auf derselben Sehne, aber auf entgegengesetzten Bogen stehen, betragen zusammen zwei Rechte. (4)

Ueberhaupt müssen je zwei Peripheriewinkel eines Kreises, deren Bogen einander zum ganzen Kreise ergänzen, supplementär zu einander sein.



Schneiden zwei Secanten einander ausserhalb des Kreises, so bilden dieselben mit einander einen Winkel, welcher gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel ist, von denen jeder auf einem der zwischen den Secanten liegenden Kreisbogen steht. Denn zieht man in nebenstehender Figur AD, so ist β Aussenwinkel am Dreieck SAD, also $\beta = \alpha + \gamma$ oder $\alpha = \beta - \gamma$. Der Winkel α ist also kleiner als β.



Schneiden sich dagegen zwei Secanten innerhalb des Kreises, so ist jeder von denselben gebildete Winkel gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, welche auf den von den Schenkeln des ersteren Winkels und denen seines Scheitelwinkels eingeschlossenen Bogen stehen. Denn zieht man in nebenstehender Figur AD, so ist α als Aussenwinkel des Dreiecks ASD gleich $\beta + \gamma$. Der Winkel α ist also grösser als jeder der Winkel β und γ.

Hieraus folgt weiter, dass, wenn über derselben Geraden beliebig viele Dreiecke errichtet werden, deren Winkel an der Spitze sämmtlich einander gleich sind, die Spitzen selbst auf einem Kreisbogen liegen müssen, von welchem jene Gerade Sehne ist, und welchen man erhält, wenn man durch die Endpunkte dieser Sehne und eine jener Spitzen den Kreis legt. Jedes Dreieck über derselben Geraden, dessen Spitze innerhalb des betreffenden Kreisabschnitts liegt, hat einen grösseren, jedes, dessen Spitze ausserhalb dieses Abschnitts liegt, einen kleineren Winkel an der Spitze. Mit anderen Worten:

Der geometrische Ort der Scheitel aller Winkel von gleicher, gegebener Grösse, deren Schenkel durch dieselben zwei gegebenen Punkte gehen, ist ein Kreisbogen (bezw. auf jeder Seite der betreffenden Sehne).

Insbesondere ist der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinkeligen Dreiecke, welche auf einer gemeinschaftlichen Hypotenuse (und auf einerlei Seite derselben) stehen, der über der Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Halbkreis.

§ 30. Kreis und Figuren.

Verbindet man von drei oder mehr auf einem Kreise angenommenen Punkten je zwei benachbarte durch die zugehörige Sehne, so entsteht eine geradlinige Figur. Dasselbe ist der Fall, wenn man durch jeden dieser Punkte an den Kreis die Tangente zieht, vorausgesetzt, dass nicht zwei aufeinanderfolgende dieser Punkte Endpunkte desselben Durchmessers sind, in welchem Fall die betreffenden Tangenten einander parallel werden.

Ein n-Eck, dessen Eckpunkte sämmtlich auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen sind, heisst dem Kreise einbeschrieben; ein n-Eck, dessen Seiten sämmtlich Tangenten eines Kreises sind, heisst diesem umbeschrieben. Im ersteren Fall heisst der Kreis der Figur umbeschrieben, im letzteren heisst er derselben einbeschrieben.

Nicht um jede geradlinige Figur lässt sich ein Kreis beschreiben. Damit dies möglich sei, muss ein Punkt vorhanden sein, welcher von allen Eckpunkten der Figur gleichweit entfernt ist. Ebenso muss, damit sich in ein gegebenes n-Eck ein Kreis beschreiben lasse, ein Punkt vorhanden sein, welcher von allen Seiten der Figur gleichweit entfernt ist.

Ein Vieleck, in welches sich ein Kreis beschreiben lässt, heisst ein Tangenten-Vieleck, ein solches, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt, ein Sehnen-Vieleck.

Lässt sich um eine Figur ein Kreis beschreiben, so müssen die Mittelsenkrechten sämmtlicher Seiten derselben einander in einem einzigen Punkte schneiden, und umgekehrt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises.

Lässt sich in eine Figur ein Kreis beschreiben, so müssen die Halbirungslinien sämmtlicher inneren Winkel derselben einander in einem einzigen Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises.

Man findet daher den Mittelpunkt des einem Sehnen-Vieleck umbeschriebenen Kreises, wenn man auf zwei nicht parallelen, z. B. auf zwei aneinanderliegenden Seiten in deren Halbirungspunkten die Senkrechten errichtet. Der Radius des Kreises ist gleich dem Abstand des Durchschnittspunktes der Senkrechten von jedem Eckpunkt. Den Mittelpunkt des einem Tangenten-Vieleck einbeschriebenen Kreises findet man, indem man zwei Winkel desselben (deren Halbirungslinien nicht ausnahmsweise in dieselbe Gerade fallen, also z. B. zwei aneinanderliegende Winkel halbirt. Der Radius des Kreises ist gleich dem Abstand des Durchschnittspunktes der Winkelhalbirenden von jeder Seite.

Aus früheren Sätzen folgt: Um jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben. — Da jeder Winkel des Dreiecks ein Peripheriewinkel dieses Kreises ist, so ergiebt sich leicht, dass der Mittelpunkt des letzteren bei einem rechtwinkeligen Dreieck der Halbirungspunkt der Hypotenuse ist, und bei einem spitzwinkeligen innerhalb, bei einem stumpfwinkeligen ausserhalb des Dreiecks liegt.

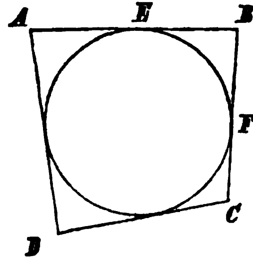
In jedes Dreieck lässt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt desselben liegt stets innerhalb der Figur.

Im Allgemeinen ist dieser Mittelpunkt von dem des umbeschriebenen Kreises verschieden; nur bei gleichseitigen Dreiecken fallen beide zusammen. Vergl. § 21 und 22.

Zu jedem Dreieck existiren ausser dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zufolge § 22 noch drei andere Punkte, von denen jeder von den drei Seiten (bezw. deren Verlängerungen) gleichweit entfernt ist. Diese Punkte sind die Durchschnittspunkte der Halbirungslinien von je zwei Aussenwinkeln des Drei-

ecks und der Halbirungslinie des am dritten Eckpunkt liegenden inneren Winkels. Um jeden dieser Punkte lässt sich hiernach ebenfalls ein Kreis beschreiben, welcher alle drei Seiten des Dreiecks, bezw. deren Verlängerungen berührt, und zwar liegt jedesmal ein Berührungspunkt auf einer Seite selbst, während die beiden anderen bezüglich auf den Verlängerungen der anderen Seiten liegen. Jeder dieser Kreise heisse daher der betreffenden ersteren Seite »anbeschrieben«. Sein Mittelpunkt liegt auf der Halbirungslinie desjenigen inneren Dreieckswinkels, welcher dieser Seite gegenüberliegt; der Kreis selbst liegt immer ausserhalb des Dreiecks.

Ist ein Viereck einem Kreise einbeschrieben, so sind je zwei einander gegenüberliegende Winkel desselben Peripheriewinkel, deren Bogen einander zum ganzen Kreise ergänzen. Daher gilt der Satz:



In jedem Sehnen-Viereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel zwei Rechte. (1)

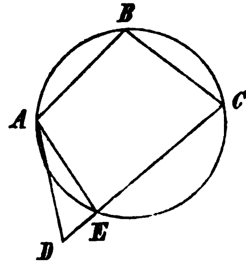
Ist ferner $ABCD$ ein Tangenten-Viereck, so sind je zwei Seiten-Abschnitte, welche zwischen demselben Eckpunkt und den Berührungspunkten der anliegenden Seiten liegen, wie z. B. BE und BF, gleich lang [§ 28, (18)].

Je zwei gegenüberliegende Seiten AB und DC, sowie AD und BC enthalten vier solche Abschnitte, dergestalt dass jeder Abschnitt des einen Paares einem Abschnitt des anderen Paares gleich ist. Hieraus folgt der Satz:

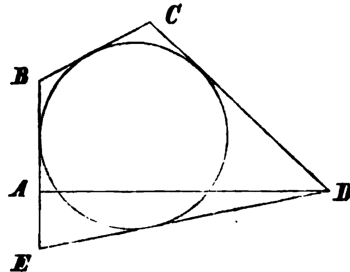
In jedem Tangentenviereck ist die Summe je zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen. (2)

Die beiden vorstehenden Sätze lassen sich umkehren:

Ist in einem Viereck die Summe zweier einander gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so lässt sich um das Viereck ein Kreis beschreiben. (3)



Es lässt sich nämlich stets ein Kreis beschreiben, der durch drei Eckpunkte A, B, C des Vierecks geht. Läge nun der vierte Eckpunkt D ausserhalb dieses Kreises, so müsste wenigstens eine der Seiten AD, CD den Kreis schneiden. Dieser Durchschnittspunkt E wäre dann der vierte Eckpunkt eines Sehnenvierecks $ABCE$, und es müsste daher $\angle ABC + \angle CEA = 2R$. sein. Da aber $\angle CEA$ als Aussenwinkel des Dreiecks AED grösser als der Winkel CDA ist, so würde hieraus folgen, dass $\angle ABC + CDA < 2R$ wäre. Läge dagegen D innerhalb des Kreises, so könnte man CD bis zum Durchschnittspunkt E mit dem Kreise verlängern und durch eine ganz entsprechende Beweisführung, wie vorher, folgern, dass $\angle ABC + \angle CDA > 2R$ sein müsse. Soll also $\angle ABC + \angle CDA = 2R$ sein, so muss auch D auf dem durch A, B und C gelegten Kreise liegen.



Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so lässt sich in das Viereck ein Kreis beschreiben. (4)

Es lässt sich nämlich stets ein Kreis beschreiben, der drei Seiten AB, BC, CD des Vierecks berührt. Schnitte nun die vierte Seite AD den Kreis, so könnte man mittelst einer von D an letzteren gelegten Tangente ein Tangentenviereck $EBCD$ construiren, und es müsste dann

$$EB + CD = BC + DE$$

sein. Da nun $EB = AB + AE$ und $DE < AE + AD$, so müsste

$$AB + AE + CD < BC + AE + AD,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten AE subtrahirt,

$$AB + CD < BC + AD$$

sein. — Fiele dagegen AD ganz ausserhalb des Kreises, so könnte man wieder mittelst einer von D an letzteren gelegten Tangente ein Tangentenviereck $EBCD$ construiren und durch eine ganz entsprechende Beweisführung, wie vorher, folgern, dass

$$AB + CD > BC + AD$$

sein müsse. Soll also $AB + CD = BC + AD$ sein, so muss auch DA den Kreis berühren.

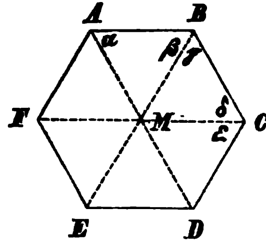
Insbesondere folgt aus den vorstehenden Sätzen, dass sich um jedes Rechteck und in jeden Rhombus ein Kreis beschreiben lässt; zu jedem Quadrat giebt es einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Kreis.

Von anderen Sehnen- und Tangenten-Vielecken sind nur noch die **regelmässigen Polygone** von besonderem Interesse, d. h. solche geradlinige Figuren, deren Seiten und ebenso deren Winkel sämmtlich gleich gross sind. Die Beispiele des gleichseitigen Dreiecks und des Quadrats haben bereits die Möglichkeit solcher Figuren gezeigt, allgemeiner ergiebt sich dieselbe, wenn man sich in einem Kreise n Radien so gezogen denkt, dass je zwei aufeinander folgende mit einander einen Winkel von $\frac{360^\circ}{n}$ bilden, und dann die Endpunkte je zweier solcher benachbarten Radien mit einander verbindet. Diese Verbindungslinien müssen nämlich ein n-Eck begrenzen, dessen Seiten sämmtlich Sehnen zu gleichen Centriwinkeln, also auch gleich gross sind; dass auch alle Winkel des n-Ecks einander gleich sein müssen, kann damit bewiesen werden, dass jene n Radien das n-Eck in n gleichschenkelige Dreiecke theilen, welche sämmtlich in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, also congruent sind. Hieraus ergiebt sich nämlich leicht, dass jeder der Polygonwinkel die Summe zweier von $2n$ einander gleichen Winkeln ist.

Diese Zusammensetzung der Polygonwinkel führt auch auf den Satz, dass jeder derselben gleich $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ ist. Derselbe kann übrigens auch mittelst der bekannten Winkelsumme eines n-Ecks gefunden werden, aus welcher sich bei der Gleichheit der n Winkel der Werth jedes einzelnen gleich $\frac{2n-4}{n}$ Rechte $= 2R - \frac{4}{n}R$ ergiebt.

Während im Vorstehenden ein regelmässiges Polygon mittelst eines Kreises als diesem einbeschriebene Figur entstanden gedacht wurde, soll nun zunächst gezeigt werden, dass umgekehrt jedem regelmässigen Polygon — also auch, wenn ein solches auf andere Weise entstanden gedacht oder gegeben sein sollte — ein Kreis umbeschrieben, sowie ferner ein Kreis einbeschrieben werden kann. Zu diesem Zweck mögen zunächst zwei benachbarte Winkel FAB, ABC eines als

regelmässig vorausgesetzten Polygons $ABCDEF$ halbirt, und der mit M bezeichnete Durchschnittspunkt der Halbirungslinien mit allen noch übrigen Eckpunkten des Polygons verbunden sein. Da die ganzen Winkel FAB, ABC zufolge der Voraussetzung gleich gross sind, so müssen auch ihre Hälften α, β einander gleich sein; daher ist das Dreieck ABM gleichschenkelig, d. h. es ist AM gleich BM. Es stimmen ferner die Dreiecke ABM, BCM in der gemeinschaftlichen Seite BM, den nach Voraussetzung gleichen Seiten AB, BC und in den Hälften β, γ des Polygonwinkels B überein und sind also congruent. Hieraus folgt, dass $CM = AM$ ist und mithin muss auch $CM = BM$, also das Dreieck BCM gleichschenkelig sein. Da hiernach wieder die Winkel δ und γ einander gleich sind, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Gleichheit der ganzen Winkel B und C, und dass γ die Hälfte von B ist, dass auch δ die Hälfte von C, oder δ gleich ε sein muss. Nun lässt sich in gleicher Weise, wie vorher die Congruenz der Dreiecke ABM und BCM, auch die der Dreiecke BCM und CDM beweisen und aus derselben wieder folgern, dass das Dreieck CDM gleichschenkelig oder $CM = DM$ ist. Man kann dann in derselben Weise, wie vorher, fortfahren und für jede beliebige Anzahl von Theildreiecken den Beweis bis zum letzten derselben fortsetzen. Somit folgt, dass die Strecken AM, BM, CM, DM u. s. w. sämmtlich gleich lang sind, oder der Satz;



In jedem regelmässigen Polygon giebt es einen Punkt, welcher von allen Eckpunkten gleichweit entfernt ist, oder was dasselbe ist, um jedes regelmässige Polygon lässt sich ein Kreis beschreiben. (5)

Dieser Punkt wird der Mittelpunkt des Polygons genannt, und seine Verbindungslinien mit den Eckpunkten heissen die grossen Radien des letzteren.

Aus dem vorstehenden Beweise gehen unmittelbar noch die folgenden Eigenschaften regelmässiger Figuren hervor:

Die grossen Radien theilen das regelmässige n-Eck in n congruente und gleichschenkelige Dreiecke. Dieselben halbiren ferner die Polygonwinkel und je zwei benachbarte bilden mit einander einen Winkel von $\frac{360}{n}$ Grad.

Umgekehrt müssen daher — da jeder Winkel nur eine einzige Halbirungslinie hat — die Halbirungslinien sämmtlicher Winkel eines regelmässigen n-Ecks durch ein und denselben Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Figur gehen.

Da ferner die Seiten der regelmässigen Figur gleiche Sehnen des derselben umbeschriebenen Kreises sind und folglich von dem Mittelpunkt gleichweit abstehen, da also, was dasselbe ist, der Mittelpunkt des Polygons auch von allen Seiten desselben gleichweit entfernt ist, so folgt, dass sich auch in jede regelmässige Figur ein Kreis beschreiben lässt (6), und dass der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises zugleich der des einbeschriebenen ist.

Die von dem Mittelpunkt einer regelmässigen Figur auf die Seiten derselben gefällten Senkrechten, d. i. die nach den Berührungspunkten gehenden Radien des einbeschriebenen Kreises, heissen die kleinen Radien der Figur.

Aus den vorstehenden Sätzen folgen endlich leicht noch die nachstehenden:

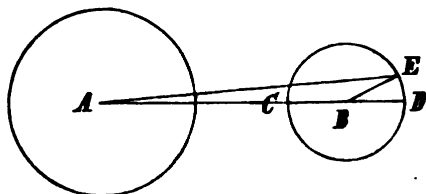
Die kleinen Radien einer regelmässigen Figur halbiren die betreffenden Seiten und die zugehörigen Winkel, welche je zwei benachbarte grosse Radien am Mittelpunkt mit einander bilden. — Umgekehrt müssen die auf den Seiten

einer regelmässigen Figur in ihren Halbirungspunkten errichteten Senkrechten sämmtlich durch einen und denselben Punkt, nämlich den Mittelpunkt, gehen. — Die grossen und die kleinen Radien vereinigt zerlegen das regelmässige n-Eck in $2\,n$ congruente und rechtwinkelige Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke enthält alle zur Charakteristik des Polygons wesentlichen Stücke desselben: seine Seiten sind bezüglich der halben Polygonseite, dem grossen und dem kleinen Radius gleich, und unter seinen Winkeln ist einer gleich der Hälfte des Polygonwinkels, ein anderer gleich dem Quotienten von zwei Rechten durch die Anzahl der Seiten.

Ein solches Dreieck heisst daher **Bestimmungsdreieck** der regelmässigen Figur.

§ 31. Zwei Kreise.

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte A, B zweier Kreise heisst die **Centrallinie** der letzteren. Die Centrallinie der Kreise A, B schneidet den Kreis B in einem Punkte C, und ihre Verlängerung über den Mittelpunkt B schneidet denselben Kreis in einem Punkte D. Es sei nun E ein beliebiger anderer Punkt des Kreises B, und man habe denselben mit beiden Mittelpunkten A, B verbunden, so ist in dem Dreieck ABE, $AB + BE > AE$ und $AB - BE < AE$. Da nun $BE = BD = BC$, so ist auch $AB + BD > AE$ und $AB - BC < AE$, d. h. es ist $AD > AE$ und $AC < AE$. Von allen Punkten des Kreises B hat also D die grösste und C die kleinste Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises A. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:



Ist die Centrallinie zweier Kreise grösser als die Summe der Radien, so liegt jeder der beiden Kreise ganz ausserhalb des anderen. Denn ist $AB > R + r$, so ist $AC > R$, und es liegt C, und folglich auch jeder andere Punkt des Kreises B ausserhalb des Kreises A.

Ist die Centrallinie zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so haben beide Kreise einen einzigen Punkt gemeinsam und liegen sonst ganz ausserhalb einander. Denn in diesem Fall ist $AC = AB - BC = R$, es liegt also C auf dem Kreise A, und jeder andere Punkt von B ausserhalb A.

Ist die Centrallinie zweier Kreise kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Radien, so schneiden die Kreise einander. Denn ist $AB < R + r$, so ist $AC < R$, und C liegt innerhalb des Kreises A. Ist dabei $AB > R - r$, so ist AD oder $AB + r > R$, also liegt D ausserhalb des Kreises A. Da also der Kreis B zum Theil ausserhalb und zum Theil innerhalb des Kreises A liegt, so müssen die Kreise einander durchschneiden.

Ist die Centrallinie zweier ungleicher Kreise gleich der Differenz der Radien, so haben die Kreise einen einzigen Punkt gemeinsam, und jeder andere Punkt des kleineren Kreises liegt innerhalb des grösseren. Denn ist $AB = R - r$, so ist AD oder $AB + r = R$, also liegt D auf dem Kreise A, und jeder andere Punkt von B innerhalb des Kreises A.

Ist die Centrallinie zweier ungleicher Kreise kleiner als die Differenz der Radien, so liegen alle Punkte des kleineren Kreises innerhalb des grösseren Denn in diesem Fall ist auch $AD < R$.

Ist insbesondere die Centrallinie zweier ungleicher Kreise gleich Null, d. h fallen ihre Mittelpunkte zusammen, so heissen die Kreise **concentrisch**. In jedem anderen Fall heissen sie **excentrisch**.

Für zwei gleiche Kreise fallen die drei letzten Lagen in eine einzige zusammen, denn ist $R = r$, so ist $R - r = 0$. Die beiden Kreise haben, wenn $AB = R - r = 0$ ist, alle Punkte gemeinschaftlich, d. h. sie decken einander.

Von zwei Kreisen, die einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben, sagt man, sie berühren einander, und der gemeinschaftliche Punkt heisst ihr Berührungspunkt. Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass es zwei Arten von Berührungen zweier Kreise giebt: bei der einen liegen die Kreise sonst ganz ausserhalb einander, und man sagt, sie berühren einander von aussen; bei der anderen liegt der kleinere Kreis sonst ganz innerhalb des anderen, und man sagt, derselbe berühre den grösseren von innen, und der grössere berühre den kleineren umschliessend. Die beiden betreffenden der obigen Sätze können nun, wie folgt, ausgesprochen werden:

Ist die Centrallinie zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so berühren die Kreise einander von aussen. (1)

Ist die Centrallinie zweier ungleicher Kreise gleich der Differenz der Radien, so berührt der kleinere Kreis den grösseren von innen. (2)

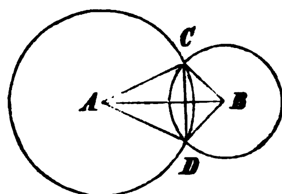
Zugleich geht aus den obigen Entwicklungen hervor, dass der Berührungspunkt im ersteren Fall auf der Centrallinie, im letzteren auf der Verlängerung der Centrallinie über den Mittelpunkt des kleineren Kreises liegt.

Auch ergiebt sich aus dem Obigen, dass zwei Kreise einander nur unter den angegebenen Bedingungen von aussen, bezw. von innen berühren können, da für jeden anderen möglichen Fall eine andere Lage der Kreise nachgewiesen wurde. Es gelten daher auch die Umkehrungen:

Berühren zwei Kreise einander von aussen, so liegt der Berührungspunkt auf der Centrallinie, und die letztere ist gleich der Summe der Radien. (3)

Berührt ein Kreis einen anderen von innen, so liegt der Berührungspunkt auf der Verlängerung der Centrallinie über den Mittelpunkt des kleineren Kreises, und letztere ist gleich der Differenz der Radien. (4)

Schneiden zwei Kreise einander, so geschieht dies stets in zwei Punkten, denn ist C ein Durchschnittspunkt der Kreise A, B, so bildet die Centrallinie AB mit den nach C gehenden Radien ein Dreieck, und denkt man sich dieses um AB auf die andere Flächenseite von AB herumgelegt, so kommt es in die Lage ADB, sodass $AD = AC$ und $BD = BC$, also D ebenfalls ein auf beiden Kreisen zugleich liegender Punkt ist. Dass aber zwei Kreise einander nicht in mehr als zwei Punkten schneiden können, folgt schon daraus, dass durch drei seiner Punkte ein Kreis der Lage und Grösse nach bestimmt ist, dass also zwei Kreise, welche drei Punkte gemeinsam haben, einander decken müssen.



Verbindet man die Durchschnittspunkte C, D zweier Kreise A, B, so erhält man die gemeinschaftliche Sehne CD derselben. Da ACD und BCD gleichschenkelige Dreiecke sind, so steht die Verbindungslinie ihrer Spitzen A, B senkrecht zu der gemeinschaftlichen Basis CD, oder, was dasselbe ist, die gemeinschaftliche Sehne zweier einander schneidenden Kreise steht senkrecht zu der Centrallinie. (5)

§ 32. Constructionen zum zweiten Kapitel.

1. Die bisher entwickelten Eigenschaften der Figuren liefern die Mittel zur Lösung von Aufgaben, welche die Construction solcher Figuren aus gegebenen Bestimmungsstücken, d. h. in der praktischen Ausführung die Zeichnung derselben mittelst Zirkel und Lineal, verlangen. Solche Constructionen, wie z. B. das Fällen einer Senkrechten von einem Punkt auf eine Gerade, das Ziehen von parallelen Linien u. dgl. m., wurden schon bei den Beweisen der Lehrsätze in den vorhergehenden Paragraphen vielfach vorausgesetzt, allein da es hier nur nöthig war, dieselben ausgeführt zu denken, reichte es hin, dass die Möglichkeit solcher Senkrechten, Parallelen u. s. w. feststand, ohne dass es nöthig war, die Mittel zur wirklichen praktischen Ausführung ihrer Construction zu erörtern.

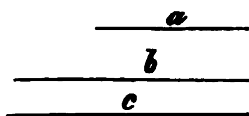
Um beispielsweise zu beweisen, dass die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks einander gleich seien, ist es nur nöthig, sich ein solches Dreieck vorzustellen, aber keineswegs dass vorher gezeigt sei, auf welche Weise man es praktisch construiren könne, und ebenso ist es, wo zu einem Beweise eine Winkelhalbirende erforderlich ist, nicht nothwendig, die Construction derselben in Wirklichkeit auszuführen, sondern nur diese unzweifelhaft existirende Linie sich als vorhanden zu denken.

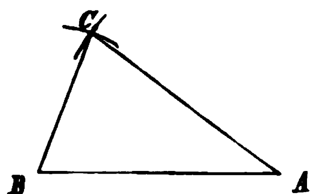
Die so gewonnenen Lehrsätze bieten aber nun umgekehrt die Mittel, auch die wirkliche Ausführung jener Constructionen zu ermöglichen.

Als Fundamental-Aufgaben dieser Art lassen sich diejenigen bezeichnen, welche, entsprechend den einzelnen Congruenzsätzen, die Construction eines Dreiecks aus drei Bestimmungsstücken verlangen. Dieselben sollen zunächst mit ihren wichtigsten Anwendungen erörtert werden.

Aufgabe 1: Ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu construiren.

Es sind hier drei Strecken a, b, c gegeben, und es wird ein Dreieck verlangt, dessen Seiten bezüglich diesen Strecken gleich sind. Man zeichne eine Gerade und trage auf derselben eine Strecke $AB = c$ ab, beschreibe um A mit einem Radius gleich b, und um B mit einem Radius gleich a je einen Kreisbogen und verbinde den Durchschnittspunkt C der beiden Kreisbogen mit A und mit B. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.





Der Beweis der Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich sehr leicht unmittelbar aus letzterer und daraus, dass alle Radien eines Kreises einander gleich sind.

Bei jeder solchen Aufgabe fragt es sich, ob die Construction unter allen Umständen möglich ist, und im Verneinungsfalle, welche Bedingungen für die Möglichkeit aufzustellen sind. Ausserdem ist zu untersuchen, ob und in welchen Fällen die verlangte Figur durch die gegebenen Stücke eindeutig oder mehrdeutig bestimmt ist. Man bezeichnet diese Untersuchungen mit dem Namen »Determination der Aufgabe«. Im vorliegenden Fall muss, damit die um A und B beschriebenen Kreise einander schneiden, nach § 31 $a + b > c$ und $a - b < c$ (bezw. $b - a < c$) sein. Die letztere Bedingung kann auch in der Form $b + c > a$ geschrieben und demnach mit der ersteren dahin zusammengefasst werden, dass die Summe je zweier der gegebenen Strecken grösser als die dritte sein muss. Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich stets das verlangte Dreieck construiren

Sofern von der Lage desselben abgesehen wird, und nur seine Gestalt und Grösse in Betracht kommt, folgt aus dem Congruenzsatz von den drei Seiten, dass die Aufgabe nur eine einzige Lösung hat.

Bei den folgenden Aufgaben soll der Kürze halber die Determination weggelassen werden, wenn die Aufgabe stets eine, und nur eine einzige Auflösung hat.

Als besondere Fälle der vorstehenden Aufgabe können die folgenden gelten:

2. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus den Längen seines Schenkels und seiner Basis zu construiren, oder auch, über einer gegebenen Basis ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, dessen Schenkel der Länge nach gegeben ist.

Hierzu ist nur anzunehmen, dass in der vorigen Aufgabe $a = b$ sei.

3. Ein gleichseitiges Dreieck aus der Länge seiner Seite (oder über einer gegebenen Seite ein gleichseitiges Dreieck) zu construiren.

Man nehme in der Aufgabe 1, $a = b = c$ an.

Da jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° beträgt, so ergiebt sich hieraus zugleich die Lösung der Aufgabe:

4. Einen Winkel von 60° zu zeichnen.

Nimmt man ferner zu den Seiten des zu construirenden Dreiecks die Längen der Seiten eines anderen gegebenen Dreiecks, so löst man die Aufgabe:

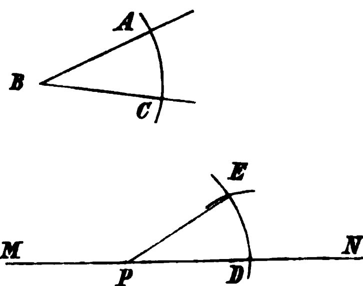
5. Ein Dreieck zu construiren, welches einem gegebenen Dreieck congruent ist.

Da endlich congruente Dreiecke in den homologen Winkeln übereinstimmen, und zu jedem gegebenen Winkel durch eine beliebige, seine Schenkel schneidende Gerade ein Dreieck construirt werden kann, so ergiebt sich hieraus auch ein Mittel, um

6. Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist, und insbesondere

an eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben einen gegebenen Winkel anzutragen.

Da hierbei die Gerade, welche die Schenkel des gegebenen Winkels schneidet, ganz beliebig gezogen werden kann, so wird man in der Praxis ihr eine für die Ausführung der Construction möglichst bequeme Lage geben, und dies ist der Fall, wenn das construirte Dreieck gleichschenkelig wird. Hiernach gestaltet sich die Construction zu Aufg. 6. in folgender Weise:



Man beschreibe um den Scheitel B des gegebenen Winkels mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, welcher den einen Schenkel in A, den andern in C schneidet, und mit demselben Radius um den auf der Geraden MN gegebenen Punkt P einen Kreisbogen, welcher MN in D schneide. Darauf beschreibe man mit dem Abstand der Punkte A und C von einander um D einen Kreisbogen, welcher den um P beschriebenen in E schneide, und ziehe durch E und P die Gerade, so ist EPD der verlangte Winkel. — Zum Beweise verbinde man A mit C, E mit D und zeige, dass $\triangle BAC \cong PED$ ist.

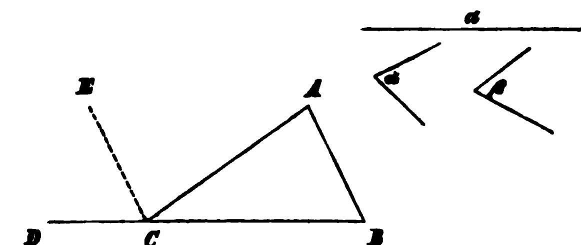
Die Aufgabe 6 liefert das Mittel, die noch übrigen Fundamental-Constructionen des Dreiecks auszuführen:

7. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu construiren.

Man zeichne eine Strecke gleich der für die Seite gegebenen Linie und trage an dieselbe in jedem ihrer Endpunkte in der Aufgabe entsprechender Weise einen Winkel an, welcher einem der gegebenen Winkel gleich ist. Die angelegten Schenkel schneiden einander in dem dritten Eckpunkt des Dreiecks.

8. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zu construiren.

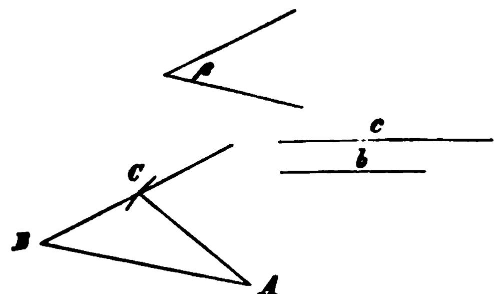
Es sei a die für die Seite gegebene Strecke, α der gegenüberliegende, β der anliegende Winkel. Man zeichne eine Strecke $BC = a$, lege an die Richtung BC in B einen Winkel gleich β, an die Verlängerung von BC in C ebenfalls einen Winkel $DCE = \beta$, und an CE in C einen Winkel gleich α an. Der angelegte Schenkel des letzteren schneidet den in B angelegten im dritten Eckpunkt A des Dreiecks. — Der Beweis beruht darauf, dass $\angle ACD$ als Aussenwinkel gleich $\angle A + \angle B$, also, da $\angle ECD = \angle B$, $\angle ECA = \angle A$ ist.



9. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu construiren.

Die Construction geschieht leicht, indem man eine Strecke gleich der einen gegebenen zeichnet, an dieselbe in ihrem einen Endpunkt den gegebenen Winkel anlegt, auf dem angelegten Schenkel die zweite gegebene Strecke vom Scheitel aus abträgt und schliesslich durch Verbindung ihrer so bestimmten Endpunkte die fehlende Seite zeichnet.

10. Ein Dreieck aus zwei Seiten und einem der ihnen gegenüberliegenden Winkel zu construiren.



Man zeichne zunächst eine Strecke AB von derjenigen Länge c, welche für die Seite gegeben ist, die dem gegebenen Winkel anliegen soll, lege an AB in B einen Winkel gleich dem gegebenen β, beschreibe um A mit der anderen gegebenen Strecke b den Kreis und verbinde, wenn letzterer mit dem in B angelegten Schenkel einen Punkt C gemeinsam hat, diesen Punkt mit A. — Zur Determination dieser Aufgabe ergiebt sich leicht, dass der um A beschriebene Kreis den in B angelegten Schenkel in keinem Punkte trifft, wenn b kleiner als das von A auf den angelegten Schenkel gefällte Perpendikel ist. In diesem Fall kann kein Dreieck aus den gegebenen Stücken construirt werden. Ist b gleich jenem Perpendikel, so berührt der Kreis den Schenkel, und man erhält ein einziges Dreieck, welches bei C rechtwinkelig ist. Ist b grösser als jenes Perpendikel und kleiner als AB, also kleiner als c, so schneidet der Kreis den Schenkel, und man erhält zwei verschiedene Dreiecke. Ist $b = c$, so fällt der eine Durch-

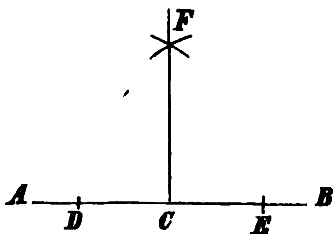
schnittspunkt mit B zusammen; das eine jener beiden Dreiecke verschwindet, das andere ist gleichschenkelig. Ist endlich $b > c$, so schneidet der Kreis den Schenkel nur in einem einzigen Punkte, denn der andere Durchschnittspunkt von Kreis und Geraden fällt auf die Verlängerung des Schenkels über B. In diesem Fall giebt es also wieder ein einziges Dreieck. — Man vergleiche diese Determination mit dem entsprechenden Congruenzsatz. [§ 18, (4).]

Die vorstehenden Constructionen lösen zugleich die praktisch besonders wichtige Aufgabe: Aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks die drei nicht gegebenen durch Zeichnung zu finden. Sie können daher dazu dienen, Linien und Winkel, welche man wegen irgend eines Hindernisses nicht unmittelbar messen kann, auf mittelbarem Wege zu bestimmen.

§ 33. Fortsetzung.

Die Eigenschaften der gleichschenkeligen Dreiecke führen zur Lösung folgender Aufgaben:

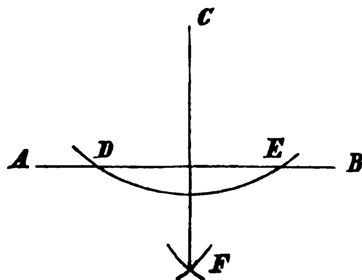
1. Auf einer gegebenen Geraden AB in einem gegebenen Punkte C derselben die Senkrechte zu errichten.



Man trage auf AB von C aus zu beiden Seiten dieses Punktes gleiche Strecken CD, CE ab, construire die Spitze F eines beliebigen über DE als Basis stehenden gleichschenkeligen Dreiecks und verbinde F mit C, so ist CF die verlangte Senkrechte. — Denn die Verbindungslinie der Spitze F eines gleichschenkeligen Dreiecks DFE mit dem Halbirungspunkt C der Basis steht senkrecht zu letzterer.

Diese Construction ist nicht ausführbar, wenn C ein Endpunkt von AB ist, und letztere Linie nicht über C verlängert werden kann. In diesem Fall kann man sich folgender zweiten Construction bedienen: Man trage von C aus auf der gegebenen Geraden eine beliebige Strecke CD ab, errichte über CD als Basis ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck CED, verlängere DE über E um $EF = ED$ und ziehe CF, so ist CF die verlangte Senkrechte. — Denn es sind (nach der Bezeichnung nebenstehender Figur) $\angle \alpha$ und $\angle \beta$, und ebenso $\angle \gamma$ und $\angle \delta$ als Winkel an der Grundlinie je eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich, also ist $\angle \alpha + \gamma = \beta + \delta$ und daher gleich der Hälfte der Winkelsumme des Dreiecks FCD, mithin gleich $90°$.

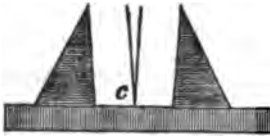
2. Auf eine gegebene Gerade AB von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkte C die Senkrechte zu fällen.



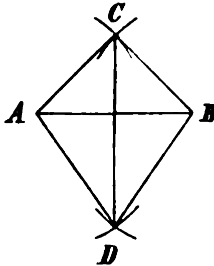
Man beschreibe mit dem Abstande des Punktes C von irgend einem, auf der andern Flächenseite von AB liegenden Punkte einen Kreisbogen um C, der AB in D und E schneide, darauf mit beliebigem Radius einen Kreisbogen um D und mit demselben Radius einen solchen um E. Den Durchschnittspunkt F der beiden

letzteren Kreisbogen verbinde man mit C, so ist CF die verlangte Senkrechte. — Der Beweis folgt daraus, dass die Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkeligen Dreiecke CDE, FDE, die auf derselben Basis stehen, zu letzterer senkrecht ist.

In der Praxis bedient man sich zur Lösung der beiden vorstehenden Aufgaben auch eines dreieckigen Lineals, dessen einer Winkel ein rechter ist. Legt man an eine Gerade AB ein gewöhnliches Lineal und sodann an letzteres das dreieckige mit einer Kathete an, und verschiebt dann das dreieckige Lineal längs des gewöhnlichen, bis seine andere Kathete durch einen auf oder ausserhalb AB gegebenen Punkt geht, so kann man an der diese Kathete darstellenden Kante die verlangte Senkrechte ziehen. — Zur Prüfung der Richtigkeit eines solchen dreieckigen Lineals dient der Satz, dass sich auf einer Geraden in demselben Punkte nur eine einzige Senkrechte errichten lässt. Die nebenstehende Figur zeigt zwei Stellungen des Dreiecks, in welchen man es an denselben Punkt C längs eines gewöhnlichen Lineals schieben kann. Die beiden dann als Senkrechte gezogenen Geraden müssen zusammenfallen, anderen Falls giebt der Winkel derselben den doppelten Fehler des Lineals an.



3. Eine gegebene Strecke AB zu halbiren.



Man beschreibe über, bezw. unter AB als Basis die Spitzen C, D zweier gleichschenkeligen Dreiecke. Die Verbindungslinie von C und D halbirt nach bekanntem Satze die Basis AB.

Durch wiederholte Anwendung dieser Construction auf die entstandenen Theile von AB kann man die Aufgabe lösen:

Eine gegebene Strecke in 4, oder 8, oder 16 u. s. w., allgemein in 2^n gleiche Theile zu theilen.

Den vorstehenden Aufgaben lassen sich die folgenden anschliessen:

4. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Man beschreibe um den Scheitel B des gegebenen Winkels mit beliebigem Radius einen Kreisbogen, welcher den einen Schenkel in A, den anderen in C schneide, und darauf um A mit beliebigem und um C mit demselben Radius einen Kreisbogen. Den Durchschnittspunkt D der beiden letzteren verbinde man mit B; dann halbirt DB den gegebenen Winkel. — Verbindet man nämlich D mit A und mit C, so stimmen die Dreiecke ABD, CBD in den drei Seiten überein, und die Winkel ABD, CBD sind daher gleich als homologe Stücke congruenter Dreiecke.

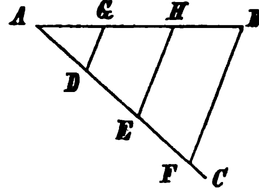
Durch wiederholte Anwendung dieser Construction auf die entstandenen Theile von ABC kann man die Aufgabe lösen:

Einen gegebenen Winkel in 4, oder 8, oder 16 u. s. w., allgemein in 2^n gleiche Theile zu theilen.

5. Eine gegebene Strecke in eine beliebige verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Um die Strecke AB in n gleiche Theile zu theilen, lege man an AB in einem ihrer Endpunkte unter beliebigem Winkel eine convergente Gerade AC an, trage auf dieser von A aus eine beliebige Strecke n mal nach einander ab, sodass man also die Strecken AD, DE, u. s. w. erhält, verbinde den letzten so auf AC erhaltenen Punkt F mit dem anderen Endpunkt B der gegebenen

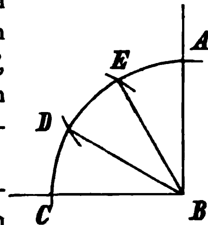
Strecke und ziehe durch die übrigen auf AC erhaltenen Punkte die Parallelen DG, EH, u. s. w. zu FB. Letztere theilen AB in n gleiche Theile. Der **Beweis** der Richtigkeit dieser Construction folgt unmittelbar aus § 25, (4).



Während man so jede gegebene Strecke in jede beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann, ist dies bei einem Winkel nicht mit den Hülfsmitteln der Elementar-Mathematik möglich. Nur die in der vorstehenden Aufgabe 4 angeführten Theilungen eines Winkels lassen sich hier allgemein ausführen, und schon die Theilung eines solchen in drei gleiche Theile (die sogenannte Trisection des Winkels) ist mit Zirkel und Lineal allein nicht ausführbar. Dies verhindert jedoch nicht die Möglichkeit, solche Theilungen bei einzelnen, bestimmten Winkeln auszuführen. So lässt sich beispielsweise ein rechter Winkel (und ebenso die Hälfte, das Viertel eines solchen, u. s. w.) in drei gleiche Theile theilen, wie die folgende Aufgabe zeigt.

6. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Da man nach der Aufgabe 4 in § 32 einen Winkel von 60° zeichnen, und somit mit Hülfe von § 32, Aufg. 6 einen solchen von einem rechten Winkel abtragen kann, so erhält man als Unterschied einen Winkel von 30°, d. h. den dritten Theil des rechten. Am einfachsten gestaltet sich diese Construction, wie folgt: Beschreibe um den Scheitel B des rechten Winkels mit beliebigem Radius einen Kreis, welcher die Schenkel bezüglich in A und C schneide, und sodann mit demselben Radius um A und um C Kreise, welche den ersteren im Winkelraume des rechten Winkels bezüglich in D und E schneiden. Verbindet man nun E und D mit B, so ist der Winkel ABC in drei gleiche Theile getheilt. — Zum Beweise ziehe man AD und EC und benutze die gleichseitigen Dreiecke ABD und BEC.

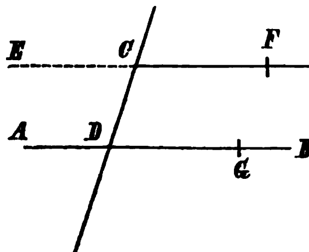


Da man mit Hilfe der Aufgaben 1 und 2 dieses Paragraphen einen rechten Winkel zeichnen kann, so ergeben sich hieraus und ausserdem durch Anwendung der Aufgabe 4 dieses Paragraphen die Lösungen der Aufgaben:

a) Einen Winkel von 30° zu zeichnen.
b) Einen Winkel von 45° zu zeichnen.
c) Ebenso einen Winkel von 15° zu zeichnen.

7. Zu einer gegebenen Geraden durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt die Parallele zu ziehen.

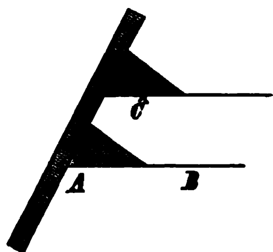
Man ziehe durch den gegebenen Punkt C eine beliebige Gerade, welche die gegebene in einem Punkte D schneide, und lege an CD in C einen dem Winkel CDB gleichen Winkel so an, dass er zu letzterem correspondirender oder Wechselwinkel wird. Der angelegte Schenkel liefert die gesuchte Parallele EF. — Beweis leicht.



Man kann insbesondere den Winkel CDB zu einem rechten machen und erhält dann folgende Auflösung: Fälle von C auf AB die Senkrechte CD und errichte auf CD in C die Senkrechte; die letztere ist die verlangte Parallele.

Eine dritte, praktisch besonders bequeme Construction ist folgende: Verbinde C mit einem beliebigen Punkt D von AB beschreibe um einen anderen

beliebigen Punkt G von AB mit einem Radius gleich CD, und um C mit einem Radius gleich DG, die Kreise und verbinde den einen Durchschnittspunkt F dieser Kreise mit C, so ist CF die verlangte Parallele. — Denn in dem Vierecke $CDGF$ sind je zwei Gegenseiten einander gleich, also ist dasselbe ein Parallelogramm.

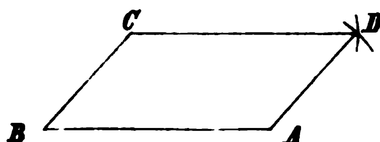


In der Praxis kann man sich zur Auflösung dieser Aufgabe auch eines dreieckigen Lineals bedienen (welches zu diesem Zweck nicht rechtwinkelig zu sein braucht. Durch Verschiebung desselben längs eines gewöhnlichen Lineals nach Anleitung der nebenstehenden Figur kann man es in eine solche Lage bringen, dass man an seiner einen Kante die verlangte Parallele ziehen kann.

§ 34. Fortsetzung. Vielecke und Kreise.

Die Construction von Vielecken lässt sich in der Regel auf die von Dreiecken zurückführen, in welche man das Vieleck durch Diagonalen oder auf andere Weise zerlegen kann.

1. Die Construction eines Parallelogramms kann beispielsweise, wenn zwei aneinanderliegende Seiten desselben und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, dadurch geschehen, dass man zunächst die Seite AB gleich der einen gegebenen Strecke zeichnet, an dieselbe in B den gegebenen Winkel anträgt und den angelegten Schenkel BC gleich der zweiten gegebenen Strecke macht. Dann zieht man entweder CD parallel zu BA und AD parallel zu BC, oder man beschreibt um C mit einem Radius gleich BA und um A mit einem Radius gleich BC Kreisbogen und verbindet den Durchschnittspunkt D derselben mit A und mit C, oder man zieht durch C die Parallele zu BA, giebt derselben die Länge $CD = BA$ und verbindet D mit A, u. dgl. m.



Insbesondere sind in dieser Aufgabe die folgenden als besondere Fälle enthalten: Ein Rechteck aus zwei aneinanderliegenden Seiten zu construiren. Einen Rhombus aus einer Seite und einem Winkel zu construiren. Ein Quadrat aus einer Seite zu construiren.

Von den Aufgaben zu den Sätzen vom Kreise sind folgende als fundamental zu erwähnen:

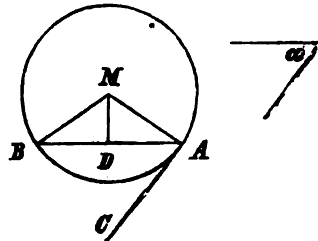
2. Zu einem gegebenen Kreise oder Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden. Man ziehe zwei nicht parallele Sehnen und construire zu jeder derselben die Mittelsenkrechte. Die letzteren müssen einander in dem gesuchten Mittelpunkte schneiden.

3. An einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben die Tangente zu ziehen. Construction: Ziehe durch den gegebenen Punkt die Senkrechte zu dem durch diesen Punkt gehenden Radius.

4. An einen gegebenen Kreis von einem ausserhalb desselben gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen. — Man construire über der Verbindungslinie des gegebenen Punktes A und des Mittelpunktes M als Durchmesser den Kreis und verbinde einen der Durchschnittspunkte B oder C der beiden Kreise mit A. Jede dieser Verbindungslinien ist eine Tangente des gegebenen Kreises, denn die Winkel MBA und MCA sind rechte als Peripheriewinkel über einem Halbkreise.

5. Ueber einer gegebenen Geraden als Sehne den Kreisbogen zu beschreiben, welcher der geometrische Ort der Scheitel aller über der Sehne stehenden Winkel von gleicher, gegebener Grösse ist.

Es sei AB die gegebene Gerade. Man lege an AB in A einen Winkel BAC gleich dem gegebenen Winkel α an, halbire AB in D, errichte auf AB in D und auf AC in A die Senkrechte und beschreibe um den Durchschnittspunkt M der beiden Senkrechten mit MA als Radius über AB den verlangten Kreisbogen. — Da nämlich MD die Mittelsenkrechte von AB, also M von A und B gleichweit entfernt ist, so geht der construirte Kreisbogen auch durch B. Da ferner AC senkrecht zu dem Radius MA ist, so ist AC eine Tangente; $\angle BAC$ ist also ein von einer Sehne und einer Tangente gebildeter Peripheriewinkel und also gleich jedem auf demselben Bogen stehenden andern Peripheriewinkel desselben Kreises. Da ferner $\angle BAC = \alpha$ nach Construction, so sind auch die letzteren Peripheriewinkel gleich α.



Ist insbesondere α ein rechter Winkel, so hat man nur über AB als Durchmesser den Halbkreis zu beschreiben.

Die Auflösungen der Aufgaben: Um ein gegebenes Dreieck oder in ein gegebenes Dreieck den Kreis zu beschreiben, gehen unmittelbar aus den betreffenden Lehrsätzen hervor.

Kapitel 3.

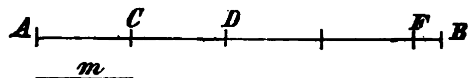
Vom Messen und dem Flächeninhalt geradliniger Figuren.

§ 35. Vom Messen und den Verhältnissen der Strecken.

1. Eine Grösse messen heisst, dieselbe mit einer anderen Grösse gleicher Art, welche als bekannt vorausgesetzt und das Maass der ersteren genannt wird, in der Art vergleichen, dass man angiebt, wie oft dieses Maass in der zu messenden Grösse enthalten, oder das wievielfache diese von jenem ist. Messen heisst also, mit noch anderen Worten, das Verhältniss der (zu messenden) Grösse zu dem gewählten oder vorgeschriebenen Maasse bestimmen. Das Resultat der Messung ist also eine Zahl, die Maasszahl jener Grösse, welche auf das betreffende Maass bezogen ist; das Maass ist die Grössen-Einheit jener Zahl.

Indem also beliebig viele Grössen gleicher Art durch auf dieselbe Maass-Einheit bezogene Zahlen dargestellt werden, wird man in den Stand gesetzt, die Regeln der Arithmetik auf jene Grössen, d. h. genauer auf ihre Maasszahlen, anzuwenden, oder mit denselben zu rechnen.

Als Maass einer Strecke kann, da dasselbe mit der zu messenden Grösse gleichartig sein muss, nur eine Strecke dienen. Hierbei sind zunächst zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Trägt man nämlich von der zu messenden Strecke AB zunächst von einem ihrer Endpunkte aus eine dem Maasse m gleiche Strecke AC, dann von dem Reste CB wieder eine Strecke $CD = m$ ab, und wiederholt dies so oft als möglich, so bleibt entweder zuletzt ein Rest FB, welcher kleiner als m ist, und



auf welchem also das Abtragen nicht noch einmal wiederholt werden kann, oder es bleibt kein solcher Rest. Im letzteren Falle sagt man, die Strecke m gehe in AB auf; oder auch dieselbe sei gleich einem aliquoten Theil von AB. Die Strecke AB heisst in diesem Falle ein Vielfaches (Multiplum) der Strecke m.

Nur wenn das Maass m gleich einem aliquoten Theil von AB ist, erhält man durch das erwähnte Abtragen desselben unmittelbar die Maasszahl von AB, nämlich die Zahl, welche angiebt, wie oft sich m auf AB abtragen lässt. Daher nennt man in diesem Falle m auch insbesondere ein genaues Maass von AB. Man pflegt auch wol, wenn man von einem Maasse einer Strecke schlechthin redet, unter demselben ein solches genaues Maass zu verstehen, und dieser Gebrauch soll auch, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist oder aus dem Zusammenhang deutlich hervorgeht, im Folgenden von uns eingehalten werden.

In diesem Sinne gelten, wie für gleichartige Grössen überhaupt, so auch für Strecken die folgenden Sätze, welche sich leicht durch Abtragen des Maasses auf diesen Strecken beweisen lassen:

Ist eine Strecke m ein Maass zweier Strecken a, b zugleich, so ist m auch ein Maass der Summe $a + b$ und der Differenz $a - b$ derselben, und allgemeiner: jede Strecke, welche ein Maass für mehrere andere Strecken ist, ist zugleich ein Maass jeder (algebraischen) Summe der letzteren.

Sind hierbei die einzelnen Summanden gleich gross, so erhält man den Satz: Ist eine Strecke m ein Maass einer anderen Strecke a, so ist sie auch ein Maass jedes Vielfachen von a. Dagegen kann nicht behauptet werden, dass m auch ein Maass jedes aliquoten Theiles von a sei.

Ist ferner eine Strecke m ein Maass einer andern Strecke a, so ist auch jeder aliquote Theil von m ein Maass von a. Dagegen ist ein Vielfaches von m nicht nothwendig ein Maass von a.

2. In dem zweiten der oben unterschiedenen Fälle, also wenn die zweite Strecke m kein genaues Maass von AB ist, gelingt die Vergleichung, wenn eine dritte Strecke gefunden werden kann, die in jeder von jenen beiden ohne Rest aufgeht. Denn misst man mit dieser dritten Strecke die beiden ersteren, so erhält man für jede von diesen eine Maasszahl, und der Quotient dieser Maasszahlen ist gleich dem entsprechenden Verhältniss der Längen beider Strecken.

Eine solche Strecke, welche gleichzeitig ein Maass von zwei oder mehreren Strecken ist, heisst ein gemeinschaftliches Maass der letzteren. Es fragt sich zunächst, ob zu jeden zwei gegebenen Strecken stets ein solches gemeinschaftliches Maass existirt und auf welche Weise ein solches gefunden werden kann.

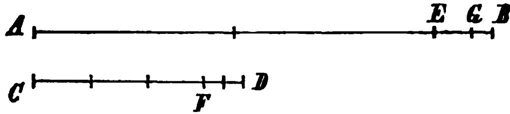
Da ferner, wenn eine Strecke m ein gemeinschaftliches Maass zweier oder mehrerer anderer Strecken ist, auch jeder aliquote Theil von m gleichzeitig für alle diese Strecken ein Maass sein muss, so folgt, dass gegebene Strecken, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, gleichzeitig unendlich viele gemeinschaftliche Maasse besitzen müssen. Von diesen muss eins das grösste sein, denn ein Maass einer Strecke kann nie grösser sein, als diese selbst, also nicht über jede Grenze hinaus wachsen.

Man kann daher, da das grösste Maass die kleinsten und mithin bequemsten Maasszahlen liefern muss, die obige Aufgabe näher dahin fassen, dass das grösste gemeinschaftliche Maass zweier gegebenen Strecken gesucht werden solle.

Zu diesem Zwecke trage man die kleinere dieser Strecken so oft als möglich von der grösseren ab, darauf, falls hierbei ein Rest bleibt, diesen Rest wieder

so oft als möglich von der kleineren, dann den etwa hierbei bleibenden Rest wieder auf dem vorigen Reste ab, und fahre so fort, indem man also stets den bei dem Abtragen bleibenden Rest auf's Neue von dem vorhergehenden Reste abträgt. Kommt man bei diesem Verfahren einmal zu einem Reste, welcher in dem vorhergehenden aufgeht, so ist jener ein gemeinschaftliches Maass, und zwar das grösste der beiden gegebenen Strecken.

Zum Beweise der Richtigkeit dieser Behauptung sei beispielsweise CD auf AB $n$mal, der dabei bleibende Rest EB auf CD $n_1$mal, der hier bleibende Rest FD auf EB $n_2$mal, endlich der nunmehrige Rest GB auf FD $n_3$mal, und zwar diesmal ohne Rest abgetragen, so ist also GB ein Maass von FD und mithin auch ein Maass des Vielfachen EG von FD. Hieraus folgt weiter, dass GB auch ein Maass der Summe von EG und GB, also von EB, und somit ferner auch ein Maass des Vielfachen CF von EB sein muss. In gleicher Weise ergiebt sich weiter, dass GB als Maass von CF und von FD auch ein Maass der Summe $CF + FD$, also der Strecke CD, daher ferner auch ein solches des Vielfachen AE von CD und somit schliesslich ein solches der Summe $AE + EB = AB$ sein muss. Hiermit ist bewiesen, dass GB ein gemeinschaftliches Maass von AB und CD ist.



Um auch zu zeigen, dass GB das grösste gemeinschaftliche Maass dieser Strecken sein muss, nehme man an, m sei ein anderes Maass derselben; dann muss m auch ein Maass des Vielfachen AE von CD und folglich auch ein solches der Differenz $AB - AE$, d. h. der Strecke EB sein. Hieraus ergiebt sich in gleicher Weise weiter, dass m auch ein Maass des Vielfachen CF von EB, mithin auch ein solches der Differenz $CD - CF = FD$, also weiterhin auch ein solches des Vielfachen EG von FD, und endlich auch ein solches von $EB - EG = GB$ sein muss. Ist aber m ein Maass von GB, so kann m nicht grösser als GB sein, folglich ist GB das grösste gemeinschaftliche Maass von AB und CD.

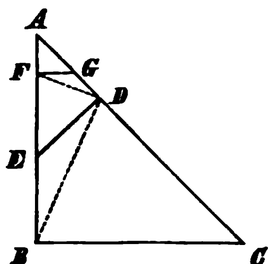
Man sieht leicht ein, dass der ganze vorstehende Beweis nicht bloss für das gewählte Beispiel, sondern allgemein gilt, da es sich in anderen Fällen nur um eine den endlichen Schluss nicht ändernde, mehr oder minder häufige Wiederholung derselben Schlussweisen handelt.

Zugleich ist hiermit bewiesen, dass jedes gemeinschaftliche Maass zweier Strecken, welches nicht das grösste ist, einem aliquoten Theile des grössten gleich sein muss. Mit letzterem sind daher in gewissem Sinne auch alle übrigen gemeinschaftlichen Maasse der beiden gegebenen Strecken bestimmt worden.

3. Aus dem vorstehenden Beweise geht aber nicht hervor, dass man bei dem eingeschlagenen Verfahren nothwendig einmal auf einen Rest kommen müsse, welcher in dem vorhergehenden aufgeht, und es muss also die Möglichkeit offen gehalten werden, dass es Strecken geben könne, zu welchen sich auf dem angegebenen Wege kein gemeinschaftliches Maass bestimmen lasse. Dass dies in der That der Fall ist, zeigt folgendes Beispiel:

Es sei ABC ein gleichschenkeliges und bei B rechtwinkeliges Dreieck. Man trage auf der Hypotenuse AC eine Strecke CD gleich der Kathete BC ab. Da $AC - BC < AB$ ist, so muss der Rest AD kleiner als AB, und also auch kleiner als BC sein, so dass sich also BC nicht noch einmal von AD abtragen

lässt. Man errichte nun in D auf AC die Senkrechte, welche AB in E treffe, so muss das rechtwinkelige Dreieck AED, da es bei A einen Winkel von 45° hat, gleichschenkelig, d. h. es muss $AD = DE$ sein. Zieht man ferner DB, so ist das Dreieck DCB gleichschenkelig, also $\angle CDB = \angle CBD$; folglich sind auch die beiden Winkel, welche je einen von diesen zu einem rechten ergänzen, nämlich EDB und EBD, einander gleich, woraus folgt, dass das Dreieck DEB gleichschenkelig, d. h. $DE = EB$ ist. Mithin ist auch $BE = AD$. Trägt man also den auf AC gebliebenen Rest AD von B aus auf der BC gleichen Strecke BA ab, so kommt man nach einem einmaligen Abtragen zu dem Punkte E, und da sich auf das gleichschenkelig-rechtwinkelige Dreieck AED dasselbe Verfahren, wie vorher bei ABC, anwenden lässt, so bleibt nach nochmaligem Abtragen der Strecke AD auf AE ein Rest AF, welcher kleiner als AD ist. Mit diesem Reste kann man in gleicher Weise verfahren, wie vorher mit dem Reste AD, d. h. errichtet man in F auf AF die Senkrechte, so erhält man ein drittes rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck AFG, und es ist $AF = FG = GD$. Man kann daher den Rest AF wieder zweimal auf dem vorigen Reste AD abtragen und behält auf's Neue einen Rest, u. s. w. Da man, in dieser Weise fortfahrend, stets zu neuen gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecken und somit stets zu einem neuen Reste kommen muss, so ist die Möglichkeit des oben behaupteten Falles an einem Beispiel nachgewiesen.



Es fragt sich nun weiter, ob in solchem Falle nur die oben angegebene Methode zur Auffindung eines gemeinschaftlichen Maasses nicht anwendbar ist, oder ob überhaupt kein solches existirt. Nehmen wir an, es existire in einem solchen Fall ein gemeinschaftliches Maass m der Strecken AB, CD, so müsste zufolge des obigen Beweises m auch ein Maass sämmtlicher bei jenem Verfahren bleibender Reste sein. Jeder dieser Reste ist aber kleiner als der vorhergehende. Wäre nun a die Maasszahl von AB, b die Maasszahl von CD in Beziehung auf jenes Maass m, also $AB = a \cdot m$, $CD = b \cdot m$, so müsste der erste Rest kleiner als $b \cdot m$, mithin, da er selbst ein Vielfaches von m sein soll, höchstens gleich $(b - 1)\,m$ sein. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass der zweite Rest höchstens gleich $(b - 2)\,m$, der dritte höchstens gleich $(b - 3)\,m$ sein könnte, u. s. w. Hieraus folgt, dass man nach höchstens $b - 1$maliger Wiederholung des Abtragens auf einen Rest kommen müsste, welcher gleich m oder kleiner als m wäre, was der obigen Annahme widerspricht.

Es giebt also Strecken, zu welchen kein gemeinschaftliches Maass existirt. Solche Strecken werden incommensurabel genannt, wogegen Strecken, die ein gemeinschaftliches Maass haben, commensurabel genannt werden.

4. Bei der Lösung der im Eingange dieses Abschnittes gestellten Aufgabe, das Verhältniss einer gegebenen Strecke zu einer anderen bestimmten Strecke zu finden, sind also nunmehr drei Fälle zu unterscheiden. In dem ersten derselben, in welchem die letztere Strecke selbst ein genaues Maass der ersteren ist, erhält man durch unmittelbares Abtragen der kleineren von der grosseren die gesuchte Verhältnisszahl; dieselbe ist eine ganze Zahl. In dem zweiten Fall, in welchem die Voraussetzung des vorigen nicht erfüllt ist, die beiden Strecken aber commensurabel sind, misst man beide durch ein gemeinschaftliches

am einfachsten durch ihr grösstes gemeinschaftliches Maass und erhält durch Division der Maasszahlen einen Bruch als die gesuchte Verhältnisszahl. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle ist offenbar nicht wesentlich; der erste kann mit dem zweiten zusammengefasst werden, indem bei ihm die kleinere gegebene Strecke selbst das grösste gemeinschaftliche Maass von beiden ist. Dagegen ist die Unterscheidung des dritten Falles, in welchem die gegebenen Strecken incommensurabel sind, wesentlicher. In diesem Falle kann das verlangte Verhältniss weder durch eine ganze Zahl noch durch einen Bruch angegeben werden; gleichwol ist daraus nicht zu schliessen, dass die Angabe desselben überhaupt unmöglich sei, wie die folgende Untersuchung zeigt.

Es sei bei zwei incommensurabelen Strecken a, b irgend ein Maass p der einen Strecke b angenommen, sodass sich also p auf b eine bestimmte ganze Anzahl, etwa $m$mal, ohne Rest abtragen lässt. Trägt man nun dieses Maass auch auf der anderen Strecke a so oft als möglich, etwa $n$mal, ab, so bleibt ein Rest, welcher kleiner als p ist, und es ist somit a grösser als $n \cdot p$, dagegen kleiner als $(n+1) \cdot p$, während b gleich $m \cdot p$ ist. Man kann daher auch sagen, das Verhältniss $a : b$ sei grösser als $\frac{n}{m}$ und kleiner als $\frac{n+1}{m}$. Dadurch, dass man dann für p ein immer kleineres neues Maass annimmt, kann der auf a bleibende Rest und somit der Unterschied zwischen diesen beiden Grenzwerthen immer kleiner gemacht werden. Mit anderen Worten, je kleiner p angenommen wird, desto grösser wird m, und da der Unterschied der beiden Grenzwerthe, welche vorher für das Verhältniss von a zu b gefunden wurden, nämlich $\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}$, um so kleiner wird, je grösser der Nenner m wird, so können diese Grenzwerthe immer näher an einander gerückt, und es kann also auch der Fehler, welchen man durch Annahme eines dieser Grenzwerthe für das gesuchte Verhältniss begeht, immer kleiner gemacht werden, und zwar, da m bis in's Unendliche wachsend gedacht werden kann, kleiner als jede gegebene endliche, wenn auch noch so kleine Zahl.

Das Verhältniss zweier incommensurabelen Strecken besitzt hiernach einen ganz bestimmten Zahlenwerth; diese Zahl gehört nur keiner der beiden Zahlenarten an, welche in der Arithmetik ganze oder gebrochene Zahlen genannt werden, und kann daher auch durch solche niemals dargestellt werden. Man nennt dieselbe eine irrationale Zahl, und das Verhältniss zweier incommensurabelen Strecken wird deshalb ein irrationales, dagegen dasjenige zweier commensurabelen Strecken ein rationales genannt.

Die Thatsache, dass auch der Zahlenwerth eines irrationalen Verhältnisses durch eine ganze oder gebrochene Zahl bis zu jedem beliebigen Grade der Annäherung angegeben werden kann, macht für die praktischen Anwendungen der Geometrie die Unterscheidung solcher Verhältnisse unnöthig, denn da man hier niemals mit absoluter Genauigkeit messen kann, so darf die irrationale Zahl durch eine angenäherte rationale ersetzt werden, sobald der Fehler der letzteren die erlaubte Grenze nicht übersteigt, bezw. für unsere Sinnesorgane und Messwerkzeuge nicht mehr wahrnehmbar ist.

5. Einige Beispiele mögen das Vorstehende noch weiter erläutern: Es sei die Strecke b auf der Strecke a fünfmal, der Rest r_1, welcher kleiner als b ist, auf b dreimal, der hier bleibende Rest r_2 auf r_1 zweimal, der dritte Rest r_3 auf r_2 viermal, und zwar ohne Rest, abgetragen. Dann ist

$$\begin{aligned} a &= 5b + r_1 \\ b &= 3r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \\ r_2 &= 4r_3, \end{aligned}$$

also $r_1 = 2 \cdot 4r_3 + r_3 = 9r_3$; $b = 27r_3 + 4r_3 = 31r_3$; $a = 155r_3 + 9r_3 = 164r_3$. Die Maasszahlen von a und b in Beziehung auf r_3 sind also 164 und 31; dieselben sind relative Primzahlen. Das Verhältniss von a zu b ist also gleich $\frac{164}{31}$, oder b ist in a $5\frac{9}{31}$ mal enthalten.

Ist umgekehrt das Verhältniss $a : b$ zweier Strecken, beispielsweise gleich $\frac{111}{40}$, bekannt, so ergiebt das im praktischen Rechnen zur Auffindung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von 111 und 40, sowie zur Verwandlung von $\frac{111}{40}$ in einen Kettenbruch angewendete Divisionsverfahren

$$\begin{array}{l} 111 : 40 = 2 \\ \underline{80} \\ 40 : 31 = 1 \\ \underline{31} \\ 31 : 9 = 3 \\ \underline{27} \\ 9 : 4 = 2 \\ \underline{8} \\ 4 : 1 = 4 \end{array}$$

dass sich b auf a zweimal, der Rest r_1 auf b einmal, der Rest r_2 auf r_1 dreimal, der Rest r_3 auf r_2 zweimal, und endlich r_4 auf r_3 viermal ohne Rest abtragen lasst.

Das zum Beweise der Möglichkeit incommensurabeler Linien benutzte Beispiel des rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks führt entsprechend zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= 1b + r_1 \\ b &= 2r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \\ r_2 &= 2r_3 + r_4 \end{aligned}$$

u. s. w. bis in's Unendliche.

Es ist also in diesem Falle (wenn man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach bezüglich durch $b, r_1, r_2, r_3, \ldots$ dividirt),

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_1}{b}; \quad \frac{b}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}, \text{ u. s. w.}$$

also $$\frac{a}{b} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{u. s. w. bis in's Unendliche.}}}}$$

Der Werth des irrationalen Verhältnisses ist also hier durch einen unendlichen (periodischen) Kettenbruch dargestellt.

Setzt man diesen Werth gleich x, so ist

$$x - 1 = \frac{1}{2 + (x - 1)}, \text{ also } x^2 - 1 = 1 \text{ oder } x = \sqrt{2},$$

es ist also jenes Verhältniss durch die irrationale Quadratwurzel aus 2 dargestellt, ein Resultat, welches für dieses Beispiel auch aus dem später [§ 48 (3)] vorkommenden pythagoreischen Lehrsatz abgeleitet werden kann.

Wir überlassen dem Leser, die verschiedenen vorstehenden Beispiele zu verallgemeinern.

6. Sollen mehr als zwei gegebene Strecken ihrer Länge nach mit einer und derselben Strecke verglichen (durch dieselbe gemessen) oder sollen dieselben unmittelbar miteinander verglichen werden, so ist das vorstehende Verfahren wiederholt anzuwenden. Um zu drei oder mehr Strecken zugleich das grösste gemeinschaftliche Maass zu finden, falls ein solches vorhanden ist, suche man zuerst das grösste gemeinschaftliche Maass für irgendwelche zwei derselben und setze dieses Maass an Stelle jener beiden Strecken. Hierdurch ist das System der gegebenen Linien auf ein solches zurückgeführt, welches eine Strecke weniger hat als jenes. Wiederholt man mit dem neuen System dasselbe Verfahren und fährt in dieser Weise fort, so gelangt man schliesslich zu einem System von nur zwei Linien, und das grösste gemeinschaftliche Maass dieser letzteren ist auch das gesuchte für die ursprünglich gegebenen Strecken. Der Beweis dieses Satzes geht daraus hervor, dass das grösste gemeinschaftliche Maass dreier Strecken *a*, *b*, *c*, weil es ein gemeinschaftliches Maass von *a* und *b* ist, in dem grössten gemeinschaftlichen Maass dieser beiden letzteren Strecken als aliquoter Theil enthalten sein muss.

Ergiebt sich, dass einzelne oder alle gegebenen Strecken in irrationalen Verhältnissen zu einander stehen, so hat man diese auf anderen Wegen, etwa in ähnlicher Weise wie in einem der vorstehenden Beispiele gezeigt ist, oder durch später sich ergebende Mittel zu bestimmen, oder man bestimmt in der früher erörterten Weise Näherungswerthe derselben, durch welche man die gesuchten Verhältnisse in immer enger werdende Grenzen einschliessen kann.

Hat man so die Verhältnisse beliebig vieler gegebener Strecken zu einer und derselben Strecke bestimmt, so sind jene durch diese letztere als durch dasselbe Maass im weiteren Sinne gemessen. Man sagt dann, jene Strecken seien auf Zahlen gebracht oder in Zahlen gegeben.

Es ist endlich noch einleuchtend, dass die in diesem Paragraphen insbesondere für Strecken aufgestellten Sätze und Begriffe sich in entsprechender Weise auf beliebige gleichartige Grössen ausdehnen lassen, so z. B. auch auf Winkel. Als Maass-Einheit für letztere ist, wie bekannt, in allen praktischen Anwendungen ein- für allemal der rechte Winkel, bezw. der Grad, die Minute oder die Secunde festgesetzt worden. — Die Messung von Winkeln steht ausserdem in einer besonderen Beziehung zur Messung von Kreislinien. Ehe wir jedoch zu derselben übergehen, erscheint es zweckmässig, zunächst der Lehre von der Bestimmung der Verhältnisse verschiedener Strecken, diejenige von der Theilung der Strecken in bestimmten Verhältnissen zur Seite zu stellen und sodann auch entsprechend die Ausmessung und die Theilung der Flächen sowie die Aehnlichkeit geradliniger Figuren zu erörtern.

§ 36. Parallele Transversalen.

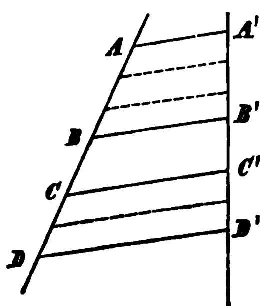
1. Im Paragraph 25 des 2. Kapitels ist gezeigt worden, dass parallele Gerade, welche auf einer beliebig sie schneidenden Geraden gleiche Strecken abschneiden, auch auf jeder anderen sie schneidenden Geraden entsprechend unter sich gleiche Strecken abschneiden müssen. Hierdurch war zugleich die Lösung der Aufgabe geliefert, eine Strecke in irgend eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Jener Satz kann jetzt, wie folgt, erweitert werden:

Werden beliebige unter sich parallele Linien von irgend zwei Geraden geschnitten, so ist das Verhältniss je zweier auf einer dieser

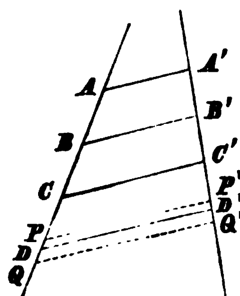
letzteren gebildeten Abschnitte gleich dem Verhältniss der entsprechenden Abschnitte der anderen. (1)

Zum Beweise dieses Satzes sei zunächst angenommen, dass die betreffenden Abschnitte AB, CD der einen Geraden commensurabel seien. Theilt man dann AB und CD durch ein gemeinschaftliches Maass in gleiche Theile, so ist das Verhältniss von AB zu CD gleich dem der Maasszahlen m und n. Zieht man ferner durch die Theilpunkte die Parallelen zu den die Abschnitte bestimmenden Geraden AA', BB' u. s. w., so werden auch $A'B'$ und $C'D'$ nach dem oben citirten Satze in bezüglich m und n gleiche Theile getheilt, und man kann beide Strecken durch einen solchen Theil als gemeinschaftliches Maass derselben gemessen denken. Demnach verhält sich auch $A'B'$ zu $C'D'$ wie m zu n, also ist



$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Sind dagegen AB und CD incommensurabel, so theile man AB in eine beliebige Anzahl, etwa in m gleiche Theile und trage einen solchen Theil so oft als möglich, etwa $n$mal, auf CD ab. Es muss dann der letzte hierdurch auf CD bestimmte Punkt P zwischen C und D, und bei weiterem Abtragen der nächstfolgende Q auf die Verlängerung von CD fallen, sodass PD und QD kleiner als einer jener Theile sind. Man ziehe nun durch P und Q bezüglich die Parallelen PP', QQ' zu DD', so ist, da AB und CP, sowie AB und CQ commensurabel sind,



$$CP : AB = C'P' : A'B' = n : m,$$
$$CQ : AB = C'Q' : A'B' = (n + 1) : m.$$

Da nun $CD > CP$ und $CD < CQ$, so ist das irrationale Verhältniss $CD : AB$ zwischen den Grenzen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ enthalten. In gleicher Weise muss auch das Verhältniss $C'D' : A'B'$ zwischen denselben Grenzen enthalten sein. Beides bleibt der Fall, wenn man sich den auf AB und CD abgetragenen aliquoten Theil bis in's Unendliche abnehmend, die beiden Grenzwerthe also einander unendlich nahe kommend denkt. Daher muss auch hier $CD : AB = C'D' : A'B'$ sein.

Wäre nämlich $CD : AB$ nicht gleich $C'D' : A'B'$, so müssten beide Verhältnisse um eine bestimmte Grösse x verschieden sein. Durch das Vorhergehende ist aber gezeigt, dass der Unterschied der Grenzwerthe, zwischen welchen beide Verhältnisse liegen, kleiner als jede bestimmte endliche Grösse, also auch kleiner als x gemacht werden kann. Hieraus folgt, dass $x = 0$ sein muss.

Bei dem vorstehenden Satze ist es gleichgültig, ob die von den Parallelen geschnittenen Geraden convergiren oder parallel sind, sowie ob der Durchschnittspunkt der parallelen Geraden zwischen zwei von jenen Parallelen liegt oder nicht. Ebenso kann eine der Parallelen durch den Durchschnittspunkt selbst gehen, sodass dieser gemeinschaftlicher Theilpunkt beider Geraden ist und die zugehörige Parallele überflüssig wird.

2. Als der einfachste Fall der Anwendung des vorstehenden Satzes kommt der folgende besonders häufig vor:

Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so theilt diese die beiden anderen Seiten in gleichem Verhältniss. (2)

Ist also $DE \parallel AB$ und beispielsweise $CD = \frac{1}{3}CA$, so ist auch $CE = \frac{1}{3}CB$ und $DA = 2 \cdot CD = \frac{2}{3}CA$, wie $BE = 2 \cdot CE = \frac{2}{3}CB$. Allgemein ist

$$CD : DA = CE : EB$$
$$CD : CA = CE : CB$$
$$DA : CA = EB : CB$$

Durch Vertauschung der Glieder dieser Proportionen (Arithmetik § 55, [3]) ergeben sich ferner die folgenden:

$$CD : CE = DA : EB = CA : CB$$

d. h. es verhalten sich die beiden oberen (d. i. die dem gemeinschaftlichen Eckpunkt anliegenden) Abschnitte zu einander wie die entsprechenden unteren Abschnitte, und wie die ganzen Seiten.

Diese Sätze lassen sich noch durch den weiteren Satz ergänzen, dass auch die parallele Transversale zu der ihr parallelen Seite in demselben Verhältniss steht, wie je ein oberer Abschnitt zur betreffenden ganzen Seite (3), denn zieht man DF parallel zu CB, so ist — da FD ebenso parallele Transversale des Dreiecks zu BC, wie DE zu BA ist — auch

$$BF : BA = CD : CA,$$

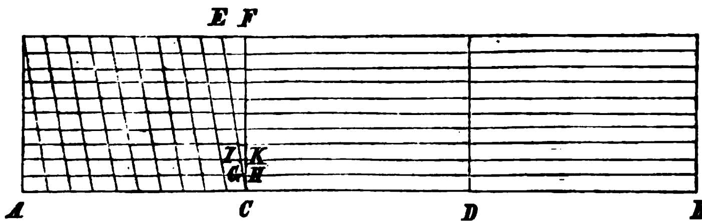
und da BF und ED als Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist auch

$$ED : BA = CD : CA,$$

was zu beweisen war.

Ist also z. B. $CD = \frac{1}{3}CA$, so ist auch $ED = \frac{1}{3}BA$.

Auf diesem Satze beruht die Construction des zum genaueren Messen und Abtragen für die Praxis wichtigen Transversal-Maassstabes. Die nebenstehende Figur veranschaulicht einen solchen:



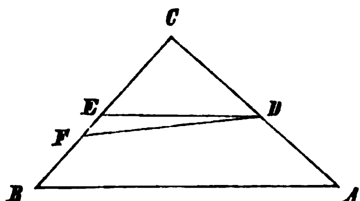
Ist auf AB eine Maasseinheit wiederholt abgetragen und die erste der erhaltenen Strecken AC, CD u. s. w. in ihre Unterabtheilungen, hier also AC decimal getheilt, ist ferner ein einzelner Theil von AC zu klein, um auch ihn noch einmal, etwa in 10 gleiche Theile deutlich theilen zu können, so benutzt man zur Abmessung dieser Hundertel von AC die über AB liegenden, ihr parallelen und, wie die Figur zeigt, durch Transversalen getheilten Strecken. Im Dreieck EFC, dessen Seite CF in zehn gleiche, im Uebrigen aber, da CF beliebig lang angenommen werden kann, auch beliebig lange Theile getheilt ist, muss nämlich die an C zunächstliegende zu EF parallele Transversale GH gleich $\frac{1}{10}EF = \frac{1}{100}AC$, die zweite IK gleich $\frac{2}{10}EF$, u. s. w. sein, denn es ist

$$GH : EF = CH : CF = 1 : 10;\ IK : EF = CK : CF = 2 : 10, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergiebt sich leicht das Weitere über den praktischen Gebrauch eines solchen Maassstabes.

3. Die im Vorstehenden entwickelten Sätze über parallele Transversalen eines Dreiecks gestatten ferner Umkehrungen wie die folgende:

Sind zwei Seiten eines Dreiecks in gleichem Verhältniss getheilt, so ist die Verbindungslinie der Theilpunkte der dritten Seite parallel (4), d. h.



ist $CE : EB = CD : DA$, so ist $DE \parallel AB$.

Denn wäre DE nicht parallel zu AB, so könnte man durch D eine andere Transversale DF des Dreiecks ABC ziehen, welche parallel zu AB wäre. Dann müsste

$$CF : CB = CD : CA$$

sein. Da aber aus der vorausgesetzten Proportion folgt, dass auch

$$CE : CB = CD : CA$$

ist, und zwei Proportionen, die in drei gleichstelligen Gliedern übereinstimmen, auch in den vierten übereinstimmen, so müsste $CF = CE$ sein, was nur möglich ist, wenn DF mit DE zusammenfällt.

Dagegen kann man nicht behaupten, dass wenn

$$ED : BA = CE : CB$$

ist, auch ED parallel zu BA sein müsse, denn beschreibt man mit ED um E einen Kreisbogen, so kann dieser möglicherweise CA in einem zweiten Punkte D' treffen, sodass $ED' = ED$, aber nur eine von diesen Linien parallel zu BA ist.

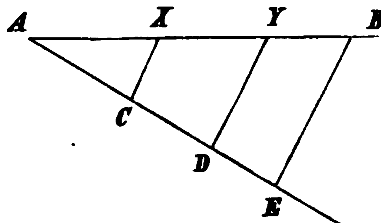
Setzt man jedoch voraus, dass ED parallel zu BA gezogen und

$$ED : BA = CE : CB$$

sei, so kann man wieder leicht indirekt beweisen, dass der Endpunkt D der Parallelen ED auf der Seite CA liegen muss.

§ 37. Theilung der Strecken.

1. Es ergiebt sich endlich aus dem Vorstehenden die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Strecke in zwei oder mehrere Theile zu theilen, die zu einander in gegebenen Verhältnissen stehen, oder wie man auch kürzer sagt, **eine Strecke in gegebenem Verhältniss zu theilen.** Man hat hierzu nur nöthig, an die zu theilende Strecke AB in A eine beliebige Convergente anzulegen, auf dieser von A aus Strecken AC, CD, DE, . . . nach einander abzutragen, welche in dem gegebenen Verhältniss stehen, den letzten so auf der Convergenten erhaltenen Punkt mit B zu verbinden, und durch die übrigen jener Punkte C, D, . . die Parallelen zu dieser Verbindungslinie zu ziehen. Die Parallelen schneiden dann AB, wie unmittelbar aus dem Satze § 36, (1) hervorgeht, in den gesuchten Theilpunkten X, Y, . . .



Die Strecken AC, CD, DE, . . . erhält man hierbei, wenn die betreffenden Verhältnisse durch Zahlen m, n, p, . . gegeben sind, indem man eine beliebige Strecke auf der Convergenten zuerst m mal, dann n mal, p mal u. s. w. abträgt. Sind dagegen jene Verhältnisse durch andere in denselben zu einander stehende Strecken a, b, c, . . . gegeben, so kann man unmittelbar $AC = a$, $CD = b$, $DE = c$ u. s. w. machen.

2. Die Aufgabe, die Strecke AB durch einen Punkt X in einem gegebenen

Verhältniss zu theilen, setzt zwar zunächst als selbstverständlich voraus, dass X auf dieser Strecke selbst, also zwischen den Endpunkten A und B liege; sie kann jedoch in einem erweiterten Sinn aufgefasst werden, nach welchem es auch gestattet ist, einen Theilpunkt auf einer Verlängerung von AB zu denken. Ist nämlich Y ein solcher Punkt auf der Verlängerung von AB, so hat derselbe in gleicher Weise wie der zwischen A und B liegende Punkt X von jedem der Endpunkte von AB eine bestimmte Entfernung AY oder BY. Um hierbei den Widerspruch mit dem Wortlaut des Grundsatzes zu vermeiden, dass jeder Theil kleiner als das Ganze sein muss, während hier AY grösser als AB ist, kann man AY und BY, sowie AX und BX als Abschnitte der Strecke AB, statt als Theile derselben bezeichnen. Unter diesen durch irgend einen Punkt einer Geraden gebildeten Abschnitten einer auf dieser Geraden liegenden Strecke sollen also immer die Abstände jenes Punktes von den beiden Endpunkten dieser Strecke verstanden werden.

Um alle hierbei möglichen Fälle kennen zu lernen, denken wir uns den die Abschnitte bildenden Punkt X zuerst als mit einem Endpunkt A zusammenfallend und sodann in der Richtung nach dem anderen Endpunkt B bewegt, sodass er in stetigem Fortschreiten nach und nach die Lagen aller Punkte der Geraden erhält. Fällt A mit X zusammen, so ist das Vorderglied des Verhältnisses $AX:BX$ gleich Null, das Hinterglied gleich AB, der Werth des Verhältnisses also gleich Null. Bei der Bewegung des Punktes X von A nach B wächst das Vorderglied AX stetig, während das Hinterglied BX ebenso stetig abnimmt; jede dieser Veränderungen bewirkt eine Vergrösserung des Werthes des Quotienten $\frac{AX}{BX}$. Dabei bleibt dieser Werth ein echter Bruch, so lange X noch nicht bis in den Halbirungspunkt von AB gelangt ist; für diesen Halbirungspunkt wird jener Werth gleich 1, und bei der weiteren Bewegung von X wird er ein unechter Bruch, welcher ununterbrochen wächst, bis er, wenn X auf B fällt, unendlich gross $\left(\text{gleich } \frac{AB}{0}\right)$ wird. Tritt nun X in Folge seiner gleichmässig ununterbrochenen Bewegung auf die Verlängerung von AB über B, so wächst der Dividendus von $\frac{AX}{BX}$ noch weiter in derselben stetigen Weise wie bisher, der Divisor aber verwandelt das bisherige Abnehmen ebenfalls in ein Zunehmen. So lange X auf der Verlängerung über B fortschreitet, bleibt dabei der Divisor BX immer kleiner als der Dividendus AX. Setzen wir der Kürze halber $AB = a$, $BX = x$, so ist in diesem Falle $AX = x + a$ und der Quotient

$$\frac{AX}{BX} = \frac{x+a}{x} = 1 + \frac{a}{x}.$$

Man sieht hieraus, dass dieser Quotient mit wachsendem x fortwährend abnimmt und für $x = \infty$ gleich 1 gesetzt werden muss. Bei der Bewegung des Punktes von B bis in's Unendliche nimmt also das Verhältniss der Abschnitte nach einander alle möglichen Werthe von Unendlich bis Eins an. — Bereits früher ist dargethan worden, dass in dem unendlich entfernten Punkte der Uebergang von der einen Richtung der Geraden zur anderen gedacht werden kann, dass man also eine noch weitere Fortsetzung der Bewegung von X in der Art denken kann, dass derselbe sich nunmehr auf der Verlängerung von BA über A, und zwar aus dem Unendlichen in der Richtung nach A bewege. Hierbei nehmen AX und BX beide ab, und es ist

$$\frac{AX}{BX} = \frac{x-a}{x} = 1 - \frac{a}{x}.$$

Mit der Abnahme von x wird $\frac{a}{x}$ stetig grösser, also $1 - \frac{a}{x}$ kleiner, und es erhält hiernach das Verhältniss der Abschnitte nach einander alle Werthe von Eins bis Null. Der letztere Grenzwerth wird erreicht, wenn X wieder mit A zusammenfällt.

3. Aus dem Gesagten ergiebt sich, dass keine zwei Punkte, welche entweder beide zugleich auf einer Strecke AB oder beide auf einer Verlängerung derselben liegen, diese Strecke in demselben Verhältniss theilen können. Allerdings giebt es zu jedem Theilpunkte X einen zweiten X', welcher so liegt, dass $AX = BX'$, $BX = AX'$ ist (nur im Halbirungspunkt der Strecke und im unendlich entfernten Punkt derselben fallen je zwei solche Punkte zusammen). Man sieht jedoch leicht ein, dass zwei solche Punkte die Strecke AB nicht in demselben Verhältniss, sondern in umgekehrten Verhältnissen theilen. Man kann auch sagen, der Punkt X' theile nicht die Strecke AB, sondern die Strecke BA in demselben Verhältniss, wie der Punkt X die Strecke AB. Es ergiebt sich ferner, dass zu jedem Punkte X einer Strecke ein und nur ein einziger entsprechender Y auf einer Verlängerung derselben und umgekehrt gehört, sodass beide Punkte die Strecke in demselben Verhältniss theilen, dass also

$$AX : BX = AY : BY$$

ist. Solche Punkte sollen harmonische Theilpunkte der Strecke AB heissen, und man sagt von ihnen, dass sie AB harmonisch theilen. Dabei liegt der äussere Theilpunkt stets auf derjenigen Verlängerung der Strecke AB, welche dem kleineren Abschnitt des inneren Theilpunktes anliegt. Zu jeder Strecke gehören unendlich viele Paare harmonischer Theilpunkte; in jedem Endpunkt der ersteren fallen zwei solche Punkte zusammen; der Halbirungspunkt bildet ein Paar mit dem unendlich entfernten Punkte.

Da durch Umstellung der Glieder der Proportion

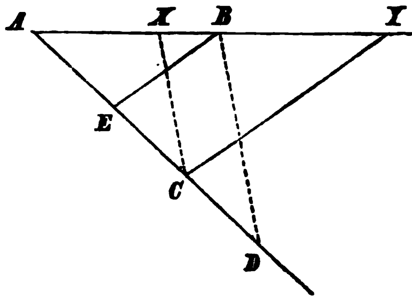
$$AX : BX = AY : BY$$

die andere

$$AX : AY = BX : BY$$

folgt, so gilt der Satz: Ist eine Strecke AB durch zwei Punkte X, Y harmonisch getheilt, so wird auch die Strecke XY durch die Punkte A, B harmonisch getheilt. Daher nennt man vier solche Punkte überhaupt vier harmonische Punkte der betreffenden Geraden, und je zwei zusammengehörige A, B und X, Y werden einander zugeordnet genannt.

4. Die Aufgabe, eine gegebene Strecke in einem gegebenen Verhältniss zu theilen, ist hiernach nicht bloss für jeden Werth dieses Verhältnisses lösbar, sondern hat auch stets zwei Lösungen, welche nur für die Grenzwerthe $0 : AB$ und $AB : 0$ in je eine zusammenfallen. Die obige Auflösung dieser Aufgabe muss daher noch durch die Bestimmung des zweiten, äusseren Theilpunktes ergänzt werden.



Zu diesem Zwecke trage man, wenn zur Bestimmung des Theilpunktes X auf AB, die Strecken AC, CD auf einer Convergenten abgetragen und DB, sowie CX parallel zu DB gezogen worden, noch auf

CA die Strecke CE gleich CD ab, ziehe EB und sodann CY parallel zu EB. Der Punkt Y auf der Verlängerung von AB ist dann der gesuchte, denn es ist

$$AY:BY = AC:EC = AC:CD = AX:BX = m:n.$$

Ohne weitere Anleitung ersieht man noch aus diesem Verfahren eine Auflösung der Aufgabe: zu einem gegebenen Theilpunkt X oder Y einer Strecke den zugeordneten harmonischen Theilpunkt Y oder X zu bestimmen.

Eine einfachere Auflösung beider Aufgaben ergiebt sich daraus, dass wenn durch A und B zwei beliebige einander parallele Gerade gezogen und auf denselben die Strecken BC, AD, sowie $AE = AD$ auf der Verlängerung von DA abgetragen werden, die Geraden EC und DC (bezw. deren Verlängerung) AB in X und Y im Verhältniss $AD:BC$ theilen.

Die Zweideutigkeit der vorstehend erörterten Theilungs-Aufgabe wird aufgehoben, wenn man mit den Maasszahlen der Strecken zugleich die Richtung angeben will, nach welcher die letzteren beschrieben gedacht werden, und demgemäss eine der Richtungen einer Geraden als die positive annimmt, sodass die entgegengesetzte als die negative zu bezeichnen ist. Ist nämlich AB durch Bewegung eines Punktes von A nach B beschrieben gedacht und denkt man sich diese Bewegung in derselben Richtung bis zu einem Punkte C fortgesetzt, so bewirkt die Hinzufügung der zweiten Bewegung zur ersten eine Vergrösserung der Strecke, es ist $AC = AB + BC$. Erfolgt aber die zweite Bewegung in der entgegengesetzten Richtung, so bewirkt ihre Hinzufügung eine entsprechende Verkleinerung von AB und will man auch hier $AC = AB + BC$ setzen, so ist BC als negativ zu betrachten.

Ueberall, wo neben den Längen der Strecken auch ihre Richtungen in Betracht kommen, geben wir also den in der einen Richtung genommen gedachten Strecken das Vorzeichen $+$, den in der entgegengesetzten Richtung genommenen das Vorzeichen $-$. In diesem Sinne ist

$$AB = -BA,$$

oder

$$AB + BA = 0,$$

und wenn C ein Punkt von AB zwischen A und B, oder auf der Verlängerung von AB ist, so hat man immer

$$AB + BC = AC,$$

oder

$$AB + BC + CA = 0.$$

In diesem Sinne ist, wenn X der innere, Y der äussere von zwei harmonischen Theilpunkten der Strecke AB ist, das Verhältniss $AX:BX$ negativ, dagegen das Verhältniss $AY:BY$ positiv, also sind beide nicht mehr als einander gleich zu betrachten, sondern es ist

$$\frac{AX}{XB} = -\frac{AY}{YB}.$$

Weiteres über harmonische Theilung findet sich im Kapitel 7, insbesondere § 78.

§ 38. Eck-Transversalen.

1. Die früheren Untersuchungen über die Verhältnisse, in welchen Seiten eines Dreiecks durch zu einer anderen Seite parallele Transversalen geschnitten werden, führen zu ihrer Ergänzung auf die Frage nach der Theilung von Dreiecksseiten durch andere Arten von Transversalen. Unter diesen erscheinen zunächst als einfacherer Fall diejenigen, welche von einem Eckpunkt des Dreiecks ausgehen, und welche man deshalb auch Ecktransversalen des letzteren nennt. Eine allgemeinere Untersuchung dieses Gebietes gehört der sogenannten neueren

Geometrie an; wir beschränken uns hier auf diejenigen besonders wichtigen Fälle, welche mit den bisher gewonnenen Hülfsmitteln der Elementar-Geometrie erledigt werden können.

Die Ecktransversale AD eines Dreiecks ABC halbire den betreffenden Winkel desselben. Verlängert man in diesem Fall CA und zieht BE parallel zu DA bis zum Durchschnittspunkt E mit der Verlängerung, so ist

$\angle CAD = \angle AEB$ (corresp. Winkel bei parallelen Linien),

$\angle DAB = \angle ABE$ (Wechselwinkel bei parallelen Linien).

Da nun nach der Voraussetzung die Winkel CAD und DAB einander gleich sind, so ist auch $\angle AEB = \angle ABE$, und daher

$$AE = AB.$$

Nun ist wegen des Parallelismus von AD und EB,

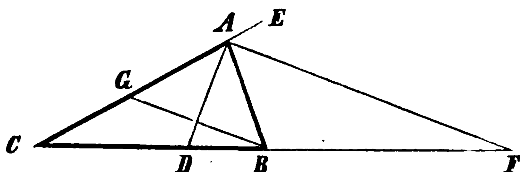
$$CD : BD = CA : AE,$$

also auch

$$CD : BD = CA : AB,$$

d. h. die von einer winkelhalbirenden Transversale gebildeten Abschnitte einer Dreiecksseite verhalten sich wie die anliegenden anderen Seiten. (1)

Halbirt man entsprechend den Aussenwinkel EAB, so erhält man ebenfalls zwei Abschnitte CF, FB der gegenüberliegenden Seite. Zieht man wieder BG parallel zu FA, so ergiebt eine ähnliche Beweisführung, wie vorher, mittelst



$$\angle AGB = \angle EAF = \angle FAB = \angle ABG,$$

also $AG = AG$,

und $CF : BF = CA : AG$,

dass auch $CF : BF = CA : AB$

ist, d. h. dass der vorstehende Satz auch für die Halbirungslinie der Aussenwinkel des Dreiecks gilt.

Halbirt man hiernach sowol einen inneren Winkel, als auch den ihm anliegenden Aussenwinkel eines Dreiecks, so theilen die halbirenden Transversalen die gegenüberliegende Seite harmonisch, oder es ist — mit Berücksichtigung der Vorzeichen —

$$\frac{CD}{BD} = -\frac{CF}{BF}.$$

Dieser Satz bietet ein neues Mittel, eine gegebene Strecke in einem gegebenen Verhältniss ($m : n = AC : AB$) harmonisch zu theilen.

Da ferner die beiden Winkelhalbirenden AD, AF als Halbirungslinien zweier Nebenwinkel zu einander senkrecht stehen, so geht ein über dem Abstand der Theilpunkte DF als Durchmesser construirter Halbkreis durch die Spitze A des Dreiecks.

Umgekehrt ist dieser Halbkreis der geometrische Ort aller Punkte A, deren Entfernungen von den beiden festen Punkten C, B in dem gegebenen Verhältniss $m : n = CD : DB$ zu einander stehen.

Verbindet man nämlich irgend einen Punkt A dieses Halbkreises mit C, B, D und F und zieht BE parallel zu DA, BG parallel zu FA, so ist $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AE}$, $\frac{CF}{BF} = \frac{CA}{AG}$, und da $\frac{CD}{DB} = \frac{CF}{BF}$ sein soll, auch $\frac{CA}{AE} = \frac{CA}{AG}$, also $AE = AG$. Da ferner die Schenkel des Winkels GBE bezüglich denen von DAF parallel und entgegengesetzt gerichtet, beide Winkel also einander gleich sind, so ist auch GBE ein rechter Winkel, woraus $AB = AE = AG$ folgt. Mithin ist auch $AC : AB = CD : DB$, was zu beweisen war.

Man kann, wenn die Seiten eines Dreiecks $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ gegeben sind, die durch die Winkelhalbirenden auf den Seiten gebildeten Abschnitte berechnen. Bezeichnen wir die Maasszahlen von CD und DB bezüglich durch v und u, so ist

$$u : v = c : b, \quad u + v = a,$$

$$\text{also } u = a \cdot \frac{c}{b+c}, \quad v = a \cdot \frac{b}{b+c}.$$

$$\text{Ebenso ist } CF = \frac{ab}{b-c}, \quad BF = \frac{ac}{b-c}.$$

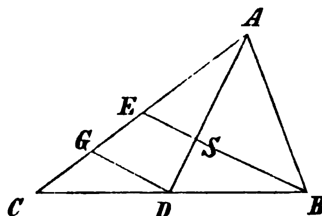
2. Jede Ecktransversale, welche durch den Halbirungspunkt einer Seite des Dreiecks geht, heisse eine Mittellinie des letzteren. Eine solche theilt also die gegenüberliegende Seite im Verhältniss 1 : 1. — Zieht man zwei Mittellinien AD, BE eines Dreiecks, so müssen dieselben einander in einem Punkte S schneiden, und zieht man durch D die Parallele zu BE, welche die Seite AC in G schneide, so ist

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EG},$$

$$\text{aber } \frac{AE}{EG} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{EC}{EG},$$

$$\text{und da } \frac{AE}{EC} = \frac{1}{1}, \quad \frac{EC}{EG} = \frac{BC}{BD} = \frac{2}{1}, \text{ so ist auch}$$

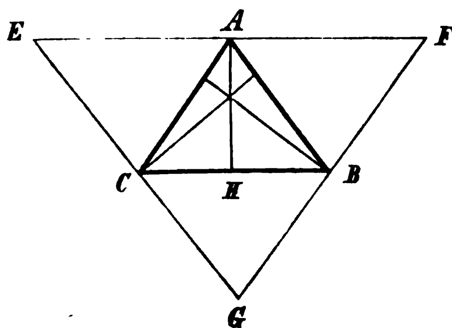
$$\frac{AS}{SD} = \frac{2}{1}.$$



Die Mittellinie BE theilt also die Mittellinie AD im Verhältniss 2 : 1, und da dies sich ebenso von der dritten Mittellinie desselben Dreiecks muss beweisen lassen, so folgt der Satz:

Die drei Mittellinien eines jeden Dreiecks schneiden einander in demselben Punkte und werden durch diesen im Verhältniss 2:1 getheilt, sodass jedesmal der grössere Abschnitt dem Eckpunkt anliegt. (2)

Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt S der Mittellinien heisst in Folge einer physikalischen Eigenschaft desselben der Schwerpunkt des Dreiecks.



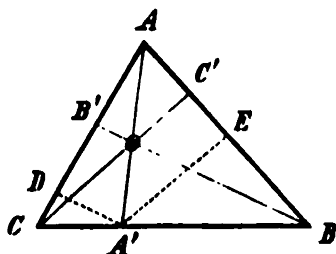
Man kann diesen Schwerpunkt also auch dadurch finden, dass man nur eine Mittellinie AD zieht und diese im Verhältniss $AS : SD = 2 : 1$ theilt.

3. Ebenso wie die drei Mittellinien und auch, zufolge früherer Sätze, die Winkelhalbirenden und die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden

auch die drei Höhen eines solchen einander in einem einzigen Punkte (3). Dieser Satz kann sehr leicht dadurch bewiesen werden, dass man durch jeden Eckpunkt des Dreiecks die Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht. Man erhält so ein zweites Dreieck EFG, in welchem $EA = CB$ und $AF = CB$ als Gegenseiten je eines Parallelogramms, folglich auch $EA = AF$ ist. Da ferner die zu BC senkrechte Höhe AH auch senkrecht zu der zu BC parallelen Geraden FE sein muss, so ist AH die zu EF gehörige Mittelsenkrechte des Dreiecks EFG. Da sich Entsprechendes von jeder der anderen Höhen beweisen lässt, so folgt die Richtigkeit des obigen Satzes aus dem anderen, dass die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines jeden Dreiecks einander in demselben Punkte schneiden.

Der Durchschnittspunkt der Höhen, der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks heissen die vier merkwürdigen Punkte des letzteren. Im gleichseitigen Dreieck fallen dieselben zusammen, im gleichschenkeligen liegen alle vier auf einer und derselben Geraden.

4. Zieht man überhaupt durch irgend einen Punkt O in der Ebene eines Dreiecks die Ecktransversalen AA', BB', CC', so muss zwischen den durch letztere bestimmten sechs Abschnitten der Dreiecksseiten eine Beziehung entstehen, denn durch je zwei der Theilpunkte, z. B. A', B', sind die zugehörigen Transversalen, also auch der Punkt O und somit die Abschnitte der dritten Seite bestimmt. Um diese Beziehung zu finden, sei durch A' die Parallele $A'D$ zu BB' bis zum Durchschnitt D mit AC und entsprechend $A'E$ parallel zu CC' gezogen, dann ist



$$\frac{AB'}{B'D} = \frac{AC'}{C'E} \text{ (denn beide sind gleich } \frac{AO}{OA'}\text{)}$$

$$\frac{B'D}{CB'} = \frac{BA'}{BC}$$

$$\frac{CA'}{BC} = \frac{C'E}{BC'}.$$

Multiplicirt man die entsprechenden Seiten dieser drei Gleichungen mit einander, so erhält man, nach Weghebung der gleichen Faktoren $B'D$, bezw. $C'E$ und Multiplication beider Seiten mit BC:

$$\frac{AB' . CA'}{CB'} = \frac{AC' . BA'}{BC'}$$

oder in anderer Form

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot CB' \cdot BA',$$

d. h. das Produkt (der Maasszahlen) dreier nicht aneinanderliegender Abschnitte ist gleich dem Produkte der drei anderen Abschnitte (4).

Dieser Satz führt den Namen Satz des Ceva. Der Punkt O kann innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC liegen. Im ersteren Falle liegen alle drei Theilpunkte, im letzteren nur einer derselben auf einer Seite selbst, die übrigen auf Verlängerungen; beidemal ist also die Anzahl der inneren Theilpunkte eine

ungerade. O kann auch auf einer Seite oder in einem Eckpunkt liegen; dann geht die obige Gleichung über in $0 = 0$.

Umgekehrt wird auf jeder Seite eines Dreiecks oder deren Verlängerung ein Punkt so angenommen, dass das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Abschnitte der Seiten gleich dem Produkt der drei anderen ist, und ist dabei die Anzahl der inneren Theilpunkte eine ungerade, so schneiden die durch diese Punkte gehenden Ecktransversalen einander in einem einzigen Punkte (5).

Denn ist $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$, und ist O der Durchschnittspunkt zweier der genannten Ecktransversalen AA', BB', so ziehe man durch denselben Punkt O eine Ecktransversale von C aus. Fiele diese nun nicht mit der dritten CC' zusammen, träfe also AB in einem von C' verschiedenen Punkte C'', so müsste zufolge des vorigen Satzes auch

$$AB' \cdot BC'' \cdot CA' = AC'' \cdot BA' \cdot CB'$$

sein. Verbindet man diese Gleichung mit der oben vorausgesetzten durch Division der entsprechenden Seiten, so folgt

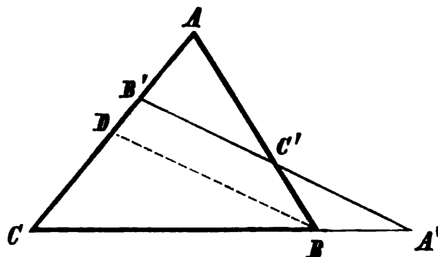
$$BC' : BC'' = AC' : AC'',$$

oder $BC' : AC' = BC'' : AC''$, d. h. AB müsste durch C'' in demselben Verhältniss getheilt sein wie durch C'. Da nun beide Punkte entweder gleichzeitig innere oder gleichzeitig äussere Theilpunkte von AB sein müssen, so ist dies nicht möglich, so lange C'' von C' verschieden angenommen wird.

Dieser letztere allgemeine Satz enthält die Sätze vom Durchschnitt der Winkelhalbirenden, der Mittellinien und der Höhen als besondere Fälle in sich, was im Einzelnen nachzuweisen dem Leser überlassen bleiben mag.

§ 39. Beliebige Transversalen.

Um nun endlich auch die Theilung der Seiten eines Dreiecks durch eine beliebige, alle drei Seiten in verschiedenen Punkten schneidende Transversale zu untersuchen, seien A', B', C' bezüglich die Durchschnittspunkte der letzteren mit den Seiten BC, AC, AB.



Zieht man BD parallel zur Transversale $A'B'$ bis zum Durchschnitt mit AC, so ist

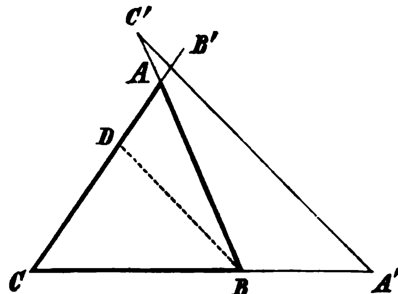
$$\frac{AB'}{B'D} = \frac{AC'}{BC'},$$

$$\frac{B'D}{CB'} = \frac{BA'}{CA'},$$

und durch Verbindung dieser Gleichungen mittelst Multiplication erhält man, wenn man noch in der entstehenden Gleichung die Nenner wegschafft und $B'D'$ weghebt,

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB',$$

d. h. das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Abschnitte der Seiten ist gleich dem Produkt der drei anderen. (1)



Dieser Satz heisst der Satz des Menelaos. Wir sind hier auf dieselbe Bedingung gekommen, wie vorher bei dem Satze § 38, (4). Ein Unterschied

liegt aber darin, dass diesmal entweder zwei Theilpunkte innere sind, oder alle drei auf Verlängerungen liegen. Man kann daher kurz sagen, dass im vorliegenden Falle die Zahl der inneren Theilpunkte immer eine gerade Zahl sei, indem man sich erlaubt, die Null als eine solche Zahl anzusehen.

Umgekehrt, ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Abschnitte der Seiten eines Dreiecks gleich dem Produkt der drei anderen und ist die Anzahl der inneren Theilpunkte eine gerade, so liegen die drei Theilpunkte in gerader Linie (2), denn wäre dies nicht der Fall, so müsste die durch A' und B' bestimmte Gerade der Seite AB (oder deren Verlängerung) in einem von C' verschiedenen Punkte C'' treffen, und es wäre nach dem vorigen Satze

$$AB' \cdot BC'' \cdot CA' = AC'' \cdot BA' \cdot CB',$$

während nach Voraussetzung

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' . CB'$$

sein muss. Die Verbindung beider Gleichungen durch Division führt wieder auf

$$BC'' : BC' = AC'' : AC',$$

was aus demselben Grunde, wie in dem entsprechenden vorhergegangenen Falle nicht möglich ist.

Die vorstehenden Sätze enthalten die entsprechenden für parallele Transversalen als besondere Fälle in sich, denn rückt A' in's Unendliche, so ist CA' $= BA'$ zu setzen und umgekehrt, und beide Faktoren heben einander auf; die so entstehende Gleichung

$$AB' \cdot BC' = AC' \cdot CB'$$

ist aber identisch mit $AB' : AC' = CB' : BC'$.

Weiteres über Transversalen findet sich im Kapitel 7, insbesondere § 79.

§ 40. Vom Flächeninhalt der Rechtecke.

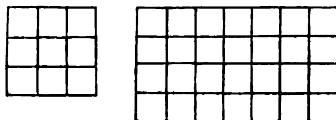
1. Als Maass für die Vergleichung der Grössen von Flächen geradliniger Figuren ist man übereingekommen ein Quadrat zu wählen, dessen Seite der zum Messen von Strecken angenommenen Linie, also der Längeneinheit, gleich ist. (Quadratmeter, Quadratcentimeter, Quadratmeile u. dgl.) Das Quadrat empfiehlt sich unter allen Figuren hierzu besonders, weil es der Gestalt und Grösse nach durch eine einzige Linie, insbesondere seine Seite, bestimmt ist und mittelst derselben eine einfache Beziehung des Flächenmaasses zum Längenmaasse gestattet, sodann (im Gegensatz zu anderen durch eine Strecke bestimmten Figuren, wie dem gleichseitigen Dreieck) dadurch, dass seine Winkel sämmtlich rechte, also von einer besonders einfachen und wichtigen Art sind.

Hierbei ist jedoch wegen der Verschiedenheiten in den Gestalten der Figuren ein unmittelbares Messen durch Abtragen des Maasses auf der zu messenden Fläche in der Regel unthunlich, dasselbe kann vielmehr nur bei Rechtecken gelingen, deren Seiten ausserdem Vielfache des Längenmaasses sein müssen. Theilt man in diesem Falle jede von zwei aneinanderliegenden Seiten des Rechtecks durch dieses Längenmaass und zieht durch jeden Theilpunkt die Parallele zu den anliegenden Seiten, so wird das Rechteck in eine Anzahl von Quadraten getheilt, welche sämmtlich dem als Flächenmaass dienenden Quadrate congruent sind und deren Anzahl also angiebt, wie oft sich dieses Flächenmaass ohne Rest auf der Fläche des Rechtecks abtragen lässt; diese Anzahl ist also die gesuchte Maasszahl des Rechtecks. Da nun irgend einer Seite AB des letzteren so viele jener Theilquadrate anliegen müssen, als diese Seite Theile hat, d. h. als die

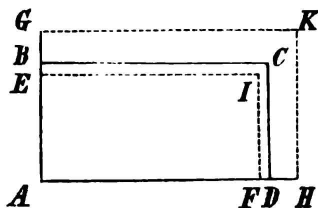
Maasszahl dieser durch die Längeneinheit gemessenen Seite angiebt, und da ferner so viele dieser ersten Reihe von Theil-Quadraten gleiche Reihen neben einander liegen, als die jener Seite anliegende Seite Theile hat, so ergiebt sich, dass die Maasszahl eines solchen Rechtecks statt durch das unbequeme unmittelbare Abtragen des Flächenmaasses auch durch Berechnung aus den Maasszahlen zweier aneinanderliegenden Seiten des Rechtecks gefunden werden kann. Man erhält so den Lehrsatz:

Die Maasszahl eines Rechtecks der gedachten Art ist gleich dem Produkt der Maasszahlen zweier aneinanderliegender Seiten desselben.

2. Ist aber eine Seite des zu messenden Rechtecks, oder sind beide keine Vielfachen der Längen-Einheit, so lässt sich die Fläche nicht in dieser Weise als Vielfaches der Flächen-Einheit darstellen. Sind in diesem Falle die beiden Seiten des Rechtecks mit der Seite des Quadrats commensurabel, so kann man sowol jene, als zwei aneinanderliegende Seiten dieses Quadrats durch ein gemeinschaftliches Maass theilen, und durch jeden Theilpunkt die Parallele zu den anliegenden Seiten derselben Figur ziehen. Dadurch wird sowol das Rechteck als auch das Quadrat in eine Anzahl kleinerer Quadrate getheilt, welche sämmtlich unter einander congruent sind, und das Verhältniss der Fläche des Rechtecks zu der Fläche des Quadrats, also die Maasszahl der ersteren in Beziehung auf letzteres, ist gleich dem Verhältniss der entsprechenden Anzahlen der Theilquadrate. Es bezeichne nun m die Anzahl der Theile einer Seite des Quadrats, während p, q bezüglich die Anzahlen der Theile der Seiten des Rechtecks sein sollen, dann hat das Quadrat $m \cdot m = m^2$, das Rechteck $p \cdot q$ Theilquadrate, und die gesuchte Maasszahl des letzteren ist also $\frac{p \cdot q}{m \cdot m}$. Nun ist aber das Verhältniss je einer Seite des Rechtecks zur Seite des grösseren Quadrats, d. h. die Maasszahl jener Rechtecksseite in Beziehung auf diese Quadratseite gleich dem Verhältniss der Anzahlen der entsprechenden Theile, also bezüglich gleich $\frac{p}{m}$ und $\frac{q}{m}$, und es ist mithin das Produkt der letzteren ebenfalls gleich $\frac{p \cdot q}{m \cdot m}$. Somit gilt der oben für den ersten Fall bewiesene Lehrsatz auch für den vorliegenden zweiten.



3. Sind endlich nicht beide Seiten des Rechtecks mit der Seite des als Einheit dienenden Quadrates commensurabel, so theile man die Seiten des letzteren durch einen beliebigen aliquoten Theil derselben und ziehe wieder die betreffenden Parallelen, sodass man wie vorhin $m \cdot m$ Theilquadrate erhält. Man trage ferner denselben aliquoten Theil der Quadratseite auf zwei aneinderliegenden Seiten des Rechtecks von demselben Eckpunkt A aus so oft als möglich ab. Dann bleibt auf einer dieser Seiten oder auf beiden ein Rest EB, oder FD, und trägt man auf jeder solchen Seite, bezw. deren Verlängerung, das gebrauchte Maass noch einmal ab, so erhält man einen ausserhalb des Rechtecks liegenden Punkt G oder H. Man ziehe nun durch E und F einerseits, sowie durch G und H andererseits die Parallelen zu den anliegenden Seiten bis zum gegen-



seitigen Durchschnitt, so erhält man die Rechtecke $AEIF$ und $AGKH$, von denen das erstere kleiner, das letztere grösser als $ABCD$ ist, und welche beide nach dem vorigen Falle mit dem Quadrate verglichen werden können. Sind von A bis E p und von A bis F q Theilstrecken abgetragen worden, so hat $AEIF$ die Maasszahl $\frac{p \cdot q}{m \cdot m}$ und $AGKH$ die Maasszahl $\frac{(p+1)(q+1)}{m \cdot m}$ und die Maasszahl von $ABCD$ muss zwischen diesen beiden Grenzzahlen liegen. Nun kann der Unterschied der letzteren, welcher gleich

$$\frac{pq+p+q+1}{mm} - \frac{pq}{mm} = \frac{p+q+1}{mm}$$

ist, kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden, wenn man die auf den Seiten abgetragene Theilstrecke entsprechend klein annimmt. Nimmt man nämlich bei einem zweiten Abtragen diese Theilstrecke $x$mal so klein als bei dem ersten, so werden statt p, q und m bezüglich die Zahlen px, qx und mx erhalten, jener Unterschied wird also zu

$$\frac{px+qx+1}{mm \cdot x \cdot x} = \frac{p+q+\frac{1}{x}}{mmx}.$$

Diese neue Differenz ist also, da der Nenner $x$mal so gross, der Zähler ausserdem in Folge des Gliedes $\frac{1}{x}$ statt 1 kleiner als vorher ist, über $x$mal so klein als die vorige. Denkt man sich nun x bis in's Unendliche wachsend, so nähern sich die Zahlen $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ ohne Ende den irrationalen Maasszahlen der Seiten AB und AD, und jene Differenz nähert sich ohne Ende der Grenze Null. Daher muss für diese Grenze selbst die Maasszahl des Rechtecks $ABCD$ ebenfalls als das Produkt der Maasszahlen der Seiten AB, AD angenommen werden.

Ist bloss eine der Rechtecksseiten, etwa AB, mit der Quadratseite incommensurabel, so vereinfacht sich nur der vorstehende Beweis, indem dann F mit D zusammenfällt, und die Maasszahl des grösseren Rechtecks $\frac{(p+1)q}{mm}$, die betreffende Differenz also gleich $\frac{q}{mm}$, und bei $x$maliger Verkleinerung des Maasses $\frac{q}{mx}$, also $x$mal so klein wird.

4. Sonach gilt jetzt ganz allgemein der Lehrsatz:

Die Maasszahl eines Rechtecks in Beziehung auf ein gegebenes Quadrat als Einheit ist gleich dem Produkt der Maasszahlen zweier aneinanderliegender Seiten desselben in Beziehung auf die Seite des Quadrats als Einheit.

Der Kürze des Ausdrucks wegen ist man übereingekommen, das Produkt der Maasszahlen zweier Strecken in Beziehung auf eine und dieselbe Einheit als das Produkt der Strecken zu bezeichnen. Man kann daher kürzer sagen:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier aneinanderliegender Seiten. (1)

Man sagt wol auch, der Flächeninhalt eines Rechtecks werde gefunden, wenn man seine Länge mit seiner Breite multiplicire. — Der Ausdruck »Produkt zweier Strecken« würde ohne die obige Erklärung widersinnig sein, da man nie zwei benannte Grössen multipliciren kann vielmehr mindestens der Multiplicator unbenannt sein muss. Im vorliegenden Falle, und ebenso in allen entsprechenden Fällen in der Folge, werden die beiden von ihrer Benennung befreiten Maasszahlen multiplicirt und dem Produkt die neue Maasseinheit als neue Benennung zugelegt.

Insbesondere ergiebt sich aus diesem Satze als besonderer Fall:

Der Inhalt eines jeden Quadrats ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite. (2)

Hieraus erklärt sich die Benennung Quadrat in der Arithmetik für die zweite Potenz einer Zahl. Das arithmetische Quadrat der Maasszahl einer Strecke ist die Maasszahl des geometrischen Quadrats der letzteren. In ähnlicher Weise findet man auch für das Produkt zweier Zahlen die Bezeichnung »Rechteck der Zahlen«, insbesondere wenn diese Maasszahlen von Strecken bedeuten.

Um das geometrische Quadrat über einer Strecke AB bequem in Formeln darstellen zu können, hat man vorgeschlagen, dasselbe durch $AB^{\mathfrak{q}}$ im Gegensatz zu dem das arithmetische Quadrat der Maasszahl bezeichnenden AB^2 auszudrücken.

Beispiele: 1. Es sei die eine Seite eines Rechtecks gleich 3,57 m, die andere gleich 5,21 m gemessen, so beträgt der Inhalt desselben $3{,}57 \times 5{,}21$ Quadratmeter oder 18,5997 qm. Dieses Resultat ist jedoch nicht bis auf die vierte Decimale brauchbar, wenn die Maasszahlen der Seiten nur bis zu einer halben Einheit ihrer letzten Decimalstelle genau bestimmt sind, wie in der Praxis stets anzunehmen ist. In diesem Falle ist vielmehr das Resultat zwischen $3{,}565 \times 5{,}205$ und $3{,}575 \times 5{,}215$ oder zwischen 18,55 . . und 18,64 . . schwankend, sodass nur $F = 18{,}6$ qm als sicheres Resultat angegeben werden darf. Wären dagegen die Maasszahlen der Seiten gleich 3,570 m und 5,210 m angegeben, so wären damit dieselben als bis zu einem halben Millimeter genau gemessen bezeichnet, und das Resultat 18,60 qm auf zwei Decimalen sicher. Man wird also bei derartigen Rechnungen in der Praxis zur Vermeidung der Bestimmung unnützer Decimalen stets die abgekürzte Multiplication anwenden.

2. Ein rechteckiges Stück Land ist 143,0 m lang und 88,5 m breit. Wieviel Miethe bringt es ein, das Ar zu 0,85 M.?

Da der Inhalt des Landes gleich $143{,}0 \times 88{,}5$ qm und ein Ar gleich 100 qm ist, so hat man $\frac{143{,}0 \times 88{,}5}{100} \cdot 0{,}85$ M. zu berechnen und erhält als Resultat 107,6 M.

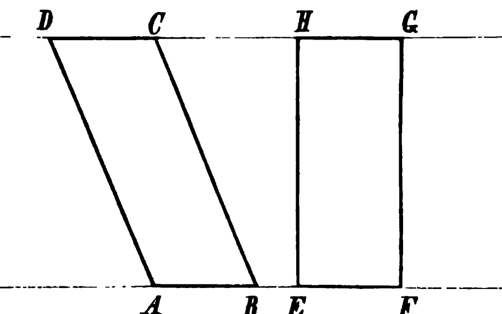
3. Wie gross ist ein Quadrat, dessen Seite 0,25 m lang ist?

Man erhält $0{,}25 \times 0{,}25$ qm $= 0{,}0625$ qm oder 625 qcm, wenn die Maasszahl der Seite als absolut genau angesehen wird, anderenfalls ist das Resultat zwischen 600 qcm und 650 qcm unsicher.

§ 41. Vom Flächeninhalt der Parallelogramme überhaupt.

1. Von der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks gelangt man zu derjenigen eines beliebigen Parallelogramms mit Hülfe des Lehrsatzes:

Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich.



Man kann nämlich solche Parallelogramme so zusammenstellen, dass ihre Grundlinien in derselben Geraden und sie selbst auf einerlei Seite dieser Geraden so neben einander liegen, dass ihre Umfänge keinen Punkt gemeinsam haben. Dann müssen wegen der Gleichheit der Höhen auch die den Grundlinien parallelen Seiten DC und HG in einer Geraden liegen, und zieht man CH, so entsteht

ein Trapez $CHEB$ zwischen beiden Parallelogrammen, welches zu jedem der letzteren hinzugefügt werden kann. Man erhält dann die Trapeze $DHEA$ und $CGFB$, welche, wie leicht zu zeigen, in je zwei homologen Seiten und Winkeln übereinstimmen, mithin congruent und also auch gleich gross sind. Nimmt man nun von jedem dieser Trapeze das gemeinschaftliche Stück $CHEB$ weg, so müssen die übrig bleibenden Flächen ebenfalls gleich gross sein; diese Flächen sind aber die der ursprünglichen Parallelogramme.

Insbesondere kann man daher auch sagen, dass Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und zwischen denselben (die Grundlinien enthaltenden) Parallelen gleich sind. Da man ferner dieselben Parallelogramme stets auch so zusammenstellen kann, dass ihre Grundlinien AB und EF einander decken, so kann man auch sagen: Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind gleich. (1)

In der letzteren Form wird der Satz besonders häufig angewendet.

2. Daher kann man nun auch jedes schiefwinkelige Parallelogramm in ein gleich grosses rechtwinkeliges verwandeln, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Da die Seiten dieses Rechtecks bezüglich der Grundlinie und der Höhe des Parallelogramms gleich sind, so folgt:

Der Inhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie und seiner Höhe. (2)

Ist also beispielsweise die Grundlinie eines Parallelogramms gleich 0,123 Meter, die Höhe desselben gleich 0,244 Meter, so ist sein Flächeninhalt gleich $0{,}123 \cdot 0{,}244 = 0{,}030012$ Quadratmeter, sofern die Maasszahlen der Seiten als absolut genau vorausgesetzt werden können. Da dies aber, wie schon beim Rechteck bemerkt, in der Praxis nie der Fall ist, vielmehr die Resultate der Messungen der Seiten als abgekürzte Zahlen zu betrachten sind, so hat man hier auch nur die abgekürzte Multiplication anzuwenden. Im vorliegenden Beispiel sind also die Zahlen 0,123 und 0,244 als Näherungswerthe zu betrachten, deren Fehler bis zu 0,0005 Meter betragen kann; dies hat für das Resultat der Multiplication eine Unsicherheit bis zu 0,0001(837) Quadratmetern zur Folge, sodass für den Inhalt des Parallelogramms nur das Resultat der abgekürzten Multiplication, 0,030 Quadratmeter, angewendet werden kann.

Aus dem vorstehenden Lehrsatz ergeben sich ohne Weiteres die nachstehenden als unmittelbare Folgerungen:

Der Satz, dass Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen inhaltsgleich sind, kann nicht ohne Weiteres umgekehrt werden, d. h. zur Gleichheit von Parallelogrammen ist die Gleichheit ihrer Grundlinien und ihrer Höhen nicht erforderlich. Vielmehr genügt hierzu die Gleichheit der Produkte aus Grundlinie und Höhe jedes Parallelogramms, oder was dasselbe ist:

Parallelogramme sind gleich gross, wenn ihre Grundlinien sich zu einander umgekehrt verhalten, wie ihre Höhen.

Aendert man also die Grundlinie eines Parallelogramms, so kann der Flächeninhalt desselben gleichwol ungeändert bleiben, wenn gleichzeitig die Höhe geändert wird, und zwar so, dass einer Vergrösserung der Grundlinie eine Verkleinerung der Höhe in gleichem Verhältniss entspricht, und umgekehrt. Dagegen müssen gleiche Parallelogramme mit gleichen Grundlinien auch gleiche Höhen, und gleiche Parallelogramme mit gleichen Höhen auch gleiche Grundlinien haben.

3. Noch allgemeiner folgt, dass sich die Inhalte irgend welcher Parallelogramme wie die Produkte aus den Grundlinien und Höhen verhalten (3). Als besondere Fälle sind in diesem Satz die folgenden enthalten: Die Flächen von Parallelogrammen mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und die Flächen von Parallelogrammen mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Da insbesondere bei einem und demselben Parallelogramm jede Seite zur Grundlinie angenommen werden kann, so folgt, dass die Produkte aus je einer Seite eines Parallelogramms und der zu ihr senkrechten Höhe einander gleich sind, oder dass je zwei Seiten eines Parallelogramms sich zu einander umgekehrt verhalten wie die zu diesen Seiten senkrechten Höhen.

Je grösser also eine Seite eines Parallelogramms bei demselben Inhalt wird, desto kleiner wird die zu ihr gehörige Höhe, und zu gleichen Seiten eines Parallelogramms (Rhombus) gehören gleiche Höhen. Diese Sätze lassen sich leicht auch unmittelbar durch Nichtcongruenz oder Congruenz von Dreiecken beweisen.

Weitere Rechnungsbeispiele: 1. Von einem Parallelogramm sei der Flächeninhalt $F = 6{,}44\,q$ m und die Grundlinie $g = 3{,}14$ m bekannt; man berechne seine Höhe. Auflösung: $h = F : g = 2{,}05$ m.

2. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms sei $F = 1{,}77\,q$m bekannt; man soll ein demselben gleiches Parallelogramm zeichnen, dessen eine Höhe $h_1 = 1{,}23$ m und dessen andere Höhe $h_2 = 1{,}08$ m sei. Wie lang sind die Seiten dieses zweiten Parallelogramms zu machen?

$$\text{Auflösung: } \frac{F}{h_1} = 1{,}44\text{m}, \quad \frac{F}{h_2} = 1{,}64\text{m}.$$

3. Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie gleich $g = 120\,m$, und dessen Höhe h gleich $84\,m$ gemessen wurde, soll in ein gleich grosses Quadrat verwandelt werden; wie lang wird die Seite des letzteren? Auflösung: $\sqrt{gh} = 100(,4)\,m$.

4. Man soll ein Rechteck zeichnen, welches so gross ist als zwei gegebene Parallelogramme mit bezüglich den Grundlinien $g_1 = 165$, $g_2 = 296$ und den Höhen $h_1 = 196$, $h_2 = 105$ zusammen, und welches mit dem ersteren die Grundlinie gemeinsam hat. Man berechne seine zweite Seite.

$$\text{Auflösung: } \frac{g_1 h_1 + g_2 h_2}{g_1} = h_1 + \frac{g_2 h_2}{g_1} = 384.$$

§ 42. Vom Flächeninhalt der Dreiecke.

Die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms führt weiterhin zu der Berechnung der Dreiecke, denn jedes Dreieck kann durch Ziehen von Parallelen zu zwei seiner Seiten durch den jedesmal gegenüberliegenden Eckpunkt zu einem Parallelogramm ergänzt werden, welches mit dem Dreieck dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe hat, und dessen Flächeninhalt — da das angelegte Dreieck dem ursprünglichen congruent ist — doppelt so gross ist als der des Dreiecks. Hieraus folgt ohne Weiteres:

Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus seiner Grundlinie und seiner Höhe. (1).

Ist also die Grundlinie beispielsweise gleich 1,4 Meter, die Höhe gleich 0,9 Meter, so ist der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}9$ Quadratmeter, wofür abgekürzt 0,6 Quadratmeter zu setzen ist.

Insbesondere ist also der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich der Hälfte des Produkts seiner Katheten.

Da man jede Seite eines Dreiecks zur Grundlinie annehmen kann, so lässt sich der Inhalt desselben mittelst des vorstehenden Satzes in dreifacher Form darstellen. Bezeichnen a, b, c, bezüglich die drei Seiten (d. i. ihre Maasszahlen), h_a, h_b, h_c der Reihe nach die zugehörigen Höhen, F den Flächeninhalt, so ist: $F = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$.

Da hiernach auch $a h_a = b h_b$ ist u. s. w., so ergiebt sich durch Verwandlung dieser Gleichung in eine Proportion der Satz:

Je zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander umgekehrt wie ihre Höhen. (2)

Ist also eine Seite eines Dreiecks doppelt ($n$mal) so gross als eine zweite Seite desselben Dreiecks, so ist die zu der ersteren senkrechte Höhe gleich der Hälfte $\left(\frac{1}{n}\right)$ der zur letzteren senkrechten, und umgekehrt. Allgemein lässt sich also auch aus zwei Seiten und einer der zugehörigen Höhen die andere Höhe, aus zwei Höhen und einer zugehörigen Seite die andere Seite berechnen.

Insbesondere ist also auch das Produkt der Katheten a, b eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich dem Produkt der Hypotenuse c und der zu ihr gehörigen Höhe h, oder es ist $ab = ch$, $h = \frac{ab}{c}$, $c = \frac{ab}{h}$, u. s. w.

Aus dem obigen Hauptsatze über die Berechnung des Inhalts eines Dreiecks folgt ferner, dass alle über die Verhältnisse der Flächen von Parallelogrammen aufgestellten Sätze auch für Dreiecke gelten. Es sind also

1. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen, und daher insbesondere auch Dreiecke auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen gleich gross,

2. verhalten sich Dreiecke mit gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und Dreiecke mit gleichen Höhen wie ihre Grundlinien,

3. verhalten sich überhaupt die Flächen von Dreiecken wie die Produkte aus ihren Grundlinien und ihren Höhen, und sind insbesondere Dreiecke dann und nur dann gleich, wenn diese Produkte gleich sind, oder wenn sich die Grundlinien zu einander umgekehrt wie die zugehörigen Höhen verhalten.

Endlich ist jedes Dreieck halb so gross wie jedes Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, und ebenso gross wie jedes Parallelogramm, welches gleiche Grundlinie und halb so grosse Höhe, oder gleiche Höhe und halb so lange Grundlinie hat.

Beispiele: 1. Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen, dessen Katheten $a = 3{,}1400$ m und $b = 2{,}1500$ m gemessen sind.

Auflösung: $\frac{ab}{2} = 3{,}3755\,q$m.

2. Der Flächeninhalt F eines rechtwinkeligen Dreiecks soll $345{,}50\,qm$, und eine Kathete a desselben soll $25{,}50\,m$ betragen; wie lang muss die andere Kathete werden? Auflösung: $\frac{2F}{a} = 27{,}10$ m.

3. Von einem Dreieck sei eine Seite gleich a und die Verhältnisse der drei Höhen $h_a : h_b : h_c = m : n : p$ gegeben; man berechne seine beiden anderen Seiten. Auflösung: Aus $b : a = h_a : h_b$ oder $a h_a = b h_b$ folgt $b = \frac{a h_a}{h_b}$, und entsprechend ist $c = \frac{a h_a}{h_c}$.

4. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks $a + b = s$, die zu einer derselben

gehörige Höhe h_a und der Flächeninhalt F seien gegeben; man berechne die Einzelwerthe jener beiden Seiten. Auflösung: Da $F = \frac{1}{2} a h_a$, so ist $a = \frac{2F}{h_a}$ und $b = s - \frac{2F}{h_a}$.

5. Ein Dreieck, dessen Grundlinie $g = 12,55\,m$ und dessen Höhe $h = 3,12$ m. gemessen ist, soll in ein gleich grosses Quadrat verwandelt werden. Wie lang wird die Seite des letzteren? Auflösung: $\sqrt{\frac{1}{2} g h} = 4,42$ m.

6. Ein dreieckiges Stück Ackerland, dessen Grundlinie 185m, und dessen Höhe 136 m beträgt, soll in Folge einer anderweiten Vermessung in ein Rechteck verwandelt werden, dessen eine Seite eine Länge von 200 m hat. Wie lang wird die andere Seite? Auflösung: $\frac{1}{2} \cdot 185 \cdot 136 = 200\,x$; $x = \frac{185 \cdot 68}{400} = 62,9$ m.

7. Den Inhalt eines Rhombus aus den Längen e, f seiner beiden Diagonalen zu berechnen. Auflösung: $F = 2 \cdot \frac{1}{2} e \cdot \frac{1}{2} f = \frac{1}{2} ef$.

8. Die Katheten a, b eines rechtwinkeligen Dreiecks aus der Summe s derselben und dem Flächeninhalt F zu berechnen. Auflösung: Die Gleichungen $a + b = s$ und $ab = 2F$ sind auf die Unbekannten a, b aufzulösen. Es ist $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = s^2 - 8F$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 8F}\right),\quad b = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 8F}\right).$$

9. Ein Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Seiten sich zu einander wie $m : n$ verhalten. Man berechne diese beiden Seiten. Auflösung: Es ist $xy = \frac{1}{2} gh$ und $x : y = m : n$. Hieraus ergiebt sich $x = \frac{m}{n} y$, $\frac{m}{n} y^2 = \frac{1}{2} gh$, also $y = \sqrt{\frac{ngh}{2m}}$ und $x = \sqrt{\frac{mgh}{2n}}$.

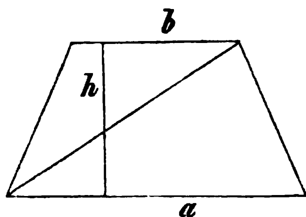
10. Um wieviel Procent vergrössert sich der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn jede seiner Katheten um p Procent verlängert wird? Auflösung:

$$F_1 = F + \frac{F}{100} x = \frac{1}{2} a \left(1 + \frac{p}{100}\right) b \left(1 + \frac{p}{100}\right);\quad \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab \cdot \frac{x}{100}$$

$$= \frac{1}{2} ab \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;\quad x = p\left(2 + \frac{p}{100}\right).$$

§ 43. Vom Flächeninhalt der Trapeze und Vielecke.

1. Durch die Bestimmung der Flächeninhalte von Dreiecken ist weiterhin auch die Möglichkeit gegeben, den Flächeninhalt jeder geradlinigen ebenen Figur zu finden. Man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, die letztere auf irgend welche Weise, z. B. mittelst Diagonalen oder durch Verbindung eines im Innern der Figur angenommenen Punktes mit den Eckpunkten, in Dreiecke zu zerlegen, jedes dieser Dreiecke einzeln zu berechnen, und schliesslich ihre Inhaltszahlen zu addiren.



Dieses Verfahren führt insbesondere zu einfachen Regeln bei dem Trapez und bei solchen Figuren, welchen sich ein Kreis einbeschreiben lässt. Für ein Trapez mögen die Maasszahlen der parallelen Seiten bez. durch a und b, die der Höhe (des senkrechten Abstandes der parallelen Seiten) durch h bezeichnet werden. Zieht man nun eine Diagonale, so erhält man zwei Dreiecke, deren

Grundlinien bez. gleich a und b, und in denen gleichzeitig die Höhe gleich h ist. Daher ist der Inhalt des Trapezes

$$F = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Der Inhalt eines jeden Trapezes ist also gleich der Hälfte des Produkts aus der Höhe und aus der Summe der parallelen Seiten (1), oder was dasselbe ist, gleich dem Produkt aus der Höhe und dem arithmetischen Mittel der parallelen Seiten, oder gleich dem Produkt aus der Höhe und der Mittellinie.

Es ist von Interesse, schon hier zu sehen, wie man aus Formeln, wie die vorstehende, ohne Weiteres neue Lehrsätze herauslesen kann. So ergeben sich hier unter Beachtung der vorhergegangenen Sätze von den Flächen der Dreiecke und Parallelogramme leicht die folgenden:

Jedes Trapez ist gleich jedem Dreieck mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Summe der parallelen Seiten des Trapezes ist.

Jedes Trapez ist gleich jedem Parallelogramm mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Mittellinie des Trapezes ist.

Mit Hülfe möglichst einfacher Construction eines solchen Dreiecks oder Parallelogramms lassen sich diese Sätze auch unmittelbar beweisen, indem man zeigt, dass man, um aus dem Trapez die andere Figur zu erhalten, von jenem ein Dreieck abzuschneiden und dafür ein congruentes anzusetzen habe. Man könnte auf diesem Wege umgekehrt aus einem der Sätze die obige Regel über den Flächeninhalt ableiten. Die nähere Ausführung dieser Gedanken kann dem Leser überlassen bleiben.

2. Lässt sich in eine Figur ein Kreis beschreiben, mit anderen Worten besitzt dieselbe einen Punkt — den Mittelpunkt des Kreises — welcher von allen Seiten gleichweit entfernt ist, so verbinde man diesen Punkt mit allen Eckpunkten und zerlege so die Figur in Dreiecke, welche bez. die einzelnen Seiten zu Grundlinien haben, und in deren jedem die Höhe gleich dem Radius des einbeschriebenen Kreises ist. Bezeichnen wir die Maasszahl des letzteren durch ρ, die der Seiten der Reihe nach durch $a, b, c, \ldots$, so ist hiernach der Inhalt der Figur,

$$F = \frac{1}{2} a\rho + \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} c\rho + \ldots = \frac{1}{2}(a + b + c + \ldots)\rho,$$

oder wenn wir die Summe $a + b + c + \ldots$ der Seiten, oder den Umfang der Figur durch u bezeichnen,

$$F = \frac{1}{2} u\rho.$$

Der Inhalt einer solchen Figur ist also gleich dem halben Produkt aus ihrem Umfang und dem Radius des einbeschriebenen Kreises. (2)

Auch hier kann man aus dem Satze ohne Weiteres den andern folgern, dass jede solche Figur gleich einem Dreiecke ist, dessen Grundlinie dem Umfang und dessen Höhe dem Radius derselben gleich ist.

Der vorstehende Satz findet besondere Anwendungen bei den regelmässigen Polygonen und bei den Dreiecken. Bei einem regelmässigen Polygon kann der Umfang u noch durch das Produkt der Maasszahl a einer Seite mit der Anzahl der Seiten ausgedrückt, und die obige Formel somit

$$F = \frac{1}{2} na\rho$$

geschrieben werden. Bei einem Dreieck pflegt man die Summe der drei Seiten durch $2s$ zu bezeichnen, und es geht dann die obige Formel in

$$F = \rho s$$

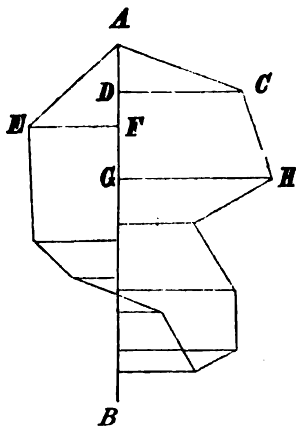
über. Dieselbe gestattet noch eine Ergänzung, indem man statt des Mittelpunktes

des einbeschriebenen Kreises den Mittelpunkt eines der drei äusseren Berührungskreise mit den Eckpunkten des Dreiecks verbindet und so die Fläche des letzteren als algebraische Summe der Flächen dreier Dreiecke darstellt, von denen eins ausserhalb des ursprünglichen liegt und daher von der Summe der beiden andern zu subtrahiren ist. Diese drei Dreiecke haben wieder der Reihe nach die Seiten des ursprünglichen zu Grundlinien, und die zugehörigen Höhen sind sämmtlich gleich dem Radius des Berührungskreises. Bezeichnet man die Maasszahlen der den Seiten $a, b, c,$ anbeschriebenen äusseren Berührungskreise der Reihe nach durch $\rho_a, \rho_b, \rho_c,$ so erhält man hiernach für den Flächeninhalt des Dreiecks noch die drei Formen

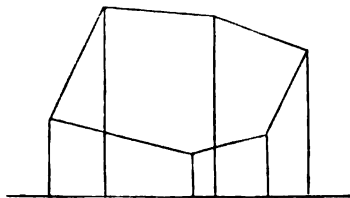
$$F = \tfrac{1}{2}(b + c - a)\,\rho_a = \tfrac{1}{2}(a - b + c)\,\rho_b = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\,\rho_c\,,$$
$$\text{oder } F = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c)\,.$$

Diese Ableitung zeigt an einem Beispiel, wie man überhaupt bei Polygonen die Zerlegung in Dreiecke auch durch Verbindung von ausserhalb der Flächen der Polygone liegenden Punkten mit Eckpunkten bewirken kann, wenn man dabei die Inhalte der ganz ausserhalb der zu messenden Figuren fallenden Dreiecke als subtractiv annimmt.

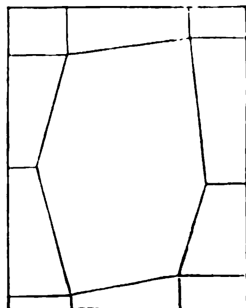
3. Für die Bestimmung der Flächeninhalte beliebiger Polygone ist es überhaupt nicht nöthig, dieselben in Dreiecke zu zerlegen; kommen neben solchen oder ausschliesslich andere Theilfiguren vor, für deren Inhaltsberechnung im Vorstehenden Regeln ermittelt sind, also z. B. Trapeze, so steht der Anwendung derselben an Stelle von Dreiecken nichts im Wege. Dies führt auf einige besondere Methoden für die Inhaltsbestimmung von Polygonen:



Man ziehe eine beliebige Gerade AB innerhalb oder ausserhalb des Polygons und fälle auf dieselbe von allen Eckpunkten des letzteren die Senkrechten. Hierdurch erhält man eine Anzahl von Trapezen, von denen auch einzelne (ACD, AEF) sich auf Dreiecke reduciren können. Die Höhen AD, AF, DG u. s. w. aller dieser Theilfiguren lassen sich im Fortschreiten auf der einzigen Geraden AB messen, die Grundlinien und die parallelen Seiten (CD, EF, HG u. s. w.) lassen sich sämmtlich als Senkrechte zu dieser Geraden abstecken und messen, und das Polygon erscheint als algebraische Summe aller Theilfiguren.



Man kann ferner mehrere solche Gerade, wie AB, neben einander benutzen und beispielsweise die zu messende Figur mit einer zweiten, etwa einem Rechteck, umgeben. Fällt man von den Eckpunkten der ersteren in zweckentsprechender Weise Senkrechte auf Seiten der letzteren Figur, so kann man jene als Differenz der Fläche der letzteren und einer Anzahl von Trapezen, oder auch Parallelogrammen und Dreiecken darstellen und berechnen. Dieses Verfahren empfiehlt sich in der Praxis, wenn das Innere der zu messenden Fläche unzugänglich ist.



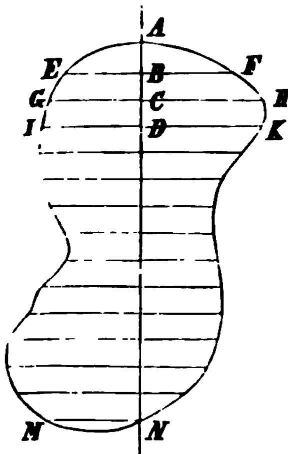
4. Die verschiedenen Wege, den Flächeninhalt eines Polygons zu bestimmen, lassen sich endlich auch zu einer näherungsweisen Ermittelung der Grösse krummliniger oder gemischtliniger Figuren verwerthen. Dieses Verfahren kommt im Wesentlichen darauf hinaus, dass man eine krumme Linie näherungsweise durch eine gebrochene ersetzen darf, deren einzelne geradlinige Theile hinreichend klein sind, um ohne Ueberschreitung der für die praktische Anwendung im Resultat erlaubten Fehlergrenze mit den entsprechenden Theilen der krummen Linie verwechselt werden zu dürfen.

Man kann also beispielsweise zur angenäherten Inhaltsbestimmung einer krummlinigen Figur in dieselbe eine geradlinige zeichnen, deren Umfang sich demjenigen der ersteren mehr oder minder annähert, die ausserhalb der geradlinigen fallenden Theile der krummlinigen Figur durch geeignete Senkrechte auf die nächste gerade Linie in kleinere Stücke zerlegen, welche man ohne merklichen Fehler als Trapeze betrachten darf, und schliesslich die Summe der Inhalte aller dieser Trapeze zum Inhalt der geradlinigen Figur addiren.

Man kann entsprechend die Seiten des Polygons so ziehen, dass sie die zu messende Figur einschliessen, und hat dann die Summe der Trapeze von dem Inhalt des Polygons zu subtrahiren.

Man wird in beiden Fällen die Berechnung oft dadurch vereinfachen können, dass man die auf den betreffenden Polygonseiten zu messenden Höhen der einzelnen kleinen Trapeze gleich gross annimmt.

Zieht man durch die Figur eine Gerade und sodann ein System zu dieser senkrechter Linien, welche so nahe aneinanderliegen, bezw. durch solche hervorragende Punkte des Umfangs der Figur gehen, dass man die zwischen ihnen liegenden Flächenstreifen als Trapeze ansehen darf, so hat man nur alle diese Trapeze zu berechnen und ihre Inhalte zu addiren. Dabei hat man den Vortheil, dass in jeder jener senkrechten Geraden eine Seite gleichzeitig für zwei Trapeze gemessen wird, und dass alle Höhen auf einer und derselben Geraden nach einander abgetragen sind. Macht man auch hier diese Höhen AB, BC, CD u. s. w. gleich gross, und sind a, b, c . . . w der Reihe nach die Maasszahlen der Senkrechten EF, GH, IK, . . . MN, während h die Maasszahl der Höhen AB, BC u. s. w. ist, so hat man für den gesuchten Inhalt der Figur



$$F = \tfrac{1}{2} a h + \tfrac{1}{2}(a+b) h + \tfrac{1}{2}(b+c) h + \ldots + \tfrac{1}{2} w \cdot h$$
$$= \tfrac{1}{2} h \cdot (2a + 2b + 2c + \ldots\ldots + 2w)$$
$$= (a + b + c + \ldots + w) h.$$

Beispiele: 1. Den Flächeninhalt eines Trapezes aus den parallelen Seiten $a = 3{,}4$, $b = 1{,}8$ und der Höhe $h = 2{,}5$ zu berechnen.

Auflösung: $F = \frac{3{,}4 + 1{,}8}{2} \cdot 2{,}5 = 2{,}6 \cdot 2{,}5 = 6{,}5.$

2. Wie lang ist die Mittellinie eines Trapezes, dessen Flächeninhalt $F = 12{,}74$, und dessen Höhe $h = 3{,}16$ ist? Auflösung: $\frac{F}{h} = 4{,}03.$

3. Die parallelen Seiten eines Trapezes seien $a = 0{,}12$, $b = 3{,}45$ gegeben, und der Flächeninhalt desselben sei $F = 12{,}58$. Wie lang ist die Höhe des Trapezes? Auflösung: $\frac{2F}{a+b} = \frac{25{,}16}{3{,}57} = 7{,}05$.

4. Von einem Trapez sei der Inhalt F, die Höhe h und die Differenz d der parallelen Seiten gegeben; man berechne diese Seiten. Beispiel: $F = 36{,}12$; $h = 2{,}80$; $d = 0{,}80$. Auflösung: Aus $a + b = \frac{2F}{h}$, $a - b = d$ folgt $a = \frac{1}{2}\left(\frac{2F}{h} + d\right)$ $= \frac{F}{h} + \frac{d}{2}$, $b = \frac{F}{h} - \frac{d}{2}$, also $\frac{36{,}12}{2{,}80} \pm 0{,}40 = 12{,}90 \pm 0{,}40$, d. i. $a = 13{,}30$, $b = 12{,}50$.

5. Eine Diagonale eines Vierecks sei 27 cm lang, und der eine ihr nicht anliegende Eckpunkt stehe von derselben um 12 cm, der andere um 18 cm ab. Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks. Auflösung: $F = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 18 = \frac{1}{2} \cdot 27\,(12 + 18) = 27 \cdot 15 = 405$.

6. In einem Fünfeck $ABCDE$ seien die Diagonalen $AC = 7{,}5$ m, $AD = 8{,}2$ m, die Abstände der Eckpunkte B und D von AC bezüglich gleich 3,2 m und 4,6 m, der Abstand des Eckpunktes E von AD gleich 2,5 m gemessen. Wie gross ist das Fünfeck? Auflösung: $\frac{1}{2}(7{,}5 \cdot 3{,}2 + 7{,}5 \cdot 4{,}6 + 8{,}2 \cdot 2{,}5) = 7{,}5 \cdot 3{,}9 + 4{,}1 \cdot 2{,}5 = 39{,}5$.

7. Man berechne den Flächeninhalt eines Polygons $ABCDEFG$, wenn die (sämmtlich ganz innerhalb des Polygons fallenden) von den Eckpunkten auf die Gerade AE gefällten Senkrechten $BB_1 = 3{,}5$, $CC_1 = 5{,}6$, $DD_1 = 4{,}0$, FF_1 5,4, $GG_1 = 8{,}2$ und die zugehörigen Abschnitte von AE, $AB_1 = 5{,}1$, $B_1C_1 = 5{,}6$, $C_1D_1 = 6{,}0$, $D_1E = 4{,}0$, $EF_1 = 3{,}1$, $AG_1 = 3{,}8$ gemessen sind. Auflösung:

$$\tfrac{1}{2}[5{,}1 \cdot 3{,}5 + (3{,}5 + 5{,}6) \cdot 5{,}6 + (5{,}6 + 4{,}0) \cdot 6{,}0 + 4{,}0 \cdot 4{,}0 + 5{,}4 \cdot 3{,}1 + (8{,}2 + 5{,}4) \cdot 13{,}8 + 8{,}2 \cdot 3{,}8] = 189{,}0.$$

8. Zu einer Seite AB eines Polygons $ABC \ldots K$ sei durch jeden der übrigen Eckpunkte, mit Ausnahme von G, die Parallele bis zum zweiten Durchschnitt mit dem Umfang des Polygons gezogen, und man habe die Seite AB nebst ihren Parallelen, wie folgt, gemessen: $AB = 3{,}01$ m, $CC_1 = 7{,}53$ m, $DD_1 = 2{,}57$ m, $EE_1 = 2{,}59$ m, $FF_1 = 1{,}24$ m, $HH_1 = 3{,}88$ m, $II_1 = 2{,}02$ m, $KK_1 = 8{,}22$ m. G sei die Spitze eines Dreiecks GFF_1. Es seien ferner auf einer zu AB senkrechten Geraden die Abstände der einzelnen Parallelen von dem Durchschnittspunkt der Senkrechten und der Seite AB, wie folgt, bestimmt worden: Für CC_1 0,22 m, DD_1 8,76 m, EE_1 9,32 m, FF_1 17,84 m, HH_1 13.44 m, II_1 10,12 m, KK_1 5,28, für G 18,00 m. Man berechne den Flächeninhalt des Polygons. Resultat: 84,23 qm.

9. Durch vier Eckpunkte A, B, C, F eines Polygons sind gerade Linien gelegt worden, sodass dieselben ein das Polygon völlig einschliessendes Rechteck $MNPQ$ begrenzen. A liege auf MN, B auf NP, C auf PQ, F auf QM. Von D und G seien auf MQ die ganz innerhalb des Rechteckes fallenden Senkrechten DD_1, GG_1 gefällt. Man berechne den Flächeninhalt des Polygons $ABCDFG$ aus folgenden gemessenen Stücken: $AN = 0{,}32$ m, $NB = 0{,}24$ m, $BP = 8{,}12$ m, $PC = 0{,}74$ m, $CQ = 0{,}98$ m, $QD_1 = 0{,}12$ m, $DD_1 = 0{,}22$ m, $DF = 5{,}16$ m, $FG_1 = 3{,}00$ m, $GG_1 = 0{,}08$ m. Resultat: 10,52 qm.

§ 44. Weitere Sätze über die Flächen geradliniger Figuren.

1. Im Folgenden soll von den bisher erörterten Methoden der Bestimmung der Flächeninhalte geradliniger Figuren zunächst Gebrauch gemacht werden zur Ermittelung der Beziehungen zwischen den Flächen solcher Figuren, welche

Grundlinien bez. gleich a und b, und in denen gleichzeitig die Höhe gleich h ist. Daher ist der Inhalt des Trapezes

$$F = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Der Inhalt eines jeden Trapezes ist also gleich der Hälfte des Produkts aus der Höhe und aus der Summe der parallelen Seiten (1), oder was dasselbe ist, gleich dem Produkt aus der Höhe und dem arithmetischen Mittel der parallelen Seiten, oder gleich dem Produkt aus der Höhe und der Mittellinie.

Es ist von Interesse, schon hier zu sehen, wie man aus Formeln, wie die vorstehende, ohne Weiteres neue Lehrsätze herauslesen kann. So ergeben sich hier unter Beachtung der vorhergegangenen Sätze von den Flächen der Dreiecke und Parallelogramme leicht die folgenden:

Jedes Trapez ist gleich jedem Dreieck mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Summe der parallelen Seiten des Trapezes ist.

Jedes Trapez ist gleich jedem Parallelogramm mit gleicher Höhe, dessen Grundlinie gleich der Mittellinie des Trapezes ist.

Mit Hülfe möglichst einfacher Construction eines solchen Dreiecks oder Parallelogramms lassen sich diese Sätze auch unmittelbar beweisen, indem man zeigt, dass man, um aus dem Trapez die andere Figur zu erhalten, von jenem ein Dreieck abzuschneiden und dafür ein congruentes anzusetzen habe. Man könnte auf diesem Wege umgekehrt aus einem der Sätze die obige Regel über den Flächeninhalt ableiten. Die nähere Ausführung dieser Gedanken kann dem Leser überlassen bleiben.

2. Lässt sich in eine Figur ein Kreis beschreiben, mit anderen Worten besitzt dieselbe einen Punkt — den Mittelpunkt des Kreises — welcher von allen Seiten gleichweit entfernt ist, so verbinde man diesen Punkt mit allen Eckpunkten und zerlege so die Figur in Dreiecke, welche bez. die einzelnen Seiten zu Grundlinien haben, und in deren jedem die Höhe gleich dem Radius des einbeschriebenen Kreises ist. Bezeichnen wir die Maasszahl des letzteren durch ρ, die der Seiten der Reihe nach durch $a, b, c, \ldots$, so ist hiernach der Inhalt der Figur,

$$F = \frac{1}{2} a\rho + \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} c\rho + \ldots = \frac{1}{2}(a + b + c + \ldots)\rho,$$

oder wenn wir die Summe $a + b + c + \ldots$ der Seiten, oder den Umfang der Figur durch u bezeichnen,

$$F = \frac{1}{2} u\rho.$$

Der Inhalt einer solchen Figur ist also gleich dem halben Produkt aus ihrem Umfang und dem Radius des einbeschriebenen Kreises. (2)

Auch hier kann man aus dem Satze ohne Weiteres den andern folgern, dass jede solche Figur gleich einem Dreiecke ist, dessen Grundlinie dem Umfang und dessen Höhe dem Radius derselben gleich ist.

Der vorstehende Satz findet besondere Anwendungen bei den regelmassigen Polygonen und bei den Dreiecken. Bei einem regelmässigen Polygon kann der Umfang u noch durch das Produkt der Maasszahl a einer Seite mit der Anzahl der Seiten ausgedrückt, und die obige Formel somit

$$F = \frac{1}{2} na\rho$$

geschrieben werden. Bei einem Dreieck pflegt man die Summe der drei Seiten durch $2s$ zu bezeichnen, und es geht dann die obige Formel in

$$F = \rho s$$

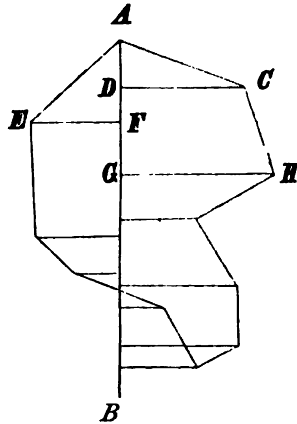
über. Dieselbe gestattet noch eine Ergänzung, indem man statt des Mittelpunktes

des einbeschriebenen Kreises den Mittelpunkt eines der drei äusseren Berührungskreise mit den Eckpunkten des Dreiecks verbindet und so die Fläche des letzteren als algebraische Summe der Flächen dreier Dreiecke darstellt, von denen eins ausserhalb des ursprünglichen liegt und daher von der Summe der beiden andern zu subtrahiren ist. Diese drei Dreiecke haben wieder der Reihe nach die Seiten des ursprünglichen zu Grundlinien, und die zugehörigen Höhen sind sämmtlich gleich dem Radius des Berührungskreises. Bezeichnet man die Maasszahlen der den Seiten a, b, c, anbeschriebenen äusseren Berührungskreise der Reihe nach durch ρ_a, ρ_b, ρ_c, so erhält man hiernach für den Flächeninhalt des Dreiecks noch die drei Formen

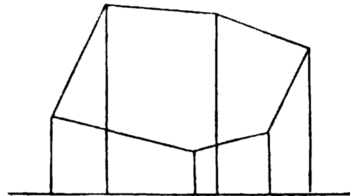
$$F = \tfrac{1}{2}(b + c - a)\,\rho_a = \tfrac{1}{2}(a - b + c)\,\rho_b = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\,\rho_c\,,$$
$$\text{oder } F = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c)\,.$$

Diese Ableitung zeigt an einem Beispiel, wie man überhaupt bei Polygonen die Zerlegung in Dreiecke auch durch Verbindung von ausserhalb der Flächen der Polygone liegenden Punkten mit Eckpunkten bewirken kann, wenn man dabei die Inhalte der ganz ausserhalb der zu messenden Figuren fallenden Dreiecke als subtractiv annimmt.

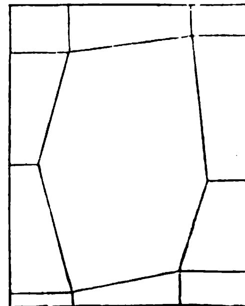
3. Für die Bestimmung der Flächeninhalte beliebiger Polygone ist es überhaupt nicht nöthig, dieselben in Dreiecke zu zerlegen; kommen neben solchen oder ausschliesslich andere Theilfiguren vor, für deren Inhaltsberechnung im Vorstehenden Regeln ermittelt sind, also z. B. Trapeze, so steht der Anwendung derselben an Stelle von Dreiecken nichts im Wege. Dies führt auf einige besondere Methoden für die Inhaltsbestimmung von Polygonen:



Man ziehe eine beliebige Gerade AB innerhalb oder ausserhalb des Polygons und fälle auf dieselbe von allen Eckpunkten des letzteren die Senkrechten. Hierdurch erhält man eine Anzahl von Trapezen, von denen auch einzelne (ACD, AEF) sich auf Dreiecke reduciren können. Die Höhen AD, AF, DG u. s. w. aller dieser Theilfiguren lassen sich im Fortschreiten auf der einzigen Geraden AB messen, die Grundlinien und die parallelen Seiten (CD, EF, HG u. s. w.) lassen sich sämmtlich als Senkrechte zu dieser Geraden abstecken und messen, und das Polygon erscheint als algebraische Summe aller Theilfiguren.



Man kann ferner mehrere solche Gerade, wie AB, neben einander benutzen und beispielsweise die zu messende Figur mit einer zweiten, etwa einem Rechteck, umgeben. Fällt man von den Eckpunkten der ersteren in zweckentsprechender Weise Senkrechte auf Seiten der letzteren Figur, so kann man jene als Differenz der Fläche der letzteren und einer Anzahl von Trapezen, oder auch Parallelogrammen und Dreiecken darstellen und berechnen. Dieses Verfahren empfiehlt sich in der Praxis, wenn das Innere der zu messenden Fläche unzugänglich ist.



3. Construirt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks ein Quadrat und theilt jedes derselben mittelst der aus dem gegenüberliegenden Eckpunkt senkrecht zur Seite gezogenen Geraden in zwei Rechtecke (von denen bei einem rechtwinkeligen Dreieck zwei verschwinden, bei einem stumpfwinkeligen zwei ausserhalb der betreffenden Quadrate fallen), so erhält man durch wiederholte Anwendung des vorigen Satzes den folgenden:

Das Quadrat einer Seite eines Dreiecks ist immer gleich der Differenz aus der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten und dem doppelten Rechteck aus einer dieser letzteren Seiten und der Projection der anderen auf dieselbe, sofern man die Flächen von ausserhalb der betreffenden Quadrate fallenden Rechtecken als negativ annimmt (3).

Dieser Satz heisst der allgemeine pythagoreische Lehrsatz. Liegt insbesondere die erstgenannte Seite einem spitzen Winkel gegenüber, so ist das doppelte Rechteck von der Summe der beiden Quadrate zu subtrahiren, liegt sie einem stumpfen Winkel gegenüber, so verwandelt sich diese Subtraction in die entsprechende Addition der (absoluten Werthe der) Flächen, liegt sie endlich einem rechten Winkel gegenüber, so werden letztere gleich Null, und man erhält den besonderen pythagoreischen Lehrsatz.

Der letztere ergiebt sich überhaupt aus dem allgemeinen, wenn irgend ein Winkel ein rechter ist, jedoch erhält man ihn, wenn die erste Seite einem der spitzen Winkel gegenüberliegt, in der Form:

Das Quadrat jeder Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich der Differenz aus dem Quadrat der Hypotenuse und dem Quadrat der andern Kathete,

welche Form sich selbstverständlich auch unmittelbar ableiten lässt. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz zeigt ferner, dass der besondere nur für rechtwinkelige Dreiecke gilt, oder mit anderen Worten, dass auch die Umkehrung desselben richtig ist. Man kann auch diese in die beiden Formen fassen:

Ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Differenz der Quadrate der beiden anderen Seiten, so ist der Winkel, welcher der erstern Seite gegenüberliegt, ein rechter, und

ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so ist der Winkel, welcher der grössern der letzteren Seiten gegenüberliegt, ein rechter.

4. Allgemein gilt die Umkehrung: Je nachdem das Quadrat einer Seite eines Dreiecks kleiner, ebenso gross oder grösser ist als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, ist der der erstern gegenüberliegende Winkel ein spitzer, rechter oder stumpfer. (4)

Der Beweis ergiebt sich ohne Weiteres auf indirektem Wege durch Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes.

Die vorstehenden Sätze lassen sich in arithmetischer Form darstellen, indem man statt der Flächen der vorkommenden Figuren die nach den betreffenden früheren Lehrsätzen bestimmten Maasszahlen derselben setzt. Man hat zu dieser Darstellung nur nöthig, in den vorstehenden Sätzen das Wort Quadrat, statt im geometrischen Sinn, im arithmetischen, also als zweite Potenz zu verstehen, bezw. das Wort Rechteck durch Produkt zu ersetzen. Sind a und b die Maasszahlen der Katheten, und ist c die Maasszahl der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ist also in Formel:

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = c^2, \text{ oder } c^2 - b^2 = a^2$$

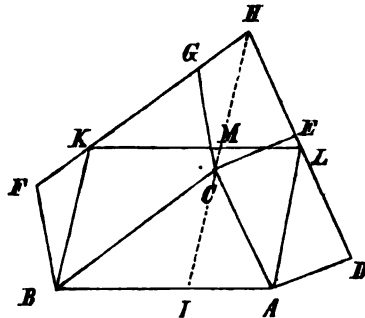
und sind allgemein a, b, c die Maasszahlen der Seiten eines beliebigen Dreiecks, p die der Projection von a auf b, so ist

$$(2) \qquad c^2 = a^2 + b^2 \mp 2\,bp,$$

wobei das Vorzeichen — oder + zu nehmen ist, je nachdem die Seite c einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Die Formel (1) des pythagoreischen Lehrsatzes gestattet die Berechnung der Länge jeder Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den gegebenen beiden andern. Näheres hierüber in § 48, für welche Stelle auch die Ergänzung des Vorstehenden durch sich anschliessende weitere Sätze vorbehalten bleiben mag. Nur noch der folgende hierhergehörige Satz, welcher unter dem Namen des Lehrsatzes des PAPPUS bekannt ist, möge als ein Beispiel weiterer Entwicklungen hier eine Stelle finden:

5. Construirt man über jeder von zwei Seiten BC, CA eines Dreiecks ABC nach aussen Parallelogramme $BCGF$, $CADE$, verlängert die jenen Seiten parallelen DE, FG bis zu ihrem Durchschnittspunkt H, zieht durch H und den Eckpunkt C die Gerade, welche BA in I schneiden möge, zieht man ferner BK bis zum Durchschnittspunkt K mit FH, und AL bis zum Durchschnittspunkt L mit DH, beide parallel zu HI, und verbindet man endlich K mit L, so ist BK der Linie AL gleich und parallel, da beide der Strecke HC parallel und als Parallele zwischen Parallelen derselben auch gleich sind. Hieraus folgt, dass $ABKL$ ebenfalls ein Parallelogramm ist. Dasselbe zerfällt durch die Gerade HI in zwei Theil-Parallelogramme $BKMI$ und $MLAI$, von denen das erstere mit $KBCH$ dieselbe Grundlinie KB hat und zwischen denselben Parallelen KB und HI liegt. Das Parallelogramm $KBCH$ aber hat mit $BCGF$ dieselbe Grundlinie BC und liegt mit ihm zwischen denselben Parallelen BC und FH. Da hiernach $BKMI = KBCH$ und $KBCH = BCGF$, so ist auch $BKMI = BCGF$. In ganz entsprechender Weise kann gezeigt werden, dass $MLAI = LACH = CADE$ ist. Daher muss auch



$$BKMI + MLAI = BCGF + CADE,$$

d. h. das Parallelogramm über BA muss gleich der Summe der Parallelogramme über den Seiten BC und CA sein. (5)

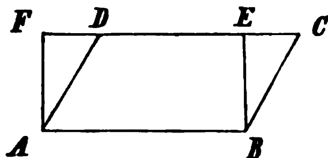
Ist hierbei insbesondere der Winkel BCA ein rechter, und sind die über BC und CA construirten Parallelogramme Quadrate, so wird auch das Parallelogramm über BA ein Quadrat, und man erhält auf diese Weise wieder den pythagoreischen Lehrsatz.

§ 45. Verwandlungs-Aufgaben.

1. Die Sätze der § 41—44 finden eine wichtige Anwendung bei der Lösung von Aufgaben, welche die Verwandlung einer gegebenen Figur in eine andere von gleichem Inhalt verlangen, die ausserdem gewissen weiteren gegebenen Bedingungen entspricht. Im Folgenden soll unter »Verwandlung« einer Figur schlechthin immer die Construction einer derselben an Flächeninhalt gleichen Figur verstanden werden.

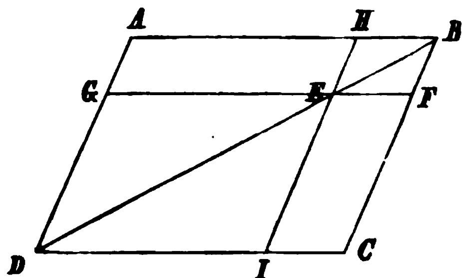
Der Satz, dass Parallelogramme über derselben Grundlinie und zwischen

denselben Parallelen gleich sind, lehrt ohne Weiteres, wie man ein Parallelogramm in ein anderes Parallelogramm verwandeln kann, welches einen gegebenen Winkel hat. Ist insbesondere der an die Grundlinie der gegebenen Figur *ABCD*, etwa in *A*, anzulegende gegebene Winkel ein rechter, so hat man die Lösung der Aufgabe, ein gegebenes schiefwinkeliges Parallelogramm in ein rechtwinkeliges (*ABEF*) zu verwandeln.



In ähnlicher Weise lässt sich ein gegebenes Parallelogramm *ABCD* in ein Parallelogramm verwandeln, welches eine Seite von gegebener Länge hat, indem man mit letzterer um *A* einen Kreisbogen beschreibt, den Durchschnittspunkt desselben und der Seite *DC* oder der Verlängerung derselben mit *A* verbindet, und die Verbindungslinie nebst *AB* zu Seiten des gesuchten Parallelogramms nimmt. Diese Construction setzt jedoch voraus, dass der genannte Kreisbogen die der Grundlinie parallele Gerade schneide oder berühre, also dass die gegebene Seite nicht kleiner sei als die Höhe, oder genauer — da man jede Seite von *ABCD* zur Grundlinie annehmen kann — nicht kleiner als die kleinere der beiden Höhen des gegebenen Parallelogramms. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist zwar die vorstehende Construction, nicht aber die Lösung der Aufgabe selbst unmöglich. Man könnte dann etwa *ABCD* zuerst auf die angegebene Weise in ein Parallelogramm mit einer beliebig, aber so lang angenommenen Seite verwandeln, dass die zu dieser Seite als Grundlinie gehörige Höhe kleiner als die gegebene Strecke würde, und dann mit Beibehaltung dieser Grundlinie das zweite Parallelogramm in ein drittes, welches die gegebene Seite hat. Einfacher erscheint noch eine andere Lösung, welche in allen Fällen ausführbar ist, und sich auf folgenden Lehrsatz stützt:

Zieht man in einem Parallelogramm eine Diagonale und durch einen beliebigen Punkt derselben die Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms, so sind von den entstehenden Theil-Parallelogrammen die beiden, welche von der Diagonale nicht durchschnitten werden, inhaltsgleich. (1)



Da nämlich jede Diagonale eines Parallelogramms dasselbe in zwei congruente und also auch inhaltsgleiche Theile theilt, so ist in nebenstehender Figur

$\triangle ABD = \triangle BDC$; $\triangle GED = \triangle EDI$; $\triangle HBE = \triangle BEF$,

also auch $ABD - GED - HBE = BDC - EDI - BEF$,

d. i. $AHEG = EFCI$.

Man erhält noch zwei Paare gleich grosser Parallelogramme in derselben Figur, wenn man zu jedem der vorigen dieselbe Fläche *HEFB* oder *GEID* hinzufügt, d. h. es ist auch

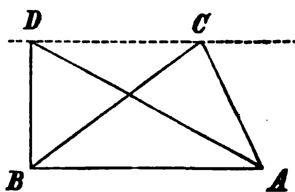
$$ABFG = HBCI \text{ und } AHID = GFCD.$$

Die Anwendung dieses Satzes zur Verwandlung eines gegebenen Parallelogramms, z. B. *AHEG*, in ein gleich grosses *EFCI*, welches eine Seite *EF* von gegebener Länge hat, bedarf keiner weitern Erläuterung. Ebenso sieht man leicht ein, dass bei dieser Lösung das gesuchte Parallelogramm immer

noch die weitere Eigenthümlichkeit besitzt, dass es die gleichen Winkel wie das gegebene hat.

Man kann nun auch ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes verwandeln, welches sowol einen gegebenen Winkel als eine (der Länge nach) gegebene Seite hat. Entweder verwandele man das erste zunächst in ein solches, welches die gegebene Seite hat, und dann dieses unter Beibehaltung der leztern Seite als Grundlinie in ein solches, welches ausserdem den gegebenen Winkel hat, oder man verwandele zuerst das Parallelogramm in ein solches, welches den gegebenen Winkel besitzt und sodann dieses auf dem soeben gezeigten Wege in ein drittes, welches ohne Veränderung der Grösse der Winkel auch die gegebene Seite hat.

2. Zu jeder der vorstehenden Aufgaben lässt sich eine entsprechende über Dreiecke bilden. Der Satz, dass Dreiecke über derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen gleich sind, liefert unmittelbar die Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC in ein anderes ABD zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel (DBA) hat, und also auch insbesondere der Aufgabe, ein gegebenes schiefwinkeliges Dreieck in ein rechtwinkeliges zu verwandeln. Ebenso erhält man ein Dreieck, welches einem gegebenen ABC gleich ist und eine Seite von gegebener Länge hat, indem man mit einem Radius von dieser Länge um B den Kreis beschreibt, durch C zu AB die Parallele zieht und den Durchschnittspunkt D der letztern und des Kreises mit A und B verbindet. Hierbei ist vorauszusetzen, dass die gegebene Seite nicht kleiner als die kleinste der drei Höhen des Dreiecks ABC sei. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man ABC zuerst in ein Dreieck verwandeln, welches eine Seite von solcher — im Uebrigen beliebiger — Länge hat, dass die zu dieser Seite als Grundlinie gehörige Höhe nicht grösser als die gegebene Seite ist; dieses zweite Dreieck kann dann in ein drittes verwandelt werden, welches der Aufgabe entspricht. Man kann ferner ein gegebenes Dreieck in ein anderes verwandeln, sodass beide in einem Winkel übereinstimmen, indem man das erstere mittelst zweier Parallelen zu einem doppelt so grossen Parallelogramm ergänzt, dieses auf die vorher gezeigte Weise in ein anderes mit gleichen Winkeln verwandelt und letzteres wieder durch eine Diagonale halbirt. Man hat dabei nur darauf zu sehen, dass in jeder der Figuren der vorgeschriebene Winkel enthalten ist. Man kann endlich auch ein Dreieck in ein anderes Dreieck verwandeln, welches sowol eine gegebene Seite, als einen gegebenen Winkel enthält, indem man ähnlich wie in der entsprechenden Aufgabe für das Parallelogramm die beiden Bedingungen nach einander erfüllt.



Um ferner ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln, hat man nur nöthig, ein Dreieck von derselben Höhe aber doppelt so langer Grundlinie oder ein solches von derselben Grundlinie aber doppelt so langer Höhe zu zeichnen, und um umgekehrt ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, nehme man entweder die Hälfte der Grundlinie des erstern und dieselbe Höhe, oder die Hälfte der Höhe und dieselbe Grundlinie. Die nähere Ausführung dieser Constructionen wird keiner weitern Erörterung bedürfen, ebenso wie diejenige für die fernere Aufgabe, ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

3. Die Thatsache, dass man jedes Dreieck durch jedes andere über derselben

Grundlinie und zwischen denselben Parallelen ersetzen kann, ohne dadurch den Flächeninhalt zu ändern, führt auch zu einer Lösung der Aufgabe:

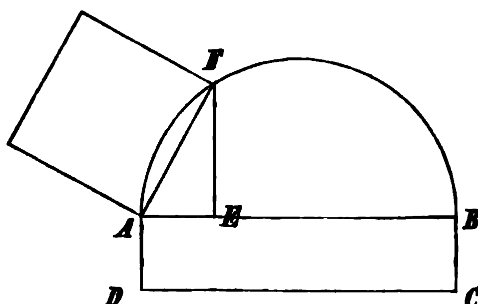
Ein gegebenes Polygon in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Man hat dazu nur nöthig durch eine Diagonale ein Dreieck von dem Polygon abzuschneiden und das abgeschnittene durch ein neues, gleiches zu ersetzen, welches die Diagonale zur Grundlinie und eine Seite in der Richtung einer anstossenden Polygonseite hat.

Da man mit dem so erhaltenen neuen Polygon auf dieselbe Weise verfahren kann, so erhält man durch wiederholte Anwendung dieser Aufgabe die Lösung der anderen: Ein gegebenes Polygon in ein Dreieck zu verwandeln.

Da nun letzteres durch ein gleiches Rechteck ersetzt werden kann, so erscheint auch die Aufgabe, ein Polygon in ein Rechteck zu verwandeln, als gelöst.

4. Der zum Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes gebrauchte Satz von der Gleichheit des Quadrates einer Kathete und des Rechtecks aus der Projection dieser Kathete auf die Hypotenuse und dieser Hypotenuse zeigt ferner einen Weg, auf welchem sich jedes gegebene Rechteck in ein Quadrat verwandeln lässt. Man trage z. B. auf einer der längeren Seiten des Rechtecks, auf AB, eine Strecke AE gleich der kürzeren AD ab, errichte in E auf AB die Senkrechte, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis, verbinde den Durchschnittspunkt F des letzteren und der Senkrechten mit A und construire über AF als Seite ein Quadrat, so ist dieses das verlangte. Denn verbindet man noch F mit B, so ist der Winkel AFB als Peripheriewinkel in einem Halbkreis ein rechter, also das Dreieck AFB ein rechtwinkeliges, und die unmittelbare Anwendung des oben citirten Satzes zeigt die Richtigkeit der Behauptung.



Da man nun jedes Polygon in ein Rechteck und dieses wieder in ein Quadrat verwandeln kann, so erscheint auch die Aufgabe als gelöst, jedes beliebige Polygon in ein Quadrat zu verwandeln.

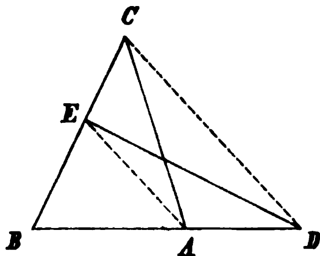
Da hiermit das Polygon auf eine Figur zurückgeführt ist, deren Grösse sich am leichtesten mit derjenigen der als Flächenmaass dienenden Figur durch die Anschauung, wie durch die Messung vergleichen lässt, da also dieses Quadrat gewissermaassen die Grösse der Fläche jenes Polygons geometrisch (statt der früher gelehrten arithmetischen Bestimmung) angiebt, so kann man sagen, mit der vorstehenden Aufgabe sei die Inhaltsbestimmung geradliniger Figuren durch Construction gelöst. Man bezeichnet diese Inhaltsbestimmung, also die Verwandlung einer Figur in ein Quadrat, auch kurz als die Quadratur jener Figur.

5. Die Zahl der Verwandlungsaufgaben geradliniger Figuren lässt sich durch Aufstellung verschiedener Bedingungen, welche die zu suchende Figur erfüllen soll, noch sehr erheblich vermehren.

Wir fügen den vorstehenden noch eine Auswahl solcher Aufgaben hinzu, welche in den Anwendungen häufig gebraucht werden.

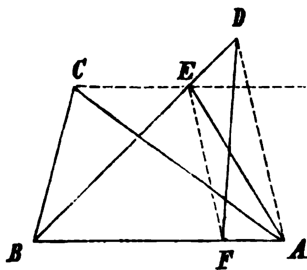
Die schon früher gelöste Aufgabe, ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches mit jenem einen gleichen Winkel und ausserdem eine gegebene Seite hat, kann auch in folgender Weise gelöst werden:

Man trage auf einem der Schenkel des betreffenden Winkels B des gegebenen Dreiecks ABC eine Strecke BD gleich der verlangten Seite ab, ziehe DC, dann AE parallel zu DC und verbinde den Durchschnittspunkt E dieser Parallelen und der Seite BC mit D; dann ist BED das verlangte Dreieck. Diese Auflösung beruht auf dem Principe, dass der Flächeninhalt einer Figur, hier des Dreiecks BCA, nicht geändert wird, wenn man von derselben ein Dreieck CEA abschneidet und dafür ein anderes, gleichgrosses Dreieck EAD, also am Einfachsten ein solches, welches mit dem abgeschnittenen dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ansetzt. Die vorstehende Auflösung der gestellten Aufgabe gilt sowol, wenn die gegebene Seite länger als diejenige (BA) ist, in deren Richtung sie abgetragen wurde, als wenn sie (wie z. B. BE auf BC) kürzer als dieselbe ist.



Es zeigt die vorstehende Aufgabe unmittelbar, wie man ein gegebenes Dreieck in ein anderes verwandeln kann, welches mit jenem einen Winkel gemeinschaftlich und ausserdem eine Grundlinie BD von gegebener Länge, oder auch eine gegebene Höhe hat. Im letzteren Falle bestimmt man zunächst mittelst dieser Höhe durch eine Parallele zur Grundlinie BA den Punkt E auf BC oder deren Verlängerung.

Man kann hiernach ferner jedes Dreieck in ein anderes verwandeln, dessen Grundlinie mit einer bestimmten Seite des ersteren in derselben Geraden, und dessen Spitze in einem beliebig gegebenen Punkte liegt. Ist nämlich AB die betreffende Seite des gegebenen Dreiecks ABC, D der für die Spitze des gesuchten gegebene Punkt, so kann man znerst mittelst der durch C zu BA gelegten Parallelen, welche die Verbindungslinie BD oder deren Verlängerung in E schneide, ABC in das Dreieck ABE verwandeln, dessen Seite BE (oder deren Verlängerung) den Punkt D enthält. Auf dieses letztere wende man eine der obigen analoge Construction an und verwandele es so mittelst DA und der zu dieser parallelen EF in das verlangte Dreieck BDF.



6. Eine andere Gruppe hierhergehöriger Aufgaben findet ihre Auflösungen durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes. Unmittelbar durch denselben einleuchtend und daher einer weiteren Erörterung nicht bedürftig sind die Lösungen der beiden Aufgaben:

Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist, und

ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.

Durch wiederholte Anwendung der ersteren dieser Aufgaben gelangt man zur Construction eines Quadrates, welches gleich der Summe von drei oder mehreren gegebenen Quadraten ist, und wendet man auch die zweite der vor-

stehenden Aufgaben für die subtractiven Glieder an, so kann auch jede vorgeschriebene algebraische Summe gegebener Quadrate durch ein ihr gleiches Quadrat dargestellt werden.

Denken wir uns ferner die einzelnen Quadrate, deren Summe verlangt ist, gleich gross, so erhält man ohne Weiteres aus den vorstehenden Aufgaben die Auflösung der folgenden:

Ein Quadrat zu zeichnen, welches doppelt so gross als ein gegebenes Quadrat ist. — Man findet hier insbesondere, dass die Diagonale des gegebenen gleich der Seite des gesuchten ist.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches dreimal, oder fünfmal so gross als ein gegebenes Quadrat oder allgemein ein verlangtes Vielfaches des letzteren ist.

Hierbei beachte man, dass ein Quadrat, welches 4, 9, . . n^2 mal so gross als ein gegebenes ist, am kürzesten dadurch gefunden wird, dass man seine Seite 2, 3, . . . n mal so gross als die des gegebenen macht. Man wird daher auch um z. B. ein Quadrat zu zeichnen, welches 17 mal so gross ist als ein anderes, am kürzesten zunächst ein solches construiren, welches eine viermal so lange Seite hat als das letztere und dann ein solches, welches gleich der Summe dieses eben construirten und des gegebenen ist. Soll das gesuchte ferner beispielsweise 26 mal so gross sein als das gegebene, so zeigt die Gleichung $26 = 25 + 1$ den kürzesten Weg; für ein 19 mal so grosses kann man ebenso sich der Gleichungen $19 = 16 + 3 = 25 - 6 = 16 + 4 - 1$ u. dgl. m. bedienen.

Durch Umkehrung ergiebt sich ferner die Construction eines Quadrates, welches einem bestimmten aliquoten Theile des gegebenen gleich ist. So erhält man ein Quadrat, welches halb so gross ist als ein gegebenes, indem man die Seite des letzteren zur Diagonale des ersteren annimmt. Die einfachste allgemeine Auflösung der Aufgabe, ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich dem $n$ten Theile eines gegebenen ist, erhält man dadurch, dass man ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Seite des gegebenen Quadrats, und dessen andere Seite gleich dem $n$ten Theile der ersteren ist, in ein gleiches Quadrat verwandelt.

Dass man auch jedes Quadrat in ein Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandeln kann, indem man die Quadratseite zur Kathete und die gegebene Rechteckseite, je nachdem sie grösser oder kleiner als die Quadratseite ist, zur Hypotenuse oder zur Projection jener Kathete auf die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks nimmt, ergiebt sich ebenfalls leicht aus dem betreffenden früheren Lehrsatze.

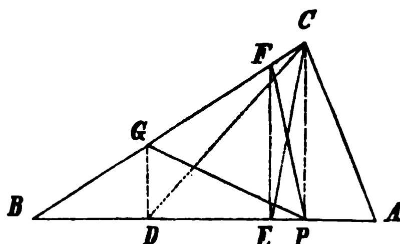
Endlich mag erwähnt werden, dass die Möglichkeit der Verwandlung eines jeden Polygons in ein Quadrat nun auch durch vorstehende Aufgaben die Darstellung von Summen, Differenzen, Vielfachen und aliquoten Theilen beliebiger Polygone in Form der Flächen von Quadraten oder Rechtecken ermöglicht.

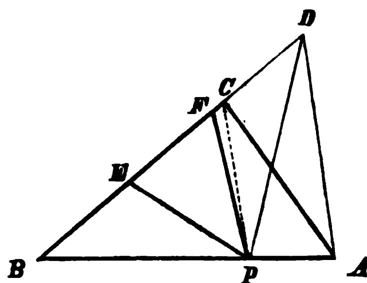
§ 46. Theilungs-Aufgaben.

1. Den Verwandlungs-Aufgaben des vorigen Paragraphen schliessen sich naturgemäss die Theilungs-Aufgaben für Polygone an. Dieselben verlangen, dass durch eine oder mehrere Linien, für welche besondere Bedingungen gestellt sein können, ein oder mehrere Theil-Figuren abgeschnitten werden sollen, deren Flächeninhalte zu demjenigen der gegebenen Figur in vorgeschriebenen Verhältnissen stehen. Für das einfachste Verhältniss der Theile, das der Gleichheit, hat man dann also die Aufgabe, die gegebene Figur in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

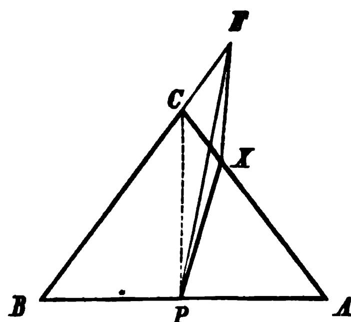
Ein **Dreieck** lässt sich am einfachsten in gleiche Theile theilen, wenn man die Theilungslinien von einem Eckpunkt ausgehen lässt. Man hat dann nur nöthig, die diesem Punkte gegenüberliegende Seite in die verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen, und die Theilpunkte mit jenem Eckpunkt zu verbinden, denn die einzelnen Theile sind dann Dreiecke mit gleichen Grundlinien und derselben Höhe. Auch wenn die Theile des gegebenen Dreiecks nicht gleich gross sein, sondern in irgend einem andern vorgeschriebenen Verhältniss zu einander stehen sollen, ist es am einfachsten, eine Seite in diesem Verhältniss zu theilen und die Theilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt zu verbinden. Die Richtigkeit dieser allgemeineren Construction folgt daraus, dass Dreiecke mit derselben Höhe sich wie ihre Grundlinien verhalten.

Soll ein Dreieck durch Linien getheilt werden, welche nicht von einem Eckpunkt ausgehen, sondern für deren Lagen andere Bedingungen gestellt sind, so kann man zuerst die Theilung in dem verlangten Verhältniss durch Linien der erstern Art vornehmen und dann die Theile in andere verwandeln, durch welche auch jenen Bedingungen genügt wird. Ist z. B. auf einer Seite AB des Dreiecks ein Punkt P gegeben, durch welchen sämmtliche Theilungslinien gehen sollen, und theilt man das Dreieck zunächst durch die vom gegenüberliegenden Eckpunkt C ausgehenden Geraden CD, CE in Theile, welche in den verlangten Grössenverhältnissen stehen, so hat man nur noch C mit P zu verbinden, durch E und D die Parallelen zu CP zu construiren, welche BC bezüglich in F und G schneiden mögen, und schliesslich PF und PG als die verlangten Theilungslinien zu ziehen. Es ist nämlich die Fläche $APFC$ gleich AEC, da beide das Stück ACP gemeinsam haben und die Dreiecke CFP und CEP auf derselben Grundlinie CP und zwischen denselben Parallelen CP und EF liegen. In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die Figur $ACGP$ gleich dem Dreiecke ACD, also auch der Theil FPG gleich CDE sein muss, u. s. w.





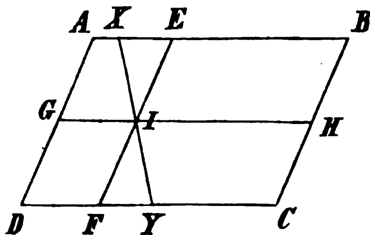
Man kann ferner zuerst das gegebene Dreieck in ein anderes verwandeln, welches dann die bequemere Theilung von einem Eckpunkte aus zulässt. Soll z. B. das Dreieck ABC, wie vorhin, durch Linien, welche von einem auf AB gegebenen Punkte P ausgehen, etwa in drei gleiche Theile getheilt werden, so kann man zuerst ABC mittelst CP und der zu ihr parallelen AD in das gleiche Dreieck BPD verwandeln, dann BD durch E und F in drei gleiche Theile theilen und schliesslich PE und PF als die verlangten Theilungslinien ziehen.



Bei derartigen Constructionen kann es vorkommen, dass eine der gefundenen Linien, z. B. PF, theilweise ausserhalb der zu theilenden Figur ABC fällt. Dann muss die-

selbe durch eine andere PX ersetzt werden, so dass die Flächen BFP und $BCXP$ gleich gross sind und PX ganz innerhalb ABC liegt. Man sieht, dass diese Linie mittelst der Geraden CP und der zu ihr parallelen FX, welche CA in X schneidet, bestimmt werden kann, wie wieder aus der dann leicht nachzuweisenden Gleichheit der Dreiecke CFP und CXP hervorgeht.

2. Die Theilung eines Parallelogramms geschieht am einfachsten durch gerade Linien, welche einer Seite parallel sind und eine anliegende Seite in demselben Verhältniss theilen, in welchem das Parallelogramm getheilt werden soll. Die Theilfiguren sind dann wieder Parallelogramme und müssen sich also bei gleichen Höhen zu einander verhalten wie ihre Grundlinien.



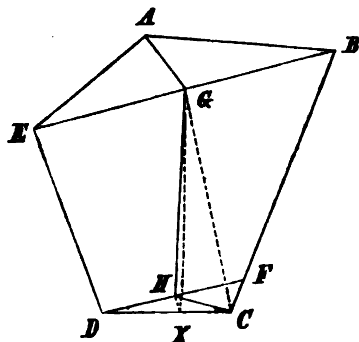
Jede solche Theilungslinie FE eines Parallelogramms $ABCD$ kann ohne Veränderung der Grösse der gebildeten Theile durch jede Gerade XY ersetzt werden, welche zwischen denselben parallelen Seiten AB, DC wie jene und durch den Durchschnittspunkt von EF mit der durch die Halbirungspunkte G, H der beiden anderen Seiten gehenden Mittellinie GH des Parallelogramms gezogen werden kann, denn das von $AEFD$ abgeschnittene Dreieck XEI ist dem angesetzten IYF congruent. Man kann daher, wenn für die Theilungslinien eines Parallelogramms besondere Bedingungen gestellt sind, z. B. dass dieselben zu DC und AB senkrecht stehen, oder dass dieselben sämmtlich durch einen auf AB gegebenen Punkt X gehen sollen u. dgl. m., unmittelbar die Mittellinie GH in dem betreffenden Verhältniss theilen (da $GI = DF$ sein muss) und durch die Theilpunkte die Theilungslinien in der verlangten Weise ziehen. Hierbei ist wieder vorauszusetzen, dass keine der so gefundenen Linien theilweise ausserhalb des gegebenen Parallelogramms falle; ist diese Forderung nicht erfüllt, so ist noch die betreffende Verwandlungsaufgabe behufs Ersatz jener Linie durch eine passende zu lösen.

3. Die Theilung eines Parallelogramms erscheint als besonderer Fall der Theilung eines Trapezes. Zieht man die Mittellinie des letzteren, theilt dieselbe in irgend welchem Verhältniss und zieht durch die Theilpunkte beliebige (einander nicht innerhalb des Trapezes schneidende) Gerade zwischen den parallelen Seiten, so theilen diese Geraden das Trapez in kleinere Trapeze, welche bei der Gleichheit ihrer Höhen sich zu einander verhalten müssen, wie ihre Mittellinien, d. h. wie jene Theile der Mittellinie des ganzen Trapezes. Hieraus ergeben sich ohne Weiteres die Lösungen für die einfacheren Theilungsaufgaben des Trapezes.

Verlängert man die nicht parallelen Seiten eines Trapezes bis zu ihrem Durchschnittspunkt, so erscheint das Trapez als Differenz zweier Dreiecke. Durch geeignete Theilung der letzteren gelangt man auf ein anderes Verfahren der Theilung auch des Trapezes, welches jedoch hier der Kürze halber nur angedeutet sein möge.

4. Um ein Polygon in einer bestimmten verlangten Weise zu theilen, zerlege man dasselbe auf geeignete Weise in Figuren, deren Theilung im Vorigen gelehrt ist, z. B. durch Diagonalen in Dreiecke. Soll z. B. ein Fünfeck $ABCDE$ durch eine von dem Eckpunkt A ausgehende Linie halbirt werden, so kann man die Diagonale EB und durch D zu EB die Parallele DF ziehen, also das Fünf-

eck in die Dreiecke ABE, DCF und das Trapez $EBFD$ zerlegen. Halbirt man nun EB in G und DF in H und zieht die gebrochene Linie $AGHC$, so wird durch diese das Fünfeck halbirt, denn es ist $\triangle AEG = \triangle AGB$, $\triangle DHC = \triangle HFC$ und das Trapez $EGHD$ gleich $GBFH$, da beide gleiche Höhen und in Folge der Gleichheit der homologen parallelen Seiten auch gleiche arithmetische Mittel derselben, also gleiche Mittellinien haben. — Wird aber verlangt, dass die Theilungslinie eine einzige Gerade sei, so kann man die Figur $AGHCDE$ auf entsprechende Weise in eine solche verwandeln, welche zwei Seiten weniger, nämlich statt der drei Seiten AG, GH, HC nur eine hat. Wie dies geschehen kann, ist früher gelehrt worden. In der vorstehenden Figur beispielsweise kann man GC, dann HX parallel zu GC ziehen und X mit G verbinden, dann AX und zu ihr parallel GY, sowie endlich AY als verlangte Theilungslinie ziehen.



5. Das Vorstehende wird genügen, um für die meisten in der Praxis vorkommenden einfacheren Aufgaben der Theilung geradliniger Figuren den Weg zu zeigen. Für andere wird die Lösung mit den erweiterten Hilfsmitteln des folgenden Abschnitts gefunden werden. Für die messende Praxis muss endlich noch die Methode erwähnt werden, nach welcher man zuerst den Flächeninhalt der zu theilenden Figur, wie früher gezeigt, dann aus ihm die Flächeninhalte der verlangten Theile berechnet und dann auf geeignete Weise Flächen von diesen Grössen abschneidet, wobei auch Näherungsmethoden von für das jedesmalige Bedürfniss hinreichender Genauigkeit nicht ausgeschlossen sind.

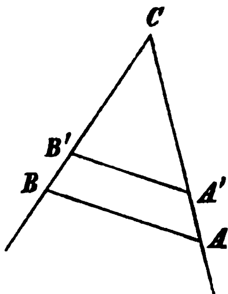
Ist beispielsweise der Inhalt eines Fünfecks, wie das obige, gleich 512 (Quadratmeter etc.), die Länge der Seite AB gleich 16 (Meter etc.) gefunden, so muss ein Dreieck, welches AB zur Grundlinie hat und dessen Inhalt gleich $\frac{512}{2} = 256$ sein soll, eine Höhe gleich $\frac{2 \cdot 256}{16} = 32$ haben. Zieht man also in einem dieser Höhe gleichen Abstand die Parallele zu AB, welche BC in Z schneide, so ist AZ die verlangte Theilungslinie. Trifft die Parallele nicht BC, sondern deren Verlängerung über C in Z, so ist das Dreieck ABZ noch in entsprechender Weise zu verwandeln. Nähere Ausführungen müssen hier den besonderen Lehrbüchern der praktischen Geometrie überlassen werden.

Kapitel 4.

Von der Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 47. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

1. Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels zwei beliebige einander parallele Gerade, so entstehen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C$. Diese Dreiecke stimmen in den Winkeln überein, denn sie haben den Winkel C gemeinschaftlich, und die Winkel CBA und $CB'A'$, sowie BAC und $B'A'C$, sind bezüglich correspondirende Winkel an den parallelen Seiten. Aus dem § 36 ist ferner bekannt, dass



$$CA' : CA = CB' : CB = A'B' : AB,$$

dass also je zwei Seiten dieser beiden Dreiecke, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, zu einander in demselben Verhältniss stehen.

Zwei Dreiecke, welche in je zwei homologen Winkeln und in den Verhältnissen je zweier homologen Seiten übereinstimmen, sollen ähnlich genannt werden. Man schreibt dies: $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

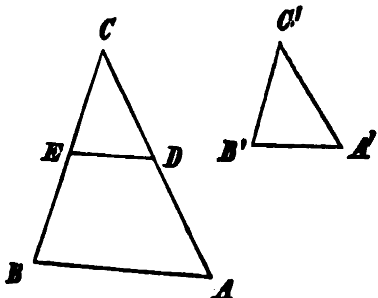
Jedes von zwei solchen Dreiecken kann als ein in verkleinertem oder vergrössertem Maassstabe gefertigtes Abbild des andern betrachtet werden. Da nämlich alle Seiten des einen Dreiecks in dem andern in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert erscheinen, während die gegenseitige Lage der homologen Seiten zu einander, d. h. der Winkel derselben, an Grösse unverändert ist, so haben beide Dreiecke gleiche Gestalt. Es ist nicht nothwendig, dass zwei ähnliche Dreiecke auch die oben angegebene Lage zu einander, also einen Winkel gemeinschaftlich haben, aber es lässt sich leicht zeigen, dass sich dieselben stets in diese gegenseitige Lage gebracht denken lassen.

Sollen also zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sein, so müssen dieselben die folgenden sechs Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$AB : A'B' = AC : A'C' \qquad \angle A = A'$$
$$AB : A'B' = BC : B'C' \qquad \angle B = B'$$
$$AC : A'C' = BC : B'C' \qquad \angle C = C'$$

Man sieht ohne Weiteres ein, dass mit je zwei der vorstehenden Proportionen die dritte stets von selbst erfüllt ist, denn Verhältnisse, die demselben dritten Verhältniss gleich sind, müssen auch unter einander gleich sein. Ebenso folgt aus der Gleichheit zweier Winkelpaare die des dritten Paares in Folge der gleichen Winkelsummen, und somit reducirt sich die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen für die Aehnlichkeit zweier Dreiecke auf vier.

2. Man kann ferner den Satz aufstellen, dass durch die Erfüllung von nur zwei dieser vier Bedingungen die andern im Allgemeinen mit erfüllt werden. Je nach der Auswahl der beiden Gleichungen, welche als erfüllt vorausgesetzt werden, zerfällt dieser Satz in vier einzelne Sätze, die sogenannten Aehnlichkeitssätze, welche im Folgenden bewiesen werden sollen. Man kann nämlich die Voraussetzung entweder aus zwei der obigen Gleichungen für die Winkel bilden, oder aus einer Proportion und der Gleichung für diejenigen Winkel, welche von den Seiten, die in dieser Proportion vorkommen, eingeschlossen sind, oder aus einer Proportion und der Gleichung für einen der nicht eingeschlossenen Winkel, oder endlich aus zwei der obigen Proportionen.



Um für irgend eine derartige Voraussetzung die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ zu beweisen, trage man auf CB eine Strecke CE gleich der homologen Seite $C'B'$ ab und ziehe durch E die zu BA parallele Transversale ED, sodass das Dreieck DEC entsteht, welches nach Nr. 1 dieses Paragraphen dem Dreieck ABC ähnlich ist. Gelingt es nun, die Congruenz der Dreiecke

DEC und $A'B'C'$ zu beweisen, darf also das letztere für das erstere gesetzt werden, so ist damit auch die Aehnlichkeit der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC bewiesen. Für diesen Beweis der Congruenz ist in allen Fällen die Uebereinstimmung jener Dreiecke in den Seiten CE und $C'B'$ aus der Construction bekannt, die Gleichheit der noch ausserdem nothwendigen zwei Paare von Stücken muss aus der zweifachen Voraussetzung des betreffenden Satzes hervorgehen, und dieser Theil des Beweises gestaltet sich daher für die verschiedenen Aehnlichkeitssätze in verschiedener Weise:

Ist vorausgesetzt, dass $\angle C = \angle C'$, $\angle A = \angle A'$, so stimmen die Dreiecke DEC, $A'B'C'$ unmittelbar nach dieser Voraussetzung in den homologen Winkeln C und C' überein. Da ferner der Winkel BAC als correspondirender gleich EDC sein muss, so sind auch die Winkel EDC und $B'A'C'$ einander gleich. Jene Dreiecke stimmen also in einer Seite und zwei homologen Winkeln überein, und ihre Congruenz ist somit bewiesen. Man hat also den Satz:

Dreiecke, welche in zwei Paaren homologer Winkel übereinstimmen, sind ähnlich. (1)

3. Ist vorausgesetzt, dass $\angle C = \angle C'$ und $BC : B'C' = AC : A'C'$ sei, so stimmen die Dreiecke $A'B'C'$ und DEC wieder in den homologen Winkeln C und C' unmittelbar nach dieser Voraussetzung überein. Ferner ist, da DE parallel zu AB, nach § 36, 2

$$BC : EC = AC : DC$$

Da nun

$$BC : B'C' = AC : A'C'$$

nach Voraussetzung und hierbei $EC = B'C'$ nach der obigen Construction ist, die beiden Proportionen also in drei gleichstelligen Gliedern übereinstimmen, so müssen auch die vierten Glieder DC und $A'C'$ derselben gleich sein. Die Dreiecke $A'B'C'$ und DEC stimmen hiernach in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein. Man erhält somit den Satz:

Dreiecke, welche in den Verhältnissen eines Paares von Seiten und in den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen, sind ähnlich. (2)

4. Es sei ferner vorausgesetzt, dass $\angle C = \angle C'$ und $BC : B'C' = AB : A'B'$, so findet man in derselben Weise mit Hülfe der aus dem Parallelismus von DE und AB folgenden Proportion

$$BC : EC = AB : DE,$$

indem man die Glieder der letzteren mit den homologen der vorausgesetzten Proportion vergleicht, dass auch $A'B'$ gleich DE sein muss, und dass somit die Dreiecke DEC und $A'B'C'$ in zwei Seiten und einem der gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. Hieraus kann aber bekanntlich die Congruenz dieser Dreiecke nicht ohne Weiteres gefolgert werden, es muss vielmehr die Bedingung hinzutreten, dass die anderen gegenüberliegenden Winkel einander nicht zu zwei Rechten ergänzen. Man findet hiernach den Aehnlichkeitssatz:

Dreiecke, welche in den Verhältnissen eines Paares von Seiten und in dem einer von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind ähnlich falls die anderen gegenüberliegenden Winkel nicht supplementär zu einander sind. (3)

Insbesondere sind daher Dreiecke ähnlich, wenn sie in einem Seitenverhältniss und in dem der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

5. Werden endlich zwei Proportionen:

$$BC : B'C' = AC : A'C',$$
$$BC : B'C' = AB : A'B'$$

vorausgesetzt, so ergiebt die Vergleichung derselben mit den entsprechenden

$$BC : EC = AC : DC,$$
$$BC : EC = AB : DE$$

in ganz derselben Weise, wie vorher geschehen, dass $A'C'$ gleich DC und $A'B' = DE$ ist, dass also die Dreiecke $A'B'C'$ und DEC in den drei Seiten übereinstimmen. Es gilt also auch der Satz:

Dreiecke, welche in den Verhältnissen zweier Paare homologer Seiten übereinstimmen, sind ähnlich. (4)

Die somit bewiesenen vier Aehnlichkeitssätze gestatten, aus der bekannten Erfüllung zweier der Bedingungen der Aehnlichkeit von Dreiecken das Erfülltsein auch der übrigen zu folgern. Weiss man z. B., dass zwei Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen, so folgt aus dem ersten Aehnlichkeitssatz, dass auch je zwei homologe Seiten derselben in gleichem Verhältniss zu einander stehen; weiss man dagegen, dass die Verhältnisse der homologen Seiten dieselben Werthe haben, so folgt daraus die Uebereinstimmung der Dreiecke in je zwei homologen Winkeln. In entsprechender Weise lassen sich die anderen Aehnlichkeitssätze verwerthen.

Von solchen Anwendungen der Aehnlichkeitssätze zur Erforschung neuer Wahrheiten sollen im Folgenden zunächst die wichtigsten besprochen werden.

§ 48. Proportionen bei rechtwinkeligen Dreiecken.

1. Die zur Hypotenuse senkrechte Höhe CD eines jeden rechtwinkeligen Dreiecks ABC theilt das letztere in zwei kleinere rechtwinkelige Dreiecke, welche einander und dem ganzen ähnlich sind, denn die Dreiecke DBC und ABC stimmen ausser in den rechten Winkeln in dem ihnen gemeinschaftlichen Winkel B (und ebenso die Dreiecke BDC und ACD in dem Winkel A) überein, während in den Dreiecken BDC und ACD ausser den rechten Winkeln die Winkel BCD und CAD (und ebenso die Winkel DBC und DCA) einander gleich sind, da beide denselben dritten Winkel DCA (bezw. BCD) zu 90 Grad ergänzen. Die betreffenden Dreiecke sind also jedesmal nach dem ersten der obigen Aehnlichkeitssätze ähnlich.

Mittelst der gleichen Winkel bestimmen sich leicht die homologen Seiten dieser Dreiecke, da je zwei solche Seiten homolog sein müssen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Unter den $3 \cdot 3$ Proportionen zwischen den Seiten der genannten Dreiecke, welche aus der im Vorstehenden bewiesenen Aehnlichkeit derselben folgen, sind folgende von besonderem Interesse:

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDC und ACD folgt:

$$BD : DC = DC : DA.$$

Diese Proportion ist eine stetige und besagt, dass die Höhe eines jeden rechtwinkeligen Dreiecks die mittlere geometrische Proportionale (oder das geometrische Mittel) zwischen den zu ihr gehörigen Abschnitten der Hypotenuse ist. (1)

Man kann selbstverständlich auch schreiben $DC^2 = BD \cdot DA$, und sind

kürzer p, q, h bezüglich die Maasszahlen von BD, DA und DC, so gestattet die hiernach zwischen denselben bestehende Beziehungsgleichung

$$h^2 = p \cdot q \quad (1)$$

die Berechnung einer jeden dieser drei Grössen aus den gegebenen beiden anderen. So ist

$$h = \sqrt{p \cdot q},\ p = \frac{h^2}{q},\ q = \frac{h^2}{p}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DBC und ABC folgt

$$DB : BC = BC : AB.$$

Auch diese Proportion ist eine stetige; sie besagt dass eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und der Projection jener Kathete auf die Hypotenuse ist. (2)

Dieser Satz gilt selbstverständlich für jede der beiden Katheten; man kann ganz ebenso wie für BC den Beweis für AC, nämlich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ADC und ABC, führen. Es ist also auch

$$DA : AC = AC : AB.$$

Diese Proportionen lassen sich selbstverständlich in die Gleichungen

$$BC^2 = DB \cdot AB$$
$$AC^2 = DA \cdot AB$$

umformen, und durch Addition der entsprechenden Seiten der letzteren entsteht die neue Gleichung:

$$BC^2 + AC^2 = DB \cdot AB + DA \cdot AB = (DB + DA) \cdot AB,$$

oder da $DB + DA = AB$ ist,

$$BC^2 + AC^2 = AB^2,$$

d. h. der Lehrsatz: In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse. (3)

2. Wir sind so auf die schon früher besprochene arithmetische Form des pythagoreischen Lehrsatzes gelangt, in welcher die Quadrate die zweiten Potenzen der unbenannten Maasszahlen der betreffenden Linien bedeuten. In gleicher Weise ist auch der vorhergehende Satz schon früher in geometrischer Form gefunden worden, d. h. in derjenigen, in welcher das Quadrat der Kathete das über dieser construirte geometrische Quadrat bedeutete und statt des im jetzt vorliegenden Falle unter dem Produkt zweier Linien zu verstehenden Produkts ihrer unbenannten Maasszahlen das Rechteck aus jenen Linien gesetzt war. Wie damals aus den geometrischen Formen der Sätze die arithmetischen abgeleitet wurden, so kann man auch umgekehrt aus den jetzt unabhängig von jenen Entwicklungen gefundenen Sätzen über die Maasszahlen der Linien diejenigen über die Flächen der Figuren herleiten.

In gleicher Weise ergiebt sich auch aus dem ersten der Sätze dieses Paragraphen die andere Form:

Das (geometrische) Quadrat über der Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den beiden zugehörigen Abschnitten der Hypotenuse, ein Satz, welcher übrigens ebenfalls unmittelbar geometrisch bewiesen werden kann.

3. Zu der früher zwischen den Maasszahlen a, b der Katheten und der Maasszahl c der Hypotenuse aufgestellten Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

und der obigen Gleichung (1) gesellen sich jetzt noch die Gleichungen

$$a^2 = p \cdot c,\ b^2 = q \cdot c. \quad (3)$$

Diese Gleichungen (1)—(3) gestatten jetzt die Berechnung von je 4 der 6 Stücke a, b, c, p, q, h aus den zwei übrigen, wenn man dieselben noch mit der selbstverständlichen

$$c = p + q$$

verbindet, denn man kann in jedem Fall diese Gleichungen auf die vier Unbekannten auflösen.

So erhält man z. B. aus $a = 3^m$, $b = 4^m$, zunächst $c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$; $p = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} = 1{,}8$; $q = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5} = 3,2$, oder $q = c - p = 5 - 1,8 = 3,2$; ferner $h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$, also $c = 5^m$, $p = 1,8^m$, $q = 3,2^m$, $h = 2,4^m$.

Ist ferner die Hypotenuse gleich 101, eine Kathete b gleich 99 Längeneinheiten gegeben, so hat man

$$a = \sqrt{101^2 - 99^2} = \sqrt{(101+99)\,(101-99)} = \sqrt{400} = 20,$$

und dann wie vorher $p = \frac{20 \cdot 20}{101}$, u. s. w.

Sind a und h gegeben, so ist die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das rechtwinkelige Dreieck BCD kürzer als die Auflösung der obigen Gleichungen. Man erhält dann

$$a^2 = h^2 + p^2, \quad \text{also} \quad p = \sqrt{a^2 - h^2},$$

$$\text{ferner nach (1):} \quad q = \frac{h^2}{p} = \frac{h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}},$$

$$\text{nach (3):} \quad c = \frac{a^2}{p} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}, \quad \text{und} \quad b = \sqrt{q \cdot c} = \frac{a\,h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

Sind ferner a und q gegeben, so erhält man zunächst p durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$a^2 = p\,(p + q)$$

auf die Unbekannte p, wobei die negative Wurzel der Gleichung zu verwerfen ist, da hier nur absolute Maasszahlen vorausgesetzt werden. Aus p und a erhält man c, aus p und q ebenso h, u. s. w. Insbesondere ist hierbei die Bestimmung der Höhe h aus zwei Seiten des Dreiecks bemerkenswerth. Aus $p = \frac{a^2}{c}$, $q = \frac{b^2}{c}$ und $h^2 = p\,q$ folgt

$$h = \frac{a\,b}{c} \quad \text{oder} \quad h\,c = a\,b.$$

Dieselbe Gleichung erhält man nämlich, wenn man den doppelten Inhalt des rechtwinkeligen Dreiecks einmal mit der Hypotenuse als Grundlinie, das andere Mal mittelst der beiden Katheten ausdrückt.

In den vorstehenden Zahlenbeispielen waren die berechneten Wurzeln rational. Dies wird jedoch in der Regel nicht der Fall sein, es wird vielmehr meist wenigstens eins der Verhältnisse der drei Seiten — abgesehen von den übrigen Stücken — irrational sein. So erhält man für $a = 1$, $b = 2$ den Werth von c gleich $\sqrt{5}$. Insbesondere ist in jedem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse mit der Kathete incommensurabel, denn für $a = b$ ist $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Man vergleiche hiermit § 35, 3.

4. Auch die früher bewiesene Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes lässt sich unmittelbar auf arithmetischem Wege beweisen. Ist nämlich die zweite Potenz der Maasszahl einer Seite eines Dreiecks gleich der Summe der zweiten Potenzen der Maasszahlen der beiden anderen Seiten, ist also gemäss der obigen Bezeichnungsweise $a^2 + b^2 = h^2$, so denke man sich ein zweites Dreieck con-

struirt, welches zwei Seiten bezüglich gleich a und b hat, und in welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschliessen. Ist nun d die Maasszahl der Hypotenuse dieses letztern Dreiecks, so ist $d^2 = a^2 + b^2$, also $d^2 = c^2$. Hieraus folgt, da negative Wurzeln ausgeschlossen sind, $d = c$. Beide Dreiecke stimmen also in den drei Seiten überein und sind mithin congruent, also ist auch das erstere Dreieck rechtwinkelig, und zwar liegt der rechte Winkel derjenigen Seite gegenüber, deren Maasszahl oben mit c bezeichnet wurde.

Da beispielsweise $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist, so muss ein Dreieck, dessen Seiten bezüglich das Dreifache, Vierfache und Fünffache einer beliebigen als Maass dienenden Strecke sind, ein rechtwinkeliges sein. Man kann sich dieser Construction eines Dreiecks aus seinen drei in der angegebenen Weise bestimmten Seiten zur Zeichnung eines rechten Winkels, bezw. zur Lösung der Aufgabe bedienen, auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu errichten*). Dieses Dreieck, dessen Seiten sich zu einander wie 3 : 4 : 5 verhalten, also ausnahmsweise alle drei in rationalen Verhältnissen stehen, wird das ägyptische genannt. Andere rechtwinkelige Dreiecke, welche die gleiche bemerkenswerthe Eigenschaft rationaler Seitenverhältnisse haben, sind beispielsweise die mit den Seiten 12, 5, 13 oder 8, 15, 17, allgemein diejenigen, deren Seiten den Formeln

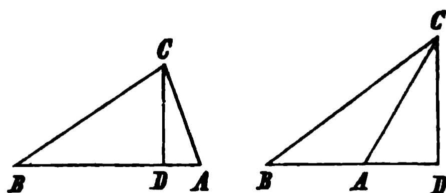
$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2$$

für rationale Werthe von m und n entsprechen. Man nennt solche Dreiecke überhaupt rationale oder pythagoreische, und das oben genannte ägyptische ist dasjenige derselben, dessen Seiten die kleinsten in ganzen Zahlen ausgedrückten Werthe haben.

5. Die Entscheidung der Frage, ob und in welcher Weise sich auch die übrigen Lehrsätze dieses Paragraphen umkehren lassen, dürfen wir den Lesern überlassen. Es sei ferner noch erwähnt, dass sich auch der allgemeine pythagoreische Lehrsatz in arithmetischer Form unmittelbar ableiten lässt, indem man den schon bewiesenen besonderen benutzt. Ist nämlich CD senkrecht zu AB, so hat man im Dreieck BCD:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2$$

Nun ist $CD^2 = CA^2 - AD^2$,
und $BD = AB \mp AD$,
wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem BC einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüberliegt. Demnach ist



$$BC^2 = CA^2 - AD^2 + (AB \mp AD)^2$$
$$= CA^2 - AD^2 + AB^2 \mp 2AB \cdot AD + AD^2,$$

also nach Streichung von $-AD^2 + AD^2$,

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \mp 2AB \cdot AD, \text{ was zu beweisen war.}$$

Mittelst dieses allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes kann man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Projection einer jeden derselben auf jede der andern berechnen. Es sei in der vorstehenden Figur $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CD = h$ und $AD = q$ gesetzt, so ist

*) Man findet in der That dieses Verfahren zu dem angegebenen Zwecke z. B. bei Bauhandwerkern im Gebrauch.

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,cq,$$

$$\text{also } \pm q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Hieraus ergiebt sich ferner die Höhe CD mittelst

$$h^2 = b^2 - q^2 = (b + q)\cdot(b - q) = (b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})\cdot(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\cdot\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}\cdot\frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)\cdot(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2}.$$

Da nun endlich der Inhalt F des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}ch$ ist, so kann man diesen Inhalt aus den drei Seiten mittelst der Formel

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)\cdot(a - b + c)(a + b - c)} \quad (4)$$

berechnen. Setzt man zur Abkürzung noch

$$a + b + c = 2s,$$

so wird $b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a)$, und entsprechend

$$a - b + c = 2(s - b),\ a + b - c = 2(s - c),$$

wodurch die Formel (4) in

$$F = \sqrt{s(s - a)\ (s - b)\ (s - c)} \quad (5)$$

übergeht.

Die früher entwickelten Gleichungen

$$F = \tfrac{1}{2}\rho\,(a + b + c) = \tfrac{1}{2}\rho_a(b + c - a) = \tfrac{1}{2}\rho_b(a - b + c) = \tfrac{1}{2}\rho_c(a + b - c)$$

$$\text{oder } F = \rho\,s = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c)$$

ermöglichen nunmehr auch die Berechnung der Berührungsradien aus den drei Seiten des Dreiecks. So erhält man

$$\rho = \frac{F}{s} = \frac{\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}{s} = \sqrt{\frac{s(s - a)(s - b)(s - c)}{s^2}}, \text{ oder}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}},$$

$$\text{und entsprechend } \rho_a = \sqrt{\frac{s(s - b)(s - c)}{s - a}}, \text{ u. s. w.}$$

6. Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz gestattet ferner die Berechnung der drei Mittellinien eines Dreiecks aus den drei Seiten. Ist unter Beibehaltung der vorher gebrauchten Bezeichnungen $CE = m$ die Mittellinie, welche die Seite BA in E halbirt, so liefert die Anwendung des genannten Lehrsatzes auf die Dreiecke BCE und ACE die Gleichungen:

$$a^2 = m^2 + \tfrac{1}{4}c^2 \pm 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot ED,$$

$$b^2 = m^2 + \tfrac{1}{4}c^2 \mp 2\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot ED,$$

und durch Addition der entsprechenden Seiten folgt aus denselben

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \tfrac{1}{2}c^2 \quad (6),$$

d. h. die Summe der Quadrate je zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich der Summe aus dem Doppelten des Quadrats der zur dritten Seite gehörigen Mittellinie und der Hälfte des Quadrats dieser dritten Seite.

Man kann sich diesen Satz leicht dadurch merken, dass man denselben Satz erhalten muss, wenn man annehmen darf, dass die Mittellinie zur dritten Seite senkrecht stehe. Denn da die Glieder der obigen Gleichungen, welche den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz von dem speciellen unterscheiden, bei der Addition wegfallen, so muss das Resultat dasselbe sein, wenn man beide Dreiecke in entsprechender Weise als rechtwinkelige behandelt.

Die Auflösung der Gleichung (6) auf die Unbekannte m liefert den Werth derselben, ausgedrückt durch die drei Seiten. Allgemeiner gesagt hat man zwischen den drei Mittellinien und den drei Seiten des Dreiecks drei solche Gleichungen, welche die Berechnung je dreier dieser Stücke aus den drei anderen ermöglichen.

7. Beispiele und Anwendungen: 1. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a desselben zu berechnen. Auflösung: Aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgt $a^2 = h^2 + (\frac{1}{2} a)^2$, also $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

2. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a desselben zu berechnen. Auflösung: $F = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$.

3. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe h desselben zu berechnen. Auflösung: Da $\frac{3}{4} a^2 = h^2$, so ist $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$, und $F = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{3} h^2 \sqrt{3}$.

4. Die Hypotenuse eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks aus der Kathete a desselben zu berechnen. Auflösung: $a^2 + a^2 = c^2$; $c = a\sqrt{2}$.

5. Die Katheten eines rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreiecks aus der Hypotenuse c desselben zu berechnen. Auflösung: $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} c\sqrt{2}$.

6. Die Höhe eines gleichschenkeligen Dreiecks aus der Basis b und dem Schenkel a zu berechnen. Auflösung: $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} b^2} = \sqrt{(a + \frac{1}{2} b)(a - \frac{1}{2} b)}$.

7. Den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks aus der Basis b und dem Schenkel a zu berechnen. Auflösung: $F = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} b^2}$.

8. Aus dem Flächeninhalt F und der Hypotenuse c eines rechtwinkeligen Dreiecks die Katheten desselben zu berechnen. Auflösung: Die Gleichungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $ab = 2F$ sind auf a und b aufzulösen. Man erhält $(a + b)^2 = c^2 + 4F$, $(a - b)^2 = c^2 - 4F$; $a = \frac{1}{2}[\sqrt{c^2 + 4F} + \sqrt{c^2 - 4F}]$, u. s. w.

9. Aus den Katheten a, b eines rechtwinkeligen Dreiecks den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises zu berechnen. Auflösung: Es ist
$\frac{1}{2}(a + b + c)\rho = F$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, also $(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})\rho = ab$ oder

$$\rho = \frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab[a + b - \sqrt{a^2 + b^2}]}{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)} = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$
$$= \frac{a + b - c}{2}.$$

10. Den Inhalt eines regelmässigen Sechsecks aus seiner Seite a zu berechnen. Auflösung: Es ist $F = \frac{1}{2}\rho u = 3a\rho$; $\rho^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2$; $F = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$.

11. Ein 32 Fuss hohes Bambusrohr wurde vom Winde geknickt, und die gesenkte Spitze berührte den Boden in einer Entfernung von 16 Fuss vom Stamme. Wie hoch über dem Boden befand sich die Stelle, an welcher es geknickt wurde? Auflösung: Es ist $x + c = 32$, $a = 16$, $c^2 = x^2 + a^2$, also $(32 - x)^2 = x^2 + 16^2$. Hieraus folgt $1024 - 64x = 256$, $x = 768 : 64 = 12$ Fuss.

12. Eine Lotosblume, welche in einem See $\frac{1}{2}$ Fuss über das Wasser hervorragte, neigte sich vom Winde getrieben, und die Knospe verschwand in einer Entfernung von 2 Fuss von ihrem früheren Orte. Wie tief war das Wasser? Auflösung: $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 4$; $x + \frac{1}{4} = 4$, $x = 3\frac{3}{4}$ Fuss.

13. In einen Kreis, dessen Durchmesser gleich $2r$ gegeben ist, sei ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite die Länge a hat. Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks. Auflösung: $b = \sqrt{4r^2 - a^2}$, $F = ab = a\sqrt{4r^2 - a^2}$.

14. Wie lang sind diejenigen Sehnen eines Kreises mit dem Radius $r = 25{,}9$, deren Abstände vom Mittelpunkt $d = 8{,}4$ sind? Auflösung:

$$2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{(25{,}9 + 8{,}4)(25{,}9 - 8{,}4)} = 49.$$

15. Eine Höhe eines Dreiecks sei gleich h gegeben und theile die Grundlinie in zwei Abschnitte, welche bezüglich gleich p und q sind. Man berechne die drei Seiten des Dreiecks. $h = 140$; $p = 48$; $q = 105$. Auflösung:

$a = \sqrt{h^2 + p^2} = 148$; $b = \sqrt{h^2 + q^2} = 175$; $c = q \pm p = 153$ oder 57.

16. Die Diagonale eines Rechtecks sei gleich d gegeben, und eine Seite desselben sei um die gegebene Strecke c länger als die andere; man berechne die Seiten. Auflösung: $x^2 + y^2 = d^2$; $x - y = c$, also $c^2 = d^2 - 2xy$, $2xy = d^2 - c^2$; $(x + y)^2 = 2d^2 - c^2$, $x = \frac{1}{2}[\sqrt{2d^2 - c^2} + c]$ u. s. w.

17. Den Flächeninhalt eines Quadrats aus der Summe s seiner Diagonale und Seite zu berechnen. Auflösung: $s = a\sqrt{2} + a$; $a = \frac{s}{\sqrt{2}+1} = s\,(\sqrt{2} - 1)$; $F = a^2 = s^2\,(3 - 2\sqrt{2})$.

18. Den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitten p, q der Hypotenuse zu berechnen. $p = 0{,}18$ $q = 0{,}50$. Auflösung: $c = p + q$, $h = \sqrt{pq}$; $F = \frac{1}{2}(p + q)\sqrt{pq} = 0{,}102$.

19. Den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks aus der Höhe h_a auf einem Schenkel und der Höhe h_b auf der Basis zu berechnen. Auflösung: Es ist $F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ und $a^2 = h_b^2 + \frac{1}{4}b^2$, daher $\frac{b^2 h_b^2}{h_a^2} = h_b^2 + \frac{1}{4}b^2$, woraus

$$b^2 = \frac{4h_a^2 h_b^2}{4h_b^2 - h_a^2},\quad F = \frac{h_a h_b^2}{\sqrt{4h_b^2 - h_a^2}}.$$

20. Den Flächeninhalt eines Trapezes aus der Höhe h, den nicht parallelen Seiten c, d und der kleineren parallelen Seite b zu berechnen. Auflösung:

$$a = b + \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{d^2 - h^2};\quad F = \frac{a + b}{2}h.$$

21. Von einem Dreieck seien die Längen der drei Seiten a, b, c gegeben; man berechne die Projectionen der ersten dieser Seiten auf die beiden anderen. $a = 12$, $b = 13$, $c = 14$. Auflösung: $b^2 = a^2 + c^2 \mp 2cp$; $c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bq$, also $p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$, $q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$; $p = 6\frac{3}{28}$, $q = 4\frac{1}{2}$.

22. Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten a, b, c zu berechnen für α) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; β) $a = 150$, $b = 25$, $c = 145$; γ) $a = 120$, $b = 29$, $c = 101$. Resultate: α) 84, β) 1800, γ) 1200.

23. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die drei Höhen desselben zu berechnen. $a = 408$, $b = 41$, $c = 401$. Resultat: 40; 398,0488; 40,6983.

24. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises zu berechnen. $a = 40$, $b = 13$, $c = 37$. Resultat: $5\frac{1}{3}$.

25. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die Radien der äusseren Berührungskreise desselben zu berechnen. $a = 44$, $b = 15$, $c = 37$. Resultat: 66; 8; 24.

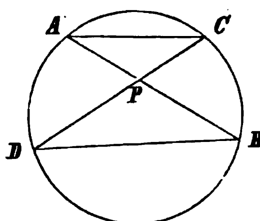
26. Aus den drei Seiten eines Dreiecks die drei Mittellinien desselben zu berechnen. $a = 102$, $b = 61$, $c = 109$. Resultat: 72,1110; 101,0557; 63,9707.

27. Aus den drei Mittellinien m_a, m_b, m_c eines Dreiecks die drei Seiten desselben zu berechnen.

§ 49. Proportionen bei dem Kreise.

1. Gehen durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises zwei Sehnen AB, CD, so entstehen durch die Verbindungslinien AC, BD ihrer Endpunkte zwei

Dreiecke ACP und BDP. In diesen sind die Winkel APC und BPD als Scheitelwinkel, und die Winkel ACP und PBD als Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich, mithin sind diese Dreiecke einander ähnlich. Daher folgt



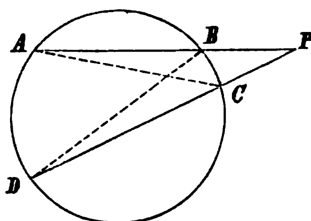
$$AP : CP = DP : BP,$$

d. h. aus den Maasszahlen der Abschnitte der beiden Sehnen lässt sich eine Proportion bilden, in welcher die Abschnitte der einen Sehne die inneren, die der anderen die äusseren Glieder sind. Es ist also auch

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP,$$

d. h. das Produkt (Rechteck) der Abschnitte der einen Sehne ist gleich dem Produkt (Rechteck) der Abschnitte der anderen.

Gehen ferner durch einen Punkt P ausserhalb eines Kreises zwei Secanten in letzteren, so erhält man durch die einander innerhalb des Kreises schneidenden Verbindungslinien AC, DB ihrer Durchschnittspunkte mit dem Kreise die Dreiecke ACP und DBP, welche den Winkel P gemeinschaftlich haben, und deren Winkel PAC und PDB als Peripheriewinkel auf demselben Bogen einander gleich sind. Diese Dreiecke sind daher ähnlich, und hieraus folgt die Proportion



$$AP : DP = CP : BP,$$

oder die Gleichung $AP \cdot BP = DP \cdot CP$,

d. h. aus den Abständen des Durchschnittspunktes P der Secanten von ihren Durchschnittspunkten mit dem Kreise lässt sich eine Proportion bilden, in welcher die Abstände auf der einen Secante die äusseren, die auf der anderen die inneren Glieder sind, oder das Produkt (Rechteck) aus den auf der einen Secante gemessenen Abständen ist gleich dem Produkt (Rechteck) aus den beiden andern.

Beachtet man die früher, § 37, getroffene Bestimmung, nach welcher auch unter den Abschnitten einer Strecke AB, welche durch einen auf ihrer Verlängerung liegenden Punkt P gebildet werden, die Abstände des letzteren Punktes von den Endpunkten jener Strecke verstanden werden sollen, so lassen sich die beiden vorstehenden Sätze als besondere Fälle in den nachstehenden allgemeineren zusammenfassen:

Für alle durch einen und denselben Punkt gehenden Sehnen eines Kreises hat das Produkt der durch diesen Punkt gebildeten Abschnitte jeder einzelnen Sehne denselben Werth. (1)

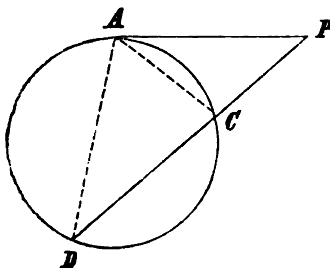
Dieser Werth heisst die Potenz des Kreises in Beziehung auf jenen Punkt.

Auch der Fall, in welchem der Punkt P auf dem Kreise liegt, ist hierbei nicht ausgeschlossen, denn in diesem Fall wird auf jeder Sehne ein Abschnitt und mithin auch jedes jener Produkte gleich Null.

2. Für jeden Punkt P innerhalb eines Kreises giebt es eine Sehne, welche durch P halbirt wird; dieselbe steht bekanntlich auf dem durch P gehenden Durchmesser senkrecht. Für diese Sehne verwandelt sich das genannte Produkt in das Quadrat der halben Sehne. Die Hälfte dieser Sehne ist daher die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten jeder anderen durch denselben Punkt gehenden Sehne.

Sollen ebenso die beiden Abschnitte für einen ausserhalb des Kreises liegen-

den Punkt P einander gleich werden, so muss man die Secante durch eine Tangente ersetzen. In diesem Fall bleibt der obige Beweis und somit auch der Lehrsatz gültig, nur fällt der dortige Punkt B mit A zusammen. Man hat also zum Beweise die Hülfslinien AC und AD sowie die Dreiecke APC und APD zu benutzen, für welche der von einer Tangente und einer Sehne gebildete Peripheriewinkel PAC gleich dem auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel ADP ist. Hiermit, in Verbindung mit der Uebereinstimmung der Dreiecke in dem Winkel P, ist wieder die Aehnlichkeit dieser Dreiecke und somit auch die Gültigkeit der Proportion



$$DP:AP = AP:CP$$

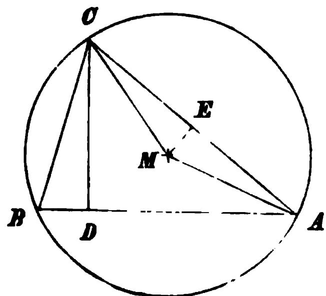
bewiesen.

Die Tangente ist also die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten jeder mit ihr von demselben Punkt ausgehenden Sehne. (2)

Die Potenz eines Kreises in Beziehung auf einen gegebenen Punkt lässt sich also, je nachdem letzterer innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, am einfachsten durch das Quadrat der in dem Punkt halbirten Sehne oder durch das Quadrat einer von ihm ausgehenden Tangente darstellen. — Die Potenz heisst im ersteren Fall eine innere, im letzteren eine äussere.

Die weitere Ausführung der Lehre von den Kreispotenzen gehört der sogenannten neueren Geometrie an. Vergl. § 80.

3. Von den einbeschriebenen Dreiecken und Vierecken. Verbindet man den Mittelpunkt M des einem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises mit den Eckpunkten A und C, so ist der Winkel CMA als Centriwinkel auf demselben Bogen doppelt so gross als der Winkel CBA. Fällt man also die Senkrechte ME auf CA, so ist $\angle EMA = \angle CBA$. Es sei ferner CD die zu AB senkrechte Höhe; dann stimmen also die rechtwinkeligen Dreiecke CBD und AME in den eben genannten Winkeln überein und sind mithin einander ähnlich. Hieraus folgt



$$CD:BC = AE:MA,$$

oder wenn man $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $MA = r$, $CD = h$ setzt,

$$h:a = \tfrac{1}{2}b:r, \text{ oder } 2hr = ab,$$

d. h. das Produkt (Rechteck) aus je zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Produkt (Rechteck) aus dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises und der Höhe auf die dritte Seite.

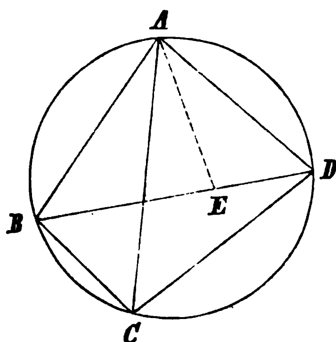
Aus der vorstehenden Gleichung folgt ferner $h = \frac{ab}{2r}$, und setzt man dies in die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks $F = \frac{1}{2}ch$ ein, so erhält man

$$F = \frac{abc}{4r}.$$

Durch Anwendung der im § 48,5 ausgeführten Berechnung des Flächeninhaltes F aus den drei Seiten des Dreiecks kann man nunmehr auch den Radius r des umbeschriebenen Kreises durch die Seiten ausdrücken. Man erhält

$$r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

4. Ist $ABCD$ ein Sehnen-Viereck, dessen Diagonalen AC und BD seien, und macht man den Winkel DAE gleich BAC, so sind die Dreiecke AED und ABC, welche auch in den auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkeln ACB und ADE übereinstimmen, einander ähnlich. Ferner ist auch der Winkel BAE gleich DAC, und da die Dreiecke DAC und BAE ausserdem in den Peripheriewinkeln ACD und ABE übereinstimmen, so sind auch diese Dreiecke einander ähnlich. Hieraus folgt:



$$AD : AC = DE : BC \text{ oder } AD \cdot BC = AC \cdot DE$$
und $$AC : CD = AB : BE \text{ oder } AB \cdot CD = AC \cdot BE;$$
daher ist auch $$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot (DE + BE),$$
oder $$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD,$$
d. h. in jedem Sehnen-Viereck ist das Produkt (Rechteck) aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte (Rechtecke) aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Dieser Satz heisst der Ptolemäische Lehrsatz.

Setzt man der Kürze halber $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und den Radius des umbeschriebenen Kreises gleich r, so ist also
$$ac + bd = ef.$$

Der Inhalt des Sehnen-Vierecks $ABCD$ lässt sich sowol als Summe der Dreiecke ABC und ACD, wie als Summe der Dreiecke ABD und BCD durch die Seiten dieser Dreiecke und den Radius r des sämmtlichen letzteren umbeschriebenen Kreises ausdrücken. Man erhält hiernach für denselben
$$F = \frac{(ab + cd)e}{4r} = \frac{(ad + bc)f}{4r}.$$

Aus der Gleichheit dieser beiden für F gefundenen Ausdrücke folgt dann
$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd).$$

Hiernach kann man jede einzelne Diagonale des Sehnen-Vierecks aus den vier Seiten des letzteren berechnen, indem man die vorstehende Gleichung mit der obigen Formel des Ptolemäischen Lehrsatzes verbindet, und die beiden Gleichungen auf e und f als Unbekannte auflöst. Man erhält so
$$e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}},\quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Um endlich auch den Flächeninhalt des Sehnen-Vierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen, fälle man die Senkrechte $BG = h$ auf CD und die Senkrechte $BF = h'$ auf AD (oder deren Verlängerung). Dann ist
$$F = \triangle BCD + \triangle ABD = \tfrac{1}{2}(ch + dh').$$

Da nun $\angle BAD + \angle BCD = 2R$, also $\angle BAF = \angle BCD$ ist, so sind die Dreiecke ABF und BCG einander ähnlich, woraus
$$h' : a = h : b \text{ oder } h' = \frac{a}{b} h$$
folgt. Man hat daher
$$F = \tfrac{1}{2} h \left(c + \frac{ad}{b}\right),$$

und es ist nur noch h durch die vier Seiten auszudrücken. Setzen wir $CG = q$, so ist $f^2 = b^2 + c^2 - 2cq$, also $q = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2c}$, und $h^2 = b^2 - q^2$. Da nun f oben durch die Seiten ausgedrückt ist, so hat man nur noch die einzelnen Werthe nach einander in die Formeln einzusetzen. Man erhält nach einigen leichten Umformungen

$$q = \frac{b(b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{2(ad + bc)}$$

$$b + q = \frac{b \cdot (2ad + 2bc + b^2 + c^2 - a^2 - d^2)}{2(ad + bc)} = \frac{b[(b+c)^2 - (a-d)^2]}{2(ad+bc)};$$

$$b - q = \frac{b(2ad + 2bc - b^2 - c^2 + a^2 + d^2)}{2(ad + bc)} = \frac{b[(a+d)^2 - (b-c)^2]}{2(ad+bc)},$$

$$h^2 = (b + q) \cdot (b - q)$$

$$= \frac{b^2}{4(ad + bc)^2}(b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d + b - c)(a + d - b + c)$$

$$\text{also } F = \tfrac{1}{2} h \cdot \frac{bc + ad}{b},$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(b + c + d - a)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}.$$

Setzt man zur Abkürzung noch $a + b + c + d = 2s$, so erhält man

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Beispiele: 1. Den Radius des Kreises zu berechnen, welcher einem Dreieck mit den Seiten $a = 7$, $b = 7{,}5$, $c = 6{,}5$ umbeschrieben ist. Auflösung: Es ist $2 \cdot s = 21$, also $F = \sqrt{10{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 3 \cdot 4} = 21$, $r = 7 \cdot 7{,}5 \cdot 6{,}5 : 84 = 4{,}0625$

2. Den Flächeninhalt eines Sehnen-Vierecks aus den Seiten $a = 57$, $b = 14$, $c = 42$, $d = 41$ zu berechnen. Auflösung: $F = \sqrt{20 \cdot 63 \cdot 35 \cdot 36} = 1260$.

§ 50. Constructions-Aufgaben zu § 48 und 49.

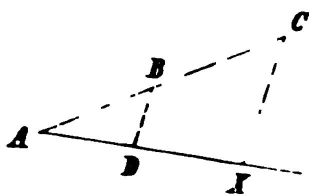
1. Auf den in den § 48 und 49 entwickelten Lehrsätzen beruhen die Auflösungen einer Anzahl wichtiger Constructions-Aufgaben, welche im Folgenden zunächst erörtert werden sollen. Des Zusammenhangs wegen fügen wir denselben auch die nachstehende erste bei, welche sich schon mit den Hilfsmitteln des § 36 lösen lässt. Es ist dies die Aufgabe:

Zu drei gegebenen Strecken die vierte geometrische Proportionale zu construiren,

d. h. wenn a, b, c, drei der Länge nach gegebene Strecken sind, eine vierte Strecke x zu zeichnen, so dass

$$a : b = c : x$$

ist. Mit Hilfe der Sätze von den parallelen Transversalen eines Dreiecks lassen sich mannigfaltige Lösungen dieser Aufgabe geben, die aus diesen Sätzen unmittelbar hervorgehen. Beispielsweise kann man auf einer beliebigen Geraden zwei Strecken $AB = a$, $BC = b$ nach einander abtragen, an jene Gerade in A eine beliebige Convergente anlegen, auf dieser $AD = c$ abtragen, D mit B verbinden und durch C die Parallele CX zu BD ziehen; dann ist DX die gesuchte Strecke. Oder man kann



— wodurch an Raum in der Zeichnung gegen vorher gespart wird — auf einer beliebigen Geraden von demselben Punkte A aus die Strecken $AB = a$, $AC = b$, dann auf einer in A angelegten Convergenten $AD = c$

abtragen, wieder D mit B verbinden und zu BD die Parallele CX ziehen; dann ist AX die verlangte Strecke. Die Auffindung noch anderer ähnlicher Constructionen darf dem Leser überlassen bleiben, doch mögen noch die folgenden als besonders bemerkenswerth angeführt werden: Man construire ein gleichschenkeliges Dreieck ABC, dessen Schenkel CA, CB gleich a sind, und dessen Grundlinie AB gleich b ist, beschreibe mit einem Radius gleich c um C einen Kreisbogen, der CB (oder deren Verlängerung) in D, CA in E schneide, so ist DE die verlangte vierte Proportionale. Diese Auflösung empfiehlt sich besonders dann, wenn zu denselben Strecken a und b und verschiedenen c mehrere vierte Proportionalen zu suchen sind, da man in jedem neuen Falle nur eines neuen Kreisbogens bedarf. Dieselbe setzt übrigens voraus, dass b kleiner als $2a$ sei. Von dieser Beschränkung frei ist die denselben Vortheil bietende folgende: Man construire ein gleichschenkeliges Dreieck ABC, dessen Schenkel CA, CB gleich a sind, dessen Basis aber beliebig lang ist, beschreibe um C mit b einen Kreisbogen, der AB oder deren Verlängerung in F schneide, ziehe CF, beschreibe um C mit c einen Kreisbogen, der CB in D, CA in E treffe, und ziehe DE, so schneidet diese Gerade oder deren Verlängerung von CF eine Strecke CX ab, welche die gesuchte ist.

Man kann sich auch anderer Sätze als derjenigen von den parallelen Transversalen zur Lösung dieser Aufgabe bedienen: Trägt man z. B. auf einer Geraden die Strecken $AB = b$, $BC = c$ nach einander ab, beschreibt durch die Punkte A und C einen beliebigen Kreis, sowie um B mit a einen Kreisbogen, der den ersteren Kreis in D schneide, und zieht durch D und B die Sehne, so ist deren zweiter Abschnitt BX die verlangte Strecke, wie unmittelbar aus § 49, 1 hervorgeht. In ähnlicher Weise lassen sich zwei Secanten eines Kreises benutzen, die einander ausserhalb des letzteren schneiden. Auch bei diesen Constructionen bedarf man für jedes neue a bei denselben b und c nur eines neuen Kreisbogens.

Die vorstehende Aufgabe möge noch dazu dienen, den Begriff des graphischen Rechnens zu erläutern, da sie hierzu besonders geeignet ist. Dieselbe ist das geometrische Seitenstück zu der den sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, wie Regel-de-tri, Zinsrechnung u. dgl. zu Grunde liegenden arithmetischen Aufgabe, zu drei gegebenen Zahlen a, b, c, die vierte Proportionale, also eine Zahl x zu bestimmen, so dass

$$a : b = c : x$$

ist. Wie man hiernach die vorstehende Aufgabe auch dadurch praktisch lösen könnte, dass man durch Messung der gegebenen Strecken deren Maasszahlen ermittelte, dann aus der vorstehenden Gleichung

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

berechnete und endlich zu der durch die Ausrechnung gefundenen Zahl durch Abmessen auf dem Maassstab die entsprechende Strecke bestimmte (wobei freilich die Ungenauigkeiten dieses Maassstabes sich mehr oder minder geltend machen würden), so kann man umgekehrt die Zahl x durch Zeichnung ermitteln. Man hat also bei einer Rechnungsaufgabe der angegebenen Art nur auf einem Maassstab drei Strecken abzumessen, deren Maasszahlen bezüglich a, b, c sind, zu diesen drei Strecken nach einer der vorher angegebenen oder einer anderen zu gleichem Zweck dienlichen Methode die vierte Proportionallinie zu construiren und endlich durch Messung der letzteren mittelst desselben Maasstabes

die gesuchte Zahl zu bestimmen. Die so gefundene Zahl würde allerdings durch die bei allem Zeichnen und Messen unvermeidlichen Ungenauigkeiten beeinflusst sein und aus diesem Grunde keinen Anspruch auf vollkommene Richtigkeit machen können, und man wird daher eine solche Ermittelung des Resultats einer Rechnungsaufgabe durch eine Zeichnung heutzutage in der Praxis nicht anwenden, sondern vielmehr sich der auch ohnedies bequemeren unmittelbaren Berechnung bedienen. Anders verhielt es sich in den Zeiten des classischen Alterthums, in welchem bei dem Mangel eines Zahlensystems, wie des jetzt gebräuchlichen zehntheiligen, die Ausführung von Rechnungen, welche nicht von möglichst einfacher Art sind, die grössten Schwierigkeiten bot und also auch die Lösung einer Regel-de-tri-Aufgabe mit nicht ganz kleinen Zahlen als eine besondere Kunstleistung gelten konnte. Hier konnten die graphischen Methoden bei der schon damals hohen Entwicklung der Geometrie als willkommenes Hülfsmittel zu einer, wenn auch nur mehr oder minder angenäherten Bestimmung des Resultats gelten.

Die graphischen Methoden bieten auch dadurch ein Interesse, dass sie auf eine sehr einfache Weise die Möglichkeit sogenannter Rechenmaschinen zu zeigen gestatten. So könnte man beispielsweise in einer der obigen Constructionen die einander in B schneidenden Sehnen durch die mit Maasseintheilungen versehenen Kanten zweier um einen gemeinsamen Punkt dieser Kanten drehbaren Lineale darstellen, auf einem der letzteren für jede einzelne Regel-de-tri-Aufgabe die Strecken $BA = b$, $BC = c$ abmessen, und dann mittelst eines durch A und C gelegten Kreisringes und der Strecke $BD = a$ auf dem zweiten, drehbaren Lineal die Strecke BX und damit die gesuchte Zahl durch unmittelbares Ablesen finden.

Es sei endlich noch erwähnt, dass die obige Aufgabe sich auch in der Form stellen lässt, die Strecke x in der Gleichung

$$a \cdot x = b \cdot c$$

zu construiren, und dass dieselbe dann mit Hülfe der Lehre vom Flächeninhalt auch dahin gedeutet werden kann, dass man die zweite Seite eines Rechtecks finden solle, dessen erste Seite gegeben und welches dem Rechtecke aus zwei anderen gegebenen Strecken gleich sei. Man wird jedoch im Allgemeinen die frühere Aufgabe, ein gegebenes Rechteck in ein inhaltsgleiches Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln, wie hiernach der Fall sein müsste, nicht zur Lösung der obigen verwenden, da sie weitläufiger ist als nöthig; dagegen kann man sich umgekehrt der Construction der vierten Proportionallinie zur Auflösung der gedachten Verwandlungsaufgabe bedienen.

2. Sind die zweite und die dritte der drei gegebenen Strecken einander gleich, so entsteht aus der vorstehenden Aufgabe die weitere:

Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionallinie zu construiren, d. h. wenn a, b die gegebenen Strecken sind, eine dritte Strecke x zu zeichnen, so dass

$$a : b = b : x$$

ist. Die Auflösung kann ganz in derselben Weise geschehen, wie bei der vorigen Aufgabe, indem dort statt c die Strecke b wiederholt gesetzt wird. Man kann aber auch die von mittleren geometrischen Proportionalen bei dem rechtwinkeligen Dreieck handelnden Sätze benutzen, indem man ein solches Dreieck so construirt, dass entweder die Höhe desselben gleich b, und der eine Abschnitt der Hypotenuse gleich a oder eine Kathete desselben gleich b und, je nachdem a grösser oder kleiner als b ist, entweder die ganze Hypotenuse oder die Projection jener Kathete auf die Hypotenuse gleich a wird. Bei der ersteren Construction ist

der andere Abschnitt der Hypotenuse, bei der letzteren die Projection der Kathete auf die Hypotenuse oder diese letztere selbst die gesuchte Strecke. Da man ferner die obige Proportion in

$$b^2 = a \cdot x$$

umformen kann, so ergiebt sich die Zusammengehörigkeit dieser Aufgabe mit der anderen: ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, von welchem eine Seite der Länge nach gegeben ist.

3. Die Aufgabe zu zwei gegebenen Strecken die mittlere geometrische Proportionale zu construiren,

d. h. wenn a, b die gegebenen Strecken sind, eine dritte Strecke x zu zeichnen, so dass

$$a : x = x : b$$

ist, lässt sich ebenfalls mittelst der so eben benutzten Sätze vom rechtwinkeligen Dreieck lösen. Construirt man über einer aus $AB = a$ und $BC = b$ bestehenden Strecke AC als Durchmesser den Halbkreis und errichtet auf AC in B die Senkrechte BD, welche den Halbkreis in D treffe, so ist BD die verlangte Strecke, denn zieht man AD und CD, so ist der Winkel ADC als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter und somit die Höhe BD des rechtwinkeligen Dreiecks ADC das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten AB und BC der Hypotenuse. In entsprechender Weise kann man auf einer Strecke AB, welche gleich der grösseren der beiden Strecken a, b gemacht ist, eine Strecke AC gleich der kleineren abschneiden, über AB als Durchmesser den Halbkreis und auf AB in C die Senkrechte CD bis zum Durchschnitt mit dem Halbkreis ziehen; die Verbindungslinie AD ist dann die gesuchte Strecke x. In dem besonderen Fall, dass a gleich b ist, wird die Ausführung einer Construction überhaupt überflüssig, denn aus $a : x = x : a$ folgt ohne Weiteres $x^2 = a^2$, also $x = a$.

Man kann ferner die Sätze von den Kreispotenzen im § 49 anwenden. Zeichnet man wieder eine Linie AC, welche die Summe der Strecken $AB = a$ und $BC = b$ ist, legt dann durch A und C einen beliebigen Kreis, verbindet den Mittelpunkt M des letzteren mit B und errichtet auf MB in B die Senkrechte, welche den Kreis in D schneide, so ist BD die verlangte Strecke x, denn BD ist die Hälfte einer in B halbirten Sehne und daher $BD \cdot BD = AB \cdot BC$. Macht man AC zum Durchmesser des Kreises, so wird diese Construction mit der ersten der vorher angegebenen identisch. — Construirt man ferner BC als Differenz zweier den gegebenen a, b bezüglich gleichen Strecken AB, AC, legt durch B und C einen beliebigen Kreis und zieht an diesen von A aus die Tangente, so ist letztere wieder die gesuchte mittlere Proportionale, wie unmittelbar aus dem betreffenden Satze hervorgeht.

Endlich ergiebt sich durch die Umformung der obigen Proportion in

$$x^2 = ab$$

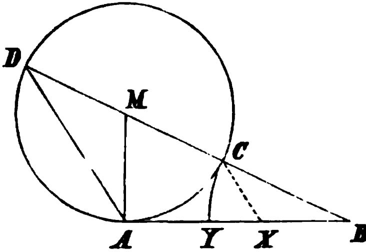
unmittelbar der Zusammenhang der vorstehenden Aufgabe mit der früheren, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

4. Mit dem Namen des goldenen Schnitts (sectio aurea, auch sectio divina) bezeichnet man die Theilung einer Strecke in der Art, dass der grössere Abschnitt die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt ist. Bezeichnet man also die zu theilende Strecke durch a, den grösseren Abschnitt durch x und demgemäss den kleineren Abschnitt durch $a - x$, so soll

$$a : x = x : (a - x)$$

sein.

Zieht man an einen Kreis eine dem Durchmesser an Länge gleiche Tangente AB und durch den Endpunkt B derselben und den Mittelpunkt des Kreises die Secante, welche den Kreis in C und D schneiden möge, so ist BD in C nach dem goldenen Schnitt getheilt, denn es ist



$$BD : AB = AB : BC,$$

und da $AB = CD$ ist nach der Construction, auch

$$BD : CD = CD : BC. \quad (1)$$

Zieht man daher DA und darauf CX parallel zu DA bis zum Durchschnitt X mit AB, so ist auch AB in X nach dem goldenen Schnitt getheilt, denn es ist

$$AB : AX = BD : CD \text{ und } AX : BX = CD : BC,$$

mithin zufolge der Gleichung (1) auch

$$AB : AX = AX : BX.$$

Hiernach lässt sich leicht eine Auflösung der Aufgabe finden, eine gegebene Strecke AB nach dem goldenen Schnitt zu theilen.

Beachtet man noch, dass aus der vorstehenden Gleichung

$$AB : AX = BD : CD$$

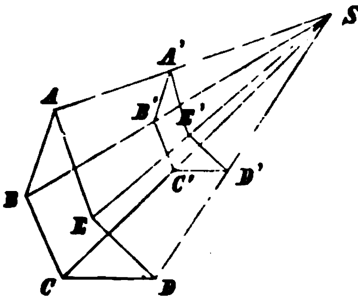
und der anderen

$$AB : BC = BD : AB$$

unter Berücksichtigung von $CD = AB$ folgt, dass $AX = BC$ ist, so lässt sich diese Auflösung noch dahin vereinfachen, dass man, nachdem auf der zu theilenden Strecke AB in A die Senkrechte AM gleich $\frac{1}{2}$ AB errichtet, M mit B verbunden und MC gleich AM auf MB abgeschnitten worden, man nur mit BC um B den Kreis zu beschreiben hat. Der Durchschnittspunkt Y des letzteren mit AB theilt diese Strecke in der verlangten Weise, so dass BY der grössere Abschnitt ist.

§ 51. Aehnlichkeit der Polygone.

1. Verbindet man einen beliebigen Punkt S in der Ebene einer geradlinigen Figur mit allen Eckpunkten der letzteren, theilt darauf sämmtliche Verbindungslinien in einem und demselben, sonst beliebigen Verhältniss, derart dass alle Theilpunkte entweder auf den Verbindungsstrecken selbst oder dass alle auf deren Verlängerungen über die Eckpunkte jener Figur, oder endlich dass alle auf den Verlängerungen über den Punkt S liegen, so bilden die Theilpunkte die Eckpunkte einer zweiten Figur von ebensoviel Seiten wie die erstere. Es sei $ABCDE$ die eine, $A'B'C'D'E'$ die andere dieser Figuren, also $SA' : A'A = SB' : B'B$, u. s. w., mithin auch

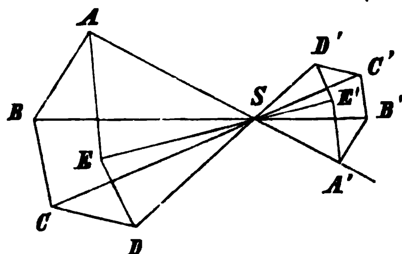


$$SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC = \cdots,$$

so folgt aus § 36, (4), dass je zwei homologe Seiten $A'B'$, AB, ferner $B'C'$, BC u. s. w. einander parallel sind.

Liegt hierbei der Punkt S auf den Verlängerungen der Verbindungslinien

AA', BB' u. s. w., so sind je zwei dieser parallelen Seiten gleichgerichtet, liegt dagegen S auf den Strecken AA', BB' u. s. w. selbst, so sind je zwei homologe Seiten entgegengesetzt gerichtet.



Hieraus folgt weiter nach Paragraph 14, (6), dass je zwei homologe Winkel der beiden Figuren einander gleich sind. Ferner ist nach § 36, (3)

$$A'B' : AB = SB' : SB;$$
$$B'C' : BC = SB' : SB,$$

also auch
$$A'B' : AB = B'C' : BC.$$

Ebenso ergiebt sich $B'C' : BC = C'D' : CD \,(= SC' : SC)$, u. s. w., und hieraus dass je zwei homologe Seiten der beiden Figuren zu einander in demselben Verhältniss stehen.

Hiernach kann jede dieser Figuren, ganz ebenso wie bei ähnlichen Dreiecken der Fall war, als eine Wiederholung der anderen in verkleinertem oder vergrössertem Maassstabe angesehen werden, da jede Seite der einen aus der homologen Seite der anderen durch Verkleinerung oder Vergrösserung in demselben Verhältniss entstanden gedacht werden kann und dabei auch die gegenseitige Lage je zweier homologen Seiten, wie sie durch die Winkel bestimmt wird, dieselbe geblieben ist. Man nennt allgemein Figuren, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, einander **ähnlich**, d. h. übereinstimmend in der Gestalt, und kann nun das Resultat der obigen Untersuchung in dem Satze aussprechen, dass je zwei Figuren, deren homologe Eckpunkte auf Strahlen liegen, die von einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte ausgehen, falls zugleich die Verbindungsstrecken je zweier homologer Eckpunkte durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt sämmtlich in demselben Verhältniss getheilt werden, einander ähnlich sind.

2. Umgekehrt lassen sich jede zwei ähnliche n-Ecke in solche Lage zu einander gebracht denken, dass je zwei homologe Seiten derselben einander parallel sind, und in diesem Fall schneiden die Verbindungslinien je zweier homologen Eckpunkte einander in einem und demselben Punkt und werden durch letzteren im Verhältniss der homologen Seiten der n-Ecke getheilt; denn ist

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' \text{ u. s. w.,}$$
$$\text{und } \angle ABC = \angle A'B'C', \ \angle BCD = \angle B'C'D' \text{ u. s. w.,}$$

vorausgesetzt, so kann man die Figur $A'B'C'D' \ldots$ stets so gestellt denken, dass $A'B'$ parallel zu AB liegt, und wenn man durch A und A', sowie durch B und B', C und C' u. s. w. die Geraden zieht, der Winkel $B'BC = ABC - ABB'$ und der Winkel $BB'C' = A'B'C' - A'B'B$, also, da nach Voraussetzung $ABC = A'B'C'$, und da ferner ABB' und $A'B'B$ als correspondirende oder Wechselwinkel an parallelen Geraden einander gleich sind, auch $BB'C' = B'BC$ sein muss. Hieraus folgt aber, dass auch $B'C'$ parallel zu BC ist. Daher ist ferner der Winkel BCC' gleich $B'C'C$ und also auch $BCD - BCC' = B'C'D' - B'C'C$ oder $C'CD = CC'D'$, woraus wieder folgt, dass CD parallel zu $C'D'$ ist. Indem man in dieser Weise bis zum letzten Seitenpaare fortschreitet, findet man, dass je zwei homologe Seiten der beiden Figuren einander parallel sind. Es schneide nun BB' selbst oder in ihrer Verlängerung die durch A und A' gehende Gerade

in einem Punkte S, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABS, $A'B'S'$ — welche durch die Gleichheit der homologen Winkel bewiesen wird — oder aus einem Satze über parallele Transversalen des Dreiecks, dass

$$AS : A'S = AB : A'B'$$

ist. Schneidet ferner die durch C und C' gehende Gerade AA' in S', so ergiebt sich in entsprechender Weise

$$AS' : A'S' = BC : B'C',$$

und da nach der Voraussetzung

$$BC : B'C' = AB : A'B'$$

ist, so muss auch

$$AS' : A'S' = AS : A'S$$

sein. Es liegen aber S und S' entweder beide auf AA' selbst oder beide auf deren Verlängerung, und da sie AA' in demselben Verhältniss theilen, dies aber, wie früher gezeigt, nicht durch verschiedene Punkte in einer der eben erwähnten Lagen geschehen kann, so muss S' mit S zusammenfallen. In gleicher Weise ergiebt sich, dass auch DD' die AA', und ebenso, dass jede derartige Verbindungslinie diese letztere Gerade in demselben Punkte S treffen muss. Hiermit ist gezeigt, dass alle diese Verbindungslinien zweier homologen Eckpunkte einander in demselben Punkte schneiden, und ausserdem zeigt der vorstehende Beweis, dass

$$AS : A'S = BS : B'S = CS : C'S = \ldots = AB : A'B' \text{ u. s. w. ist.}$$

Zwei ähnliche Figuren, welche in der gedachten Stellung zu einander sind, heissen **ähnlich liegend**; auch sagt man, dass dieselben sich in **perspektivischer Lage** zu einander befinden. Der Punkt S heisst dabei der **Aehnlichkeitspunkt** der beiden Figuren.

3. Bei der ähnlichen Lage zweier Figuren sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, welche auch schon im Vorstehenden als verschiedene Möglichkeiten Beachtung gefunden haben. Liegt der Aehnlichkeitspunkt S auf den Verlängerungen sämmtlicher Verbindungsstrecken AA', BB' u. s. w., so sind je zwei parallele Seiten der beiden Figuren als gleichgerichtet, liegt er dagegen auf jenen Strecken selbst, so sind je zwei parallele Seiten als entgegengesetzt gerichtet zu betrachten. Im ersteren Falle sagt man, dass die beiden Figuren direkt ähnlich, im letzteren, dass dieselben umgekehrt ähnlich liegen, und man nennt ihren Aehnlichkeitspunkt entsprechend einen äusseren oder inneren.

Die vorstehenden Erklärungen und Sätze gelten selbstverständlich für Dreiecke eben so gut wie für Polygone. — Halbirt ein innerer Aehnlichkeitspunkt zweier Figuren die Verbindungsstrecken der homologen Eckpunkte, so sind die Figuren congruent. Die Congruenz erscheint somit als besonderer Fall der Aehnlichkeit. Die in solcher Lage befindlichen congruenten Figuren können durch Drehung der einen um den Aehnlichkeitspunkt zur Deckung gebracht werden. Zwei congruente Figuren können auch in solche Lage zu einander gebracht werden, dass je zwei homologe Seiten parallel und gleichgerichtet sind. In diesem Falle sind alle Verbindungsstrecken je zweier homologen Eckpunkte einander parallel, und man kann daher sagen, dass der Aehnlichkeitspunkt der Figuren im Unendlichen liege. Jene Verbindungsstrecken sind dabei auch einander gleich, und man kann die Figuren zur Deckung bringen, indem man eine derselben so verschiebt, dass ihre Seiten ihren ursprünglichen Lagen parallel bleiben. — Die Beweise dieser Sätze können dem Leser überlassen bleiben. Auch ist von selbst klar, dass man die vorstehenden Untersuchungen benutzen kann, um zu gegebenen Figuren ähnliche und ähnlich liegende, sowie congruente Figuren zu zeichnen.

4. Jede Gerade, welche durch den Aehnlichkeitspunkt zweier ähnlichen Figuren geht, heisst ein Aehnlichkeitsstrahl der letzteren.

Theilt man zwei homologe Seiten zweier ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren in demselben Verhältniss, so geht die Verbindungsgerade der Theilpunkte durch den Aehnlichkeitspunkt und die Verbindungsstrecke wird durch letzteren im Verhältniss der homologen Seiten getheilt. Der Beweis hierfür kann ganz in derselben Weise geführt werden, wie derjenige für den Durchschnitt der Verbindungslinien der homologen Eckpunkte. Durch indirekte Beweisführung lässt sich dann hieraus folgern, dass jeder Aehnlichkeitsstrahl, welcher die eine der beiden Figuren schneidet, auch die andere schneiden muss, und zwar auf homologen Seiten, und dass diese letzteren durch die Durchschnittspunkte in gleichem Verhältniss getheilt werden. Sind $M'N'$ und MN die innerhalb der Figuren fallenden Abschnitte des betreffenden Aehnlichkeitsstrahles, so folgt aus

$$M'S : MS = N'S : NS = A'B' : AB,$$

dass auch $(M'S \mp N'S) : (MS \mp NS) = A'B' : AB$

ist, d. h. die innerhalb der Figuren fallenden Abschnitte eines Aehnlichkeitsstrahles verhalten sich zu einander wie zwei homologe Seiten.

Werden allgemein auf einem Aehnlichkeitsstrahle zwei Punkte P, P' so angenommen, dass ihre Abstände von dem Aehnlichkeitspunkt S sich zu einander verhalten, wie zwei homologe Seiten, und liegen P und P', falls die beiden Figuren direkt ähnlich sind, auf derselben Seite, falls sie entgegengesetzt ähnlich sind, auf verschiedenen Seiten von S, so sollen die Punkte P, P' homologe Punkte der beiden ähnlichen Figuren heissen. Für solche ergeben sich leicht folgende Sätze:

Der Abstand des Punktes P von jedem Eckpunkt, z. B. A, der zugehörigen Figur verhält sich zum Abstand des Punktes P' von dem homologen Eckpunkt A' der anderen Figur, wie zwei homologe Seiten, und die Verbindungslinie PA ist der Verbindungslinie $P'A'$ parallel. Allgemein ist die Verbindungsstrecke zweier zu der einen Figur gehörigen Punkte der Verbindungsstrecke der homologen Punkte der anderen Figur parallel und verhält sich zu ihr, wie eine Seite der ersteren zur homologen Seite der letzteren Figur. Beide Verbindungslinien bilden mit jedem Aehnlichkeitsstrahl, und ebenso bilden je zwei solche homologe Linien beider Figuren mit einander gleiche Winkel. Zieht man umgekehrt von jedem von zwei homologen Punkten zweier ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren Strecken, welche sich zu einander wie zwei zugehörige homologe Seiten verhalten und einander parallel sind, und sind diese Strecken von jenen Punkten aus bei direkt ähnlicher Lage der Figuren gleichgerichtet, bei entgegengesetzt ähnlicher Lage entgegengesetzt gerichtet, so liegen auch die Endpunkte der Strecken auf einem Aehnlichkeitsstrahl.

Insbesondere sind daher auch je zwei homologe Diagonalen zweier solchen Figuren einander parallel, verhalten sich zu einander wie zwei homologe Seiten und bilden mit jedem Aehnlichkeitsstrahl, sowie mit je zwei homologen Seiten und mit je zwei anderen homologen Diagonalen derselben Figur gleiche Winkel.

5. Befinden sich zwei ähnliche Figuren nicht in ähnlicher Lage, so gehört gleichwol zu jedem Punkte und zu jeder Linie, welche man zu der einen Figur annimmt, ein homologer Punkt, bezw. eine homologe Linie der anderen Figur, da man sich stets beide Figuren in ähnliche Lage und nach Bestimmung der homologen Gebilde in die ursprüngliche zurückgebracht denken kann. Da sich

bei letzterer Bewegung die Lage der homologen Gebilde in einer und derselben Figur zu einander nicht ändert, so erhält man die homologen Punkte P, P' auch unmittelbar bei der nicht parallelen Lage, wenn man P' so bestimmt, dass seine Verbindungslinien mit den Eckpunkten der zugehörigen Figur sich zu den Verbindungslinien von P mit den homologen Eckpunkten wie zwei homologe Seiten verhalten, oder dass die entsprechenden dieser Verbindungslinien mit den homologen Seiten der Figuren gleiche Winkel bilden. Ueberhaupt bleiben von den vorstehend entwickelten Sätzen alle diejenigen bestehen, welche von den Längen homologer Linien und der Lage je zweier in derselben Figur gegeneinander, also ohne Beziehung auf den Aehnlichkeitspunkt handeln.

Als besondere Fälle oder Folgerungen (welche selbstverständlich auch unmittelbar, also ohne Hinzunahme der Theorie der Aehnlichkeitspunkte bewiesen werden können) verdienen noch die folgenden hervorgehoben zu werden:

Theilt man jedes von zwei ähnlichen Polygonen durch die von zwei homologen Eckpunkten ausgehenden Diagonalen in Dreiecke, so sind je zwei gleichliegende von diesen Dreiecken einander ähnlich. (1)

Lassen sich umgekehrt zwei Polygone durch Diagonalen in gleichviele Dreiecke zerlegen, welche paarweise einander ähnlich sind, und liegen dabei auch je zwei ähnliche Dreiecke in gleicher Weise zu den übrigen desselben Polygons (liegen dieselben also in gleicher Reihenfolge mit je zwei homologen Seiten, bezw. homologen Eckpunkten aneinander), so sind die Polygone ähnlich. (2)

Alle regelmässigen Figuren von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich (3). Dies folgt unmittelbar daraus, dass in Folge der Gleichheit der Seiten jeder einzelnen Figur auch jede Seite der einen zu jeder Seite der anderen in demselben Verhältniss steht, und dass alle Winkel beider Figuren einander gleich sind, da die Grösse jedes Winkels eines regelmässigen n-Ecks gleich $\frac{2n-4}{n}$ Rechten, also unveränderlich bestimmt ist. Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich ferner:

Die Mittelpunkte je zweier regelmässigen n-Ecke sind homologe Punkte derselben. Die grossen Radien zweier regelmässigen n-Ecke verhalten sich zu einander wie die kleinen Radien und wie zwei Seiten. Die Bestimmungsdreiecke regelmässiger Figuren von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

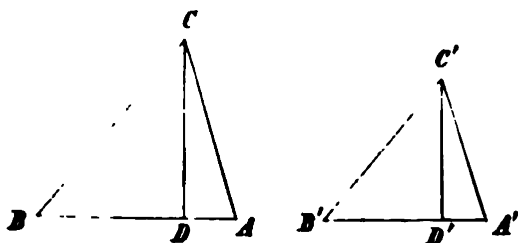
§ 52. Die Umfänge und die Flächeninhalte ähnlicher Figuren.

1. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie die homologen Seiten derselben (1), denn sind $ABCD\ldots$ und $abcd\ldots$ zwei ähnliche Figuren, so ergiebt sich aus

$$AB:BC:CD:\ldots = ab:bc:cd:\ldots$$

nach Arithm. Anhang 3 ohne Weiteres

$$AB+BC+CD+\ldots : ab+bc+cd+\ldots = AB:ab.$$



Um auch die Verhältnisse der Flächeninhalte ähnlicher Figuren zu bestimmen, seien zunächst ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, welche in einem Winkel über-

einstimmen. Ist also $\angle A = \angle A'$ und fällt man die Höhen CD, $C'D'$, so stimmen die Dreiecke ACD, $A'C'D'$ ausser in jenen Winkeln auch in den rechten bei D und D' überein, sind also einander ähnlich, und es ist also

$$CD : C'D' = AC : A'C'.$$

Da nun $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot CD}{A'B' \cdot C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CD}{C'D'}$

ist, so erhält man, wenn man hier für $\frac{CD}{C'D'}$ das gleiche Verhältniss $\frac{AC}{A'C'}$ einsetzt,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'},$$

d. h. die Flächen von Dreiecken, welche in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten. (2)

Stimmen die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ noch in einem zweiten Winkel überein, sind dieselben also ähnlich, so kann man noch das Verhältniss $\frac{AC}{A'C'}$ durch das gleiche $\frac{AB}{A'B'}$ ersetzen und erhält

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2},$$

d. h. die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Man kann die Richtigkeit dieses Satzes für ganze Verhältnisszahlen der Seiten leicht durch Theilung des grösseren von zwei ähnlichen Dreiecken in dem kleineren congruente veranschaulichen. Halbirt man alle Seiten eines Dreiecks und verbindet je zwei Halbirungspunkte mit einander, so lässt sich durch die entstehende Figur leicht zeigen, dass durch Verdoppelung der Seiten eines Dreiecks der Inhalt desselben vervierfacht wird; ähnlich kann man ein Dreieck, dessen Seiten dreimal so gross sind als die homologen Seiten eines anderen, in neun dem letzteren congruente Dreiecke theilen, u. s. w.

2. Sind nun allgemein $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ zwei ähnliche n-Ecke, und theilt man dieselben durch Diagonalen, welche von homologen Eckpunkten A, A', ausgehen, in Dreiecke, so ist, da letztere paarweise einander ähnlich sein müssen,

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2,$$
$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = DC^2 : D'C'^2 = AB^2 : A'B'^2,$$

denn aus der durch die Aehnlichkeit der n-Ecke bedingten Proportion

$$DC : D'C' = AB : A'B'$$

folgt durch Quadriren beider Seiten

$$DC^2 : D'C'^2 = AB^2 : A'B'^2.$$

In derselben Weise fortschreitend erhält man

$$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = DE^2 : D'E'^2 = AB^2 : A'B'^2,$$

u. s. w. Also ist

$$\triangle ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E' = \ldots = AB^2 : A'B'^2,$$

und mithin nach Arithm. Anhang 3 auch

$$\triangle ABC + ACD + ADE + \ldots : A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' + \ldots = AB^2 : A'B'^2,$$

d. i. $$ABCDE\ldots : A'B'C'D'E'\ldots = AB^2 : A'B'^2,$$

d. h. die Flächeninhalte ähnlicher geradliniger Figuren verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer homologen Seiten (3), oder noch allgemeiner, wie die Quadrate irgend welcher homologer Strecken derselben.

Insbesondere verhalten sich also auch die Flächeninhalte regelmässiger Figuren von gleicher Seitenzahl wie die Quadrate ihrer grossen, und wie die Quadrate ihrer kleinen Radien.

Kapitel 5.
Von dem Messen und Theilen der Kreislinien. Winkelmessung. Berechnung des Umfangs und des Inhalts von Kreisen.

§ 53. Vom Messen der Winkel.

1. Ueber das Messen von Winkeln wurde aus praktischen Gründen bereits in der Einleitung, Seite 173, angegeben, dass dasselbe mittelst des rechten Winkels und seiner Unterabtheilungen zu geschehen pflege. Während die Bestimmung der Maasse für Strecken und in Folge dessen auch derjenigen für Flächen der Willkür anheimgegeben erscheint und daher dieselben für den Gebrauch des praktischen Lebens durch gesetzliche Anordnungen (Meter, Centimeter u. dgl.), jedoch in verschiedenen Ländern in verschiedener Weise festgesetzt wurden, existirt für die Winkel ein in der Natur derselben begründetes, also ein Naturmaass, welches daher auch überall in gleicher Weise gebraucht wird. Nur über die Bestimmung der als kleinere Maasse dienenden aliquoten Theile dieses natürlichen Maasses, des rechten Winkels, können Verschiedenheiten bestehen, doch ist die Eintheilung desselben in 60 Minuten zu je 60 Secunden bis jetzt die fast allgemein gebräuchliche geblieben.

Die wirkliche Ausführung des Messens von Winkeln mittelst dieser Maasse wurde jedoch bisher nicht gelehrt, vielmehr die Resultate vorgenommener Messungen, wo solche behufs der beispielsweisen Erläuterung vorgetragener Lehren benutzt wurden, als gegeben vorausgesetzt. Selbst die Gewinnung jener Maasseinheiten wurde durch das bisherige noch nicht vollständig ermöglicht, denn es ist zwar die Construction eines rechten Winkels und der durch wiederholtes Halbiren desselben entstehenden Theile, sowie auch für den rechten Winkel insbesondere die Theilung in drei gleiche Theile gelehrt worden, allein man erhält auf diesem Wege nur Winkel von 90°, 60°, 45°, 30°, 15° und solche, welche Vielfache dieser Winkel oder Bruchtheile von Geraden enthaltende Hälften, Viertel u. s. w. derselben sind. Die Construction beispielsweise eines Winkels von einem Grad ist hiernach noch nicht möglich gewesen.

2. Setzen wir zunächst voraus, dass ein als Maasseinheit anderer Winkel dienender Winkel gegeben sei, so ist die Ausführung des Messens der letzteren durch unmittelbares wiederholtes Abtragen des Maasses — ähnlich wie dies bei dem Messen von Flächen der Fall war — nicht bequem. Man pflegt desshalb die Winkelmessung auf andere Weise auszuführen, welche zunächst erläutert werden soll.

Beschreibt man um den Scheitel C eines Winkels mit beliebigem Radius einen Kreis, sodass also jener Winkel ein Centriwinkel dieses Kreises wird, so gehört zu dem Centriwinkel ein zwischen seinen Schenkeln liegender Kreisbogen, dessen Grösse von der des ersteren abhängig sein muss. Bereits in § 27, 3 wurde der Satz bewiesen, dass zu gleichen Centriwinkeln desselben Kreises oder gleicher Kreise auch gleiche Bogen gehören. Dieser Satz liefert das Mittel, auch ungleiche Centriwinkel mittelst ihrer Bogen zu vergleichen, denn denkt man sich zwei beliebige Centriwinkel eines Kreises durch ein gemeinschaftliches Maass in gleiche Theile getheilt, deren Anzahlen bezüglich durch m und n bezeichnet werden mögen, so müssen zufolge des genannten Satzes auch die zu jenen Centriwinkeln gehörigen Bogen in bezüglich m und n einander gleiche kleinere Kreis-

bogen, also durch ein gemeinschaftliches Maass getheilt sein. Somit ist das Verhältniss der Längen der beiden ganzen Kreisbogen, d. i. das Verhältniss $m:n$ ihrer Maasszahlen gleich dem Verhältniss der zu ihnen gehörigen Centriwinkel. Auch wenn letztere kein gemeinschaftliches Maass haben, gelangt man durch ein entsprechendes Verfahren wie früher in analogen Fällen dahin, dass das Verhältniss der Kreisbogen ebenso wie das der Centriwinkel sich zwischen für beide Verhältnisse übereinstimmende Grenzen bringen lässt, die man einander so weit genähert denken kann, dass ihr Unterschied kleiner ist als jede angebbare kleine Zahl. Man ist daher auch hier berechtigt, die Werthe der beiden Verhältnisse als einander gleiche Irrationalzahlen zu betrachten. Somit gilt allgemein der Satz:

Centriwinkel desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Kreisbogen. (1)

3. Hieraus folgt, dass das Verhältniss zweier Kreisbogen sich nicht ändert, wenn auch der Radius des Kreises grösser oder kleiner wird, falls nur die zugehörigen Centriwinkel dieselben Grössen behalten. Das Verhältniss zweier Centriwinkel kann also stets durch dasjenige der zugehörigen Bogen ersetzt werden und umgekehrt und ist dabei unabhängig von der Länge des Radius, welche nur die absoluten Längen der beiden Kreisbogen, dagegen nicht das Verhältniss derselben zu einander beeinflussen kann.

Da nun die Maasszahl einer Grösse nichts anderes ist, als der Werth des Verhältnisses derselben zu einer als Maass dienenden gleichartigen Grösse, so können die Messungen von Winkeln durch diejenigen von Kreisbogen ausgeführt werden und umgekehrt. Als Maass für eine derartige Messung ist bei den Kreisbogen der zum rechten Centriwinkel gehörige Bogen desselben Kreises, welcher den Namen Quadrant erhalten hat, bezw. die durch Theilung desselben in 90 gleiche Theile u. s. w. entstehenden kleineren Bogen zu wählen. Die ganze Kreislinie wird hiernach in 360 gleiche Theile getheilt gedacht. Jeder solche Theil erhält auch hier den Namen Grad, insbesondere Bogengrad zum Unterschied von Winkelgrad, und kann entsprechend wie dieser in 60 Bogenminuten und $60 \cdot 60$ Bogensecunden getheilt gedacht werden.

Die so gewonnenen Maasse für Kreisbogen sind für verschiedene Kreise verschieden. Jeder Kreisbogen wird hiernach durch einen anderen Bogen desselben oder eines gleichen Kreises gemessen; für jeden verschiedenen Radius ist daher die Maasseinheit der Bogen besonders zu bestimmen, und es können auf diese Weise nicht Kreisbögen verschiedener Radien mit einander verglichen werden. Die so gewonnenen Maasszahlen von Kreisbogen geben, mit anderen Worten gesagt, nicht die absoluten Längen derselben (z. B. in Beziehung auf das auch für Strecken dienende Maass), sondern nur die Verhältnisse derselben zur Länge eines bestimmten Bogens desselben Kreises an.

Die Gleichmässigkeit in der vorstehend angegebenen Theilung des Kreises und derjenigen der Winkel führt, da jeder Centriwinkel sich zum Winkelgrad, wie der zugehörige Bogen zum Bogengrad verhalten muss, zu dem Satze:

Jeder Bogen eines Kreises hat dieselbe Maasszahl in Bogenmaass, wie sein Centriwinkel in Winkelmaass, (2)

und es kann somit die Zahl der Winkel-Grade, -Minuten und -Secunden eines jeden Winkels ohne Weiteres durch die der Bogen-Grade u. s. w. eines zugehörigen Kreisbogens ersetzt werden, und umgekehrt.

Daher bedient man sich in der Praxis zum Messen und Auftragen von

Winkeln stets eines entsprechend getheilten Kreises (von beliebigem Radius), dessen Mittelpunkt auf den Scheitel des Winkels gelegt wird. Die nähere Erörterung der betreffenden Instrumente, wie des Transporteurs, des Theodolits u. dgl., findet man in den betreffenden Schriften über praktische Geometrie. Die Einrichtung und der Gebrauch des zum Zeichnen benutzten, den gewöhnlichen Reisszeugen beigegebenen Transporteurs, eines getheilten Halbkreises, dürfte übrigens durch das oben Gesagte unmittelbar verständlich sein.

§ 54. Vom Theilen der Kreisbogen.

1. Die Aufgabe der Theilung und Messung von Winkeln ist hiernach zunächst zurückgeführt auf diejenige der Theilung von Kreisbogen, und ebenso kann man umgekehrt diese, sofern die Theilung der Winkel zuerst gezeigt worden, auf letztere zurückführen.

Die Theilung von Kreisbogen auf elementar-geometrischem Wege unterliegt daher denselben Schwierigkeiten, wie diejenige von Winkeln. Eine allgemeine Auflösung der Aufgabe kann auch hier nur für die Theilung in zwei und die durch wiederholtes Halbiren aus diesen erhaltenen, also in 2^n gleiche Theile gegeben werden, und schon die allgemeine Theilung eines Kreisbogens in drei gleiche Theile ist, ebenso wie die Trisection des Winkels, mittelst alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal nicht ausführbar. Zur Halbirung eines Kreisbogens hat man nur nöthig, um jeden seiner Endpunkte mit demselben beliebigen Radius und auf derselben Seite des Bogens je einen weiteren Kreisbogen zu beschreiben und den Durchschnittspunkt der letzteren mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises oder auch, z. B. wenn der Mittelpunkt nicht construirt ist, mit dem ebenso bestimmten zweiten Durchschnittspunkt der beiden Hülfsbogen zu verbinden, denn diese Linie halbirt nach § 33, (4) den zugehörigen Centriwinkel.

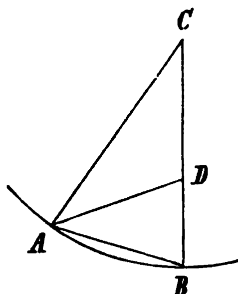
2. Anders als mit der Theilung beliebiger Kreisbogen verhält es sich mit dem besonders wichtigen Fall, dass die ganze Kreislinie in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll: in demselben sind auch noch anderweite Theilungen möglich, ebenso wie beispielsweise die Trisection des Winkels in dem besonderen Fall, dass letzterer ein rechter ist. Um den ganzen Kreis in n gleiche Theile theilen zu können, ist es erforderlich und hinreichend, zu zeigen, wie sich ein Winkel construiren lässt, dessen Grösse $\frac{360^\circ}{n}$ beträgt, denn n solche Centriwinkel würden aneinander gelegt zusammen 360°, und der zu einem solchen gehörige Bogen würde also den $n$ten Theil des Kreises betragen. Ein solcher Winkel lässt sich nun zwar innerhalb der Grenzen der Elementar-Geometrie nicht für jeden Werth von n, aber doch für einige einzelne Werthe, und zwar gerade für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden construiren.

Für $n = 2$, d. h. für die Theilung des ganzen Kreises in zwei gleiche Theile, hat man nur einen Durchmesser, für $n = 4$ zwei zu einander senkrechte Durchmesser desselben zu ziehen.

Für $n = 6$ trage man eine Sehne gleich dem Radius sechsmal nach einander in den Kreis ein. Verbindet man nämlich die Endpunkte einer solchen Sehne mit dem Mittelpunkt, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck, mithin beträgt der zu ihr gehörige Centriwinkel 60°, d. i. den sechsten Theil von 360°.

Für $n = 10$ theile man einen Radius nach dem goldenen Schnitt und trage den grösseren Abschnitt zehnmal nach einander als Sehne in den Kreis ein

Soll nämlich der Bogen AB der zehnte Theil des Kreises, also der zugehörige Centriwinkel ACB gleich 36° sein, so erhält man durch Ziehen der Sehne AB ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem jeder der Winkel an der Grundlinie AB gleich $\frac{1}{2}$ (180° — 36°) = 72°, also doppelt so gross als der Winkel an der Spitze ist. Halbirt man also den Winkel CAB, so ist, wenn D den Durchschnittspunkt der Halbirungslinie mit CB bezeichnet,



$$\angle CAD = \angle ACD, \text{ also } AD = CD.$$

Ebenso ist $\angle DAB = CAD = 36°$, und da $\angle CBA = 72°$ ist, auch $\angle ADB$ gleich 72°, mithin $AD = AB$. Daher ist schliesslich auch $AB = CD$. Die Halbirungslinie AD muss aber die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der anliegenden theilen, es ist also

$$AC : AB = CD : DB,$$

und mithin auch

$$CB : CD = CD : DB,$$

d. h. CB ist in D nach dem goldenen Schnitt getheilt, und AB ist dem grössern Abschnitt CD gleich. — Auch umgekehrt ergiebt sich, wenn $CB : CD = CD : DB$ und $AB = CD$ vorausgesetzt und AD gezogen wird, dass auch

$$AC : AB = AB : DB$$

sein muss. Da hiernach die Dreiecke ACB und BAD in einem Seitenverhältniss übereinstimmen, und da sie ausserdem den eingeschlossenen Winkel B gemeinsam haben, so sind diese Dreiecke ähnlich. Deshalb muss auch BAD gleichschenkelig, also $AB = AD = CD$, und daher $\angle DCA = \angle CAD$ sein. Bezeichnen wir der Kürze halber den Winkel DCA durch α, so ist auch jeder der Winkel DAB, DAC gleich α, mithin $CAB = 2\alpha$, also CBA ebenfalls gleich 2α, und die Summe der Winkel des Dreiecks ACB gleich 5α. Aus $5\alpha = 180°$ folgt $\alpha = 36°$, was zu beweisen war.

Für $n = 15$ hat man Centriwinkel von $\frac{360°}{15} = 24°$ zu construiren. Da nun $24 = 60 - 36$ ist, so hat man zu diesem Zweck nur die Differenz eines Sechstels und eines Zehntels der Peripherie zu zeichnen.

3. Aus den vorstehend angegebenen Theilungen des Kreises ergeben sich andere einerseits durch Zusammenfassen mehrerer gleicher Theile in einen, andererseits durch wiederholtes Halbiren der bereits vorhandenen Theile. Durch paarweises Zusammenfassen aneinder liegender Theile erhält man aus der Theilung in sechs diejenige in drei, und aus der Theilung in zehn diejenige in fünf gleiche Theile. Durch Halbiren sämmtlicher Theile ergiebt sich aus der Theilung in vier gleiche Theile die in acht, dann aus dieser die in sechzehn gleiche Theile, u. s. w. In gleicher Weise gelangt man von $n = 6$ auf $n = 12$, 24 u. s. w., von $n = 10$ auf $n = 20$, 40 u. s. w. und von $n = 15$ auf $n = 30$, 60 u. s. w. Allgemein ist man also mit Hülfe der obigen Theilungen im Stande, einen jeden ganzen Kreis in $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ und $15 \cdot 2^n$ gleiche Theile (für jeden ganzen Werth von n, einschliesslich der Null) zu theilen.

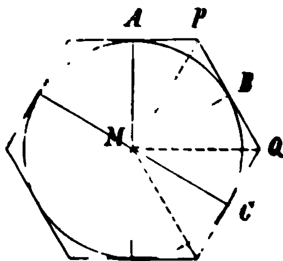
Auf diese Theilungen des Kreises beschränkte sich die Geometrie der Alten. Erst C. F. Gauss zeigte in seinen *disquisitiones arithmeticae* 1796, dass ausserdem die Theilung in alle diejenigen Anzahlen auf elementarem Wege möglich sei, welche in der Formel $2^n + 1$ enthalten sind, wenn dieselbe zugleich eine Primzahl angiebt, also für 17, 257 u. s. w. Derselbe erweiterte also die obigen vier Reihen von Theilungen der alten Geometer um eine unendlich

grosse Anzahl solcher Reihen, die allerdings nur theoretisches Interesse haben, und deren nähere Behandlung zu weit führt, um hier angegeben werden zu können. Alle sonst noch übrigen Theilungen des Kreises, also beispielsweise schon diejenige in sieben gleiche Theile, sind in den Elementen nicht möglich.

Es ist nach dem Vorstehenden auch möglich, ausser Winkeln von 90°, 60°, 45°, 30° solche von 36°, 18°, 15°, $18° - 15° = 3°$ und alle noch übrigen Vielfachen von 3° durch genaue Construction zu erhalten, dagegen ist eine solche Construction nicht für jede beliebige Maasszahl eines Winkels möglich. Auch die Theilung der Winkelmessinstrumente in die einzelnen Grade und deren Unterabtheilungen kann nicht mittelst geometrischer Construction durchgeführt werden; sie erfolgt in der Praxis auf mechanischem Wege durch eine sogenannte Theilmaschine. Auch mit dem Zirkel kann man durch mechanisches Probiren einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile mit mehr oder minder annähernder Genauigkeit theilen, und insofern diese Genauigkeit nicht geringer ist, als diejenige, welche auch bei mathematisch strenger Construction in der praktischen Ausführung wegen der unvermeidlichen Fehler der Instrumente, der Dicke der die Linien darstellenden Striche u. dgl. m. nur zu erreichen ist, kann jenes mechanische Verfahren die mathematische Construction in der Praxis völlig ersetzen.

§ 55. Construction regelmässiger Polygone.

1. Die Theilung der ganzen Peripherie in n gleiche Theile führt zunächst auf die Construction regelmässiger, einem Kreise ein- oder umbeschriebener Polygone. Ist nämlich die Peripherie in n gleiche Theile getheilt und verbindet man je zwei benachbarte Theilpunkte mit einander, so entsteht ein einbeschriebenes Polygon, dessen Seiten Sehnen gleicher Bogen, also einander gleich sind. Da ausserdem die Winkel dieses Polygons Peripheriewinkel auf gleichen Bogen, nämlich auf je einem aus $n - 2$ jener gleichen Theile bestehenden, sind, so ist das Polygon auch gleichwinkelig, also regelmässig. Es sei ferner durch jeden von n solchen Theilpunkten die Tangente an den Kreis gezogen und so ein umbeschriebenes n-Eck construirt. Aus der Gleichheit der Bogen AB, BC u. s. w. folgt dann die Gleichheit der Centriwinkel AMB, BMC u. s. w. Da nun jedes der Vierecke $APBM$, $BQCM$, ... durch die entsprechende Diagonale MP, MQ, ... in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, so sind auch die sämmtlichen Winkel AMP, PMB, BMQ u. s. w. als Hälften gleicher Winkel von gleicher Grösse. Nun ergiebt sich leicht auch die Congruenz je zweier mit einer Kathete aneinander liegender Dreiecke, wie PMB und BMQ, und damit schliesslich dass alle Seiten des Polygons PQ ... und ebenso alle Winkel desselben aus gleichvielen (nämlich je zwei) gleichen Stücken bestehen.



Hiernach ist man in den Stand gesetzt, sowol in als um jeden gegebenen Kreis jedes regelmassige Polygon zu beschreiben, dessen Seitenzahl in einer der Formeln $2 \cdot 2^n$, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$ enthalten ist, oder die Seite eines solchen regelmassigen Polygons zu construiren, wenn der Radius des ihm umbeschriebenen sowie wenn der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises gegeben ist.

2. Soll dagegen ein solches Polygon uber einer gegebenen Seite construirt, oder soll — was auf gleichem Wege geschehen kann — zu der gegebenen Seite

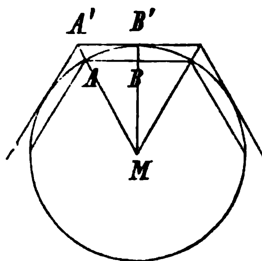
der eine oder der andere der beiden Radien gefunden werden, so kann man sich der Aehnlichkeit aller regelmässigen Polygone von derselben Seitenzahl bedienen, indem man zuerst in oder um einen mit beliebigem Radius construirten Kreis nach der vorhergehenden Anleitung ein entsprechendes Polygon und dann zu diesem über der gegebenen Seite ein ähnliches zeichnet. Dieses Verfahren gestattet übrigens wesentliche Abänderungen und Vereinfachungen, welche sich leicht ergeben. So genügt es zunächst zu einem beliebig gewählten Radius nur eines der durch eine Seite und zwei Radien des einbeschriebenen n-Ecks begrenzten gleichschenkeligen Dreiecke und dann mittelst der gleichen Winkel zu letzterem ein ähnliches Dreieck über der gegebenen Seite zu zeichnen. Die Spitze des letzteren ist der Mittelpunkt, sein Schenkel der Radius des dem gesuchten Polygon umbeschriebenen Kreises, welchem dann durch wiederholtes Eintragen der Seite als Sehne dieses Polygon einbeschrieben werden kann. Ist die Seite des verlangten n-Ecks nur der Länge und nicht auch der Lage nach gegeben, so kann man das Verfahren in leicht ersichtlicher Weise noch weiter vereinfachen.

3. Insbesondere lassen sich ferner folgende Aufgaben ohne Weiteres lösen:

Zu einem gegebenen, einem Kreise einbeschriebenen regelmässigen n-Eck ein demselben Kreise einbeschriebenes regelmässiges $2n$-Eck zu zeichnen. Man hat hierzu nur jeden der Bogen des Kreises, welche zwischen aufeinanderfolgenden Eckpunkten des n-Ecks liegen, zu halbiren und jeden der Halbirungspunkte mit den beiden benachbarten Eckpunkten des n-Ecks zu verbinden. Die beiden Polygone liegen dann so zu einander, dass die grossen Radien des $2n$-Ecks zur Hälfte mit den grossen Radien des n-Ecks zusammenfallen, zur anderen Hälfte auf den Seiten des letzteren senkrecht stehen, sie halbiren und die kleinen Radien des n-Ecks als Theile in sich enthalten.

Umgekehrt kann man durch Verbinden der abwechselnden Eckpunkte eines gegebenen, einem Kreise einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks ein demselben Kreise einbeschriebenes regelmässiges n-Eck zeichnen.

Zu jedem gegebenen, einem Kreise einbeschriebenen regelmässigen n-Eck erhält man ferner ein demselben Kreise umbeschriebenes regelmässiges n-Eck, wenn man durch die Eckpunkte des ersteren die Tangenten an den Kreis zieht. Die beiden Polygone liegen dann so zu einander, dass die Eckpunkte des einbeschriebenen die Seiten des umbeschriebenen halbiren, die grossen Radien des ersteren also die kleinen Radien des letzteren sind. Halbirt man dagegen die durch die Eckpunkte der einbeschriebenen Figur bestimmten Bogen und zieht durch die Halbirungspunkte die Tangenten, so muss, da diese Halbirungspunkte unter sich ebenfalls den Kreis in n gleiche Theile theilen, wieder ein umbeschriebenes regelmässiges n-Eck entstehen, aber dasselbe hat gegen das einbeschriebene eine andere Lage als vorher. Diese Construction ist deshalb bemerkenswerth, weil jetzt je zwei homologe Seiten der beiden Figuren, weil zu derselben Geraden senkrecht, einander parallel sind. Die kleinen Radien derselben fallen also paarweise in dieselben Linien, und da die Winkel AMB, $A'MB'$ der Bestimmungsdreiecke in beiden n-Ecken gleich gross sind, so müssen auch je zwei grosse Radien MA, MA' in dieselbe Gerade fallen, oder je zwei homologe Eckpunkte liegen mit dem Mittelpunkte des Kreises in gerader Linie.



§ 56. Berechnung regelmässiger Polygone.

1. Jeder der im Vorhergehenden behandelten Constructionsaufgaben lässt sich eine entsprechende Rechnungs-Aufgabe zur Seite stellen, welche die Berechnung der vorher construirten Grössen aus den jetzt durch ihre Maasszahlen gegebenen Bestimmungsstücken verlangt. Es werde daher zunächst verlangt, aus dem gegebenen Radius eines Kreises die Seiten derjenigen demselben einbeschriebenen Polygone zu berechnen, deren Construction sich vorher als möglich ergeben hat.

Die Seite des einbeschriebenen Quadrats ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten beide gleich dem gegebenen Radius r sind. Durch den pythagoreischen Lehrsatz ergiebt sich demnach für diese Seite

$$s = \sqrt{r^2 + r^2}, \text{ oder } s = r\sqrt{2}.$$

Die Seite des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks ist dem Radius gleich, man hat hier also die Gleichung

$$s = r.$$

Die Seite des einbeschriebenen regelmässigen Zehnecks bestimmt sich, entsprechend dem Gesetze der Theilung des Radius nach dem goldenen Schnitt, durch die Gleichung

$$r : s = s : (r - s).$$

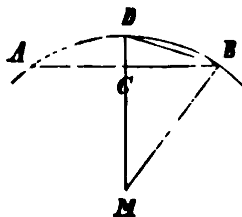
Die Auflösung derselben auf die Unbekannte s führt mittelst der Umformungen $s^2 = r^2 - rs$, $s^2 + rs = r^2$ auf

$$s = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} \text{ oder } s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Die Berechnung der Seite des Fünfzehnecks, welche sich mit Hülfe des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes ausführen lässt, liefert ein complicirteres Resultat, und da dieselbe kein praktisches Interesse bietet, so mag sie hier übergangen werden.

2. Aus diesen Werthen der Seiten der fundamentalen Polygone erhält man diejenigen der Seiten derjenigen Polygone, welche durch Verdoppelung der Seitenzahlen bestimmt werden, mittelst des Resultats der folgenden Aufgabe, welche der Construction eines einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks zu einem gegebenen einbeschriebenen regelmässigen n-Eck entspricht:

Aus dem Radius r eines Kreises und einer Sehne s desselben die zu dem halben (kleineren) Bogen gehörige Sehne zu berechnen.



Es sei zu diesem Zweck AB die gegebene Sehne, MC die vom Mittelpunkt M auf dieselbe gefällte Senkrechte, welche in ihrer Verlängerung durch den Halbirungspunkt D des Bogens AB geht, so ist DB die gesuchte Sehne. Bezeichnet man die Maasszahl der letzteren durch x, die der Sehne AB durch s, die des Radius durch r und zieht MB, so ist $MB = r$, $BC = \frac{1}{2}s$, und

$$DB^2 = BC^2 + DC^2 = BC^2 + (DM - CM)^2.$$

Setzt man hier $DB = x$, $BC = \frac{1}{2}s$, $DM = r$ und $CM = \sqrt{MB^2 - BC^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}$ ein, so erhält man

$$x^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + (r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2})^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}s^2,$$

$$\text{woraus } x = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}}$$

folgt.

So erhält man beispielsweise aus der Seite des einbeschriebenen Quadrats $s = r\sqrt{2}$ mittelst dieser Formel die Seite des einbeschriebenen regelmässigen Achtecks gleich

$$\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{2}r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{4} - 2} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

aus dieser wieder die Seite des einbeschriebenen regelmässigen Sechszehnecks gleich

$$\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}r^2(2 - \sqrt{2})}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

u. s. w. Aus der Seite des Sechsecks $s = r$ ergiebt sich die des Zwölfecks gleich

$$\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}r^2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

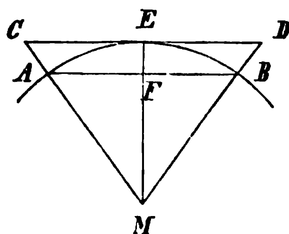
aus dieser die Seite des Vierundzwanzigecks gleich $r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, u. s. w.

Will man umgekehrt aus der bekannten Seite eines einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks diejenige des einbeschriebenen n-Ecks berechnen, so hat man in der obigen Formel x als gegeben zu betrachten und dieselbe auf s als Unbekannte aufzulösen. In dieser Weise erhält man z. B. aus der Seite des Sechsecks diejenige des Dreiecks gleich $r\sqrt{3}$ und aus der Seite des Zehnecks diejenige des Fünfecks gleich $r\sqrt{\tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}$.

3. Um auch die Seiten der einem Kreise mit dem Radius r umbeschriebenen regelmässigen Polygone zu berechnen, kann man zunächst die der Construction des umbeschriebenen n-Ecks aus dem gegebenen einbeschriebenen n-Eck entsprechende Aufgabe stellen,

aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s eines demselben einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite y des demselben umbeschriebenen regelmässigen n-Ecks zu berechnen.

Es sei zu diesem Zweck AB die gegebene Sehne s, und die gesuchte Seite CD zu derselben parallel construirt, so dass also die Verlängerungen der Radien MA, MB die letztere bezüglich in ihren Endpunkten C, D treffen und der Berührungsradius ME auf AB in F senkrecht steht und beide Seiten halbirt. Dann ist



$$\frac{CD}{AB} = \frac{ED}{FB} = \frac{EM}{FM} = \frac{EM}{\sqrt{MB^2 - FB^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{s} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}}, \text{ also } y = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2}}$$

Mit Hülfe dieser letztern Gleichung erhält man nun aus der Seite $s = r\sqrt{2}$ des einbeschriebenen regelmässigen Vierecks die Seite S des umbeschriebenen regelmässigen Vierecks

$$S = 2r,$$

ein Resultat, welches sich auch sehr leicht unmittelbar ableiten lässt.

In gleicher Weise ergiebt jene Formel die Seite des umbeschriebenen n-Ecks für $n = 6$ gleich $\tfrac{2}{3}r\sqrt{3}$, für $n = 10$ gleich $2r\sqrt{\tfrac{1}{5}(5 - 2\sqrt{5})}$, für $n = 3$ gleich $2r\sqrt{3}$, für $n = 5$ gleich $2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, für $n = 8$ gleich $2r(\sqrt{2} - 1)$, für $n = 12$ gleich $2r(2 - \sqrt{3})$, für $n = 16$ gleich $2r(\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} - 1)$, u. s. w.

Soll umgekehrt aus der Seite a eines regelmässigen n-Ecks der Radius r des umbeschriebenen oder der Radius ρ des einbeschriebenen Kreises berech-

net werden, so hat man nur die im Vorstehenden für die Seiten gefundenen Resultate auf die Radien als Unbekannte aufzulösen. Man findet ferner den Flächeninhalt eines solchen Polygons, indem man den so berechneten Radius ρ nach § 43, (2) mit dem halben Umfang $\frac{1}{2}na$ multiplicirt. So ergiebt sich

für das Quadrat: $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\rho = \frac{1}{2}a$, $F = a^2$,
für das Sechseck: $r = a$, $\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $F = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$,
für das Dreieck: $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\rho = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$, $F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$,
für das Zehneck: $r = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$, $\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $F = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$,
für das Fünfeck: $r = a\sqrt{\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})}$, $\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{5}(5+2\sqrt{5})}$,
$$F = \frac{5}{4}a^2\sqrt{\frac{1}{5}(5+2\sqrt{5})},$$
für das Achteck: $r = \frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\rho = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}+1)$, $F = 2a^2(\sqrt{2}+1)$,
u. s. w.

§ 57. Berechnung von Kreisen.

1. Die Berechnung regelmässiger Polygone zeigt mit Hülfe der nachstehenden Sätze einen Weg zur *Berechnung der Umfänge und der Flächeninhalte von Kreisen*.

Da jeder Bogen eines Kreises grösser ist als die zu ihm gehörige Sehne, so muss auch die Summe aller zu den Seiten einer einbeschriebenen geradlinigen Figur gehörigen Bogen grösser als der Umfang dieser Figur sein, d. h.

Der Umfang einer jeden in einen Kreis beschriebenen geradlinigen Figur ist kleiner als die Peripherie dieses Kreises.

Verbindet man ferner die Berührungspunkte zweier aneinanderstossenden Seiten einer umbeschriebenen Figur mit einander, so entsteht ein Dreieck, und es muss nach § 17, (4) der innerhalb dieses Dreiecks liegende Bogen zwischen den Berührungspunkten kleiner sein als die Summe der ihn einschliessenden zwei Dreiecksseiten. Addirt man nun wieder einerseits alle diese Bogen, andererseits alle diese Dreiecksseiten, so ergiebt sich der Satz:

Der Umfang einer jeden um einen Kreis beschriebenen geradlinigen Figur ist grösser als die Peripherie dieses Kreises.

Man hat also in den Maasszahlen der Umfänge eines umbeschriebenen und eines einbeschriebenen Polygons stets zwei Grenzzahlen, zwischen denen die Maasszahl der — durch dieselbe Längeneinheit gemessenen — Peripherie enthalten sein muss.

Construirt man ferner zu einem einbeschriebenen regelmässigen n-Eck ein einbeschriebenes regelmässiges $2n$-Eck mittelst Halbirung der Kreisbogen, so bilden je zwei Seiten des letzteren mit einer Seite des ersteren ein Dreieck, und da die Summe zweier Seiten eines solchen stets grösser ist als die dritte Seite, so folgt *dass der Umfang eines jeden einbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks grösser ist als der Umfang des einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks.* In entsprechender Weise kann man zu jedem gegebenen umbeschriebenen regelmässigen n-Eck ein umbeschriebenes regelmässiges $2n$-Eck construiren, indem man jeden zwischen zwei benachbarten Berührungspunkten des ersteren liegenden Bogen halbirt und durch jeden Halbirungspunkt eine Tangente an den Kreis legt. Da jede dieser letzteren Tangenten von dem ursprünglichen n-Eck ein Dreieck abschneidet, der Umfang des $2n$-Ecks also aus demjenigen des n-Ecks erhalten wird, indem man n mal die Summe zweier Seiten eines Dreiecks durch die dritte Seite ersetzt,

so folgt, dass der Umfang eines jeden umbeschriebenen regelmässigen $2n$-Ecks kleiner ist, als der Umfang des umbeschriebenen regelmässigen n-Ecks.

2. Berechnet man also, wie vorher gezeigt worden, aus dem gegebenen Radius eines Kreises nach einander die Seiten einer Reihe einbeschriebener, regelmässiger Polygone, so dass die Anzahl der Seiten eines jeden folgenden doppelt so gross ist als diejenige des vorhergehenden, und multiplicirt man jede so erhaltene Maasszahl einer Seite mit der zugehörigen Anzahl der Seiten, so erhält man eine Reihe von Zahlen, von welchen jede kleiner ist als die Maasszahl der Peripherie des Kreises, jede folgende aber der letzteren näher kommt als die vorhergehende. Wie weit diese Annäherung geht, lässt sich jedoch aus diesen Zahlen allein nicht erkennen. Berechnet man dann zu jeder der eben gefundenen Seiten einbeschriebener Polygone die Seite des umbeschriebenen regelmässigen Polygons von gleicher Seitenzahl und aus derselben durch Multiplication mit der Seitenzahl wieder den zugehörigen Umfang, so erhält man eine zweite Reihe von Zahlen, welche sämmtlich grösser sind als die Peripherie des Kreises und von denen wieder jede folgende der letzteren näher kommt als die vorhergehende. Durch die beiden nun berechneten Zahlenreihen wird also die Peripherie des Kreises zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, welche mit jedem folgenden Polygon enger aneinander rücken und also auch der Peripherie immer näher kommen. Ergiebt sich bei dieser Rechnung, dass die Umfänge zweier zusammengehöriger Polygone von einander um die Differenz δ verschieden sind, so beträgt der Unterschied der Peripherie von jedem dieser Umfänge weniger als δ, und ist δ kleiner als der für etwa vorliegende praktische Arbeiten gestattete, bezw. unvermeidliche Fehler, so dürfen die genannten Umfänge statt der Peripherie in der Rechnung benutzt werden.

So erhält man z. B. indem man von der Seite des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks ausgeht, für den Radius $r = 0{,}5$ die in der nachstehenden Tabelle durch u und U bezeichneten Werthe der Umfänge der Polygone für die dabei angegebenen Seitenzahlen n:

n	u	U	n	u	U
6	3,000000	3,464102	192	3,141452	3,141873
12	3,105828	3,215390	384	3,141556	3,141662
24	3,132628	3,159660	768	3,141583	3,141610
48	3,139350	3,146086	1536	3,141590	3,141597
96	3,141031	3,142715			

Man sieht aus derselben, dass die Umfänge der beiden 96-Ecke auf zwei, die der 192-Ecke auf drei und die der 1536-Ecke auf fünf Decimalstellen übereinstimmen und kann hieraus folgern, dass auch die Peripherie des fraglichen Kreises gleich 3,14159 . . . gesetzt werden darf, wobei die auf die fünfte Decimale folgenden Stellen unbestimmt bleiben. Da nun für die meisten praktischen Rechnungen eine Genauigkeit von fünf Decimalen genügt, so kann man die Peripherie jenes Kreises für solche Rechnungen als gefunden ansehen. Bei noch weiter fortgesetzter Berechnung der Polygonumfänge wird die Annäherung derselben an einander und an die Peripherie noch stärker und dieselbe kann bis über jeden beliebigen verlangten Grad der Genauigkeit hinaus erreicht werden, wie folgende Untersuchung für alle Fälle streng beweist.

3. Das Verhältniss des Umfanges eines einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks

zum Umfang des umbeschriebenen regelmässigen Polygons von gleichviel Seiten ist gleich dem entsprechenden Verhältniss der einzelnen Seiten $s : S$. Da nun, wie oben entwickelt,

$$S = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}},$$

$$\text{so ist } s : S = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} : r.$$

Nimmt nun die Seitenzahl n bis in's Unendliche zu, so nimmt die Länge einer einzelnen Seite bis in's Unendliche ab, d. h. der Werth von s nähert sich bis in's Unendliche der Null und daher das obige Verhältniss ebenso dem Verhältnisse $\sqrt{r^2} : r = 1 : 1$. Hiernach kann man sagen, dass die Umfänge der beiden zusammengehörigen Polygone bei fortschreitendem Wachsthum der Seitenzahl n bis in's Unendliche sich einander nähern, und dass dieselben, wenn n unendlich gross gemacht werden könnte, einander und somit auch der Peripherie des Kreises gleich werden müssten.

Hiernach erscheint der Kreis als die Grenze, welcher sich der Umfang eines demselben ein- oder umbeschriebenen regelmässigen Polygons bei wachsender Seitenzahl ohne Ende nähert. Man drückt diesen Satz häufig so aus, dass man sagt, ein Kreis könne als ein regelmässiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden. (1)

Hieraus folgt zugleich, dass alle diejenigen Sätze, welche für alle regelmässigen Figuren ohne Rücksicht auf ihre Seitenzahl gelten, auch für die Kreise gelten müssen.

Demnach kann man alle Kreise als ähnliche Figuren betrachten, und die Umfänge je zweier Kreise verhalten sich zu einander wie die Radien oder wie die Durchmesser derselben. Bezeichnen P, p bezüglich jene Umfänge, D, d die Durchmesser, so ist also

$$P : p = D : d,$$

und durch Umstellung dieser Proportion ergiebt sich

$$P : D = p : d,$$

d. h. das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser (oder zum Radius) desselben hat für alle Kreise denselben Werth. (2)

Um nun diesen Werth des Verhältnisses $p : d$ zu finden, beachte man, dass derselbe gleichbedeutend ist mit der Maasszahl der Peripherie für den Durchmesser 1 oder den Radius $\frac{1}{2}$. Wie diese mittelst der Umfänge regelmässiger Polygone näherungsweise berechnet werden kann, ist vorher gezeigt worden, und die dort beispielsweise angegebenen Resultate der Berechnung solcher Umfänge haben bereits ergeben, dass dieselbe gleich 3,14159, mit einer Genauigkeit von fünf Decimalen gesetzt werden kann.

4. Man bezeichnet den — auf dem angegebenen Wege nicht zu ermittelnden — genauen Werth jenes Verhältnisses durch den griechischen Buchstaben π so dass also

$$\frac{P}{D} = \pi, \text{ und somit } P = D\pi \text{ oder}$$

$$P = 2r\pi \ldots \quad (3)$$

ist.

Die letztere Formel zeigt, wie nunmehr die Peripherie eines jeden Kreises durch eine einfache Rechnung gefunden werden kann. Man hat zu diesem Zweck nur nöthig, den Durchmesser $2r$ des Kreises mit der Zahl π zu multipliciren, wobei man in der Praxis wegen der mangelnden genauen Kenntniss des

Werthes dieser Zahl einen jener Näherungswerthe benutzt, welcher mit Rücksicht auf die im einzelnen Fall verlangte Genauigkeit des Resultates zu wählen ist.

Da ferner der Flächeninhalt eines Kreises zufolge § 43, (2) gleich der Hälfte des Produkts aus seinem Umfang und seinem Radius gesetzt werden kann, so erhält man für denselben $F = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r$, d. i.

$$F = r^2 \cdot \pi. \quad (4)$$

Ist also beispielsweise der Radius eines Kreises gleich 10 Meter, so ist der Umfang desselben gleich $2 \cdot 10 \cdot 3{,}14159 = 62{,}8318$ Meter mit einer Genauigkeit bis auf 0,0001 Meter, also von $\frac{1}{10}$ Millimeter, und der Flächeninhalt desselben Kreises ist gleich $100 \cdot 3{,}14159 \ldots = 314{,}159$ Quadratmeter mit einer Genauigkeit bis auf 0,001 Quadratmeter oder zehn Quadratcentimeter.

5. Die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines jeden beliebigen Kreises ist nach dem Vorstehenden in der praktischen Ausführung, so lange der genaue Werth der Zahl π nicht bekannt ist, nur näherungsweise möglich, und die grössere oder geringere Genauigkeit der Resultate ist bedingt durch den Grad der Annäherung der für π benutzten Zahl an jenen genauen Werth. Die erste Berechnung eines angenäherten Werthes von π rührt von Archimedes aus Syrakus (287—212 v. Chr.) her. Derselbe berechnete die Umfänge der 96-Ecke und fand — in der Schreibweise der heutigen Mathematik ausgedrückt — dass der Umfang des Kreises weniger als $3\frac{1}{7}$ und mehr als $3\frac{10}{71}$ des Durchmessers betrage. Da der Werth $3\frac{1}{7} = 3{,}1428 \ldots$ von dem genauen Werthe von π erst in der dritten Decimale und in dieser nur um eine Einheit derselben verschieden ist, so genügt er schon für viele Rechnungen des bürgerlichen Lebens. Unter den zahlreichen späteren Berechnern ist namentlich Ludolph van Ceulen (geb. in Hildesheim 1539, gest. in Leyden 1610) bekannt geworden, nach welchem π auch die Ludolph'sche Zahl genannt wird. Derselbe berechnete diese Zahl zuerst bis auf 20, später bis auf 35 Stellen. Die erstere dieser Rechnungen gründete sich auf die Bestimmung der Umfänge des einbeschriebenen und des umbeschriebenen regelmässigen Polygons von 32 212 254 720 Seiten und ergab

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846 \ldots$$

Die so erzielte Genauigkeit ist bereits so gross, dass für einen Kreis von 20 Millionen Meilen Radius (der ungefähren Entfernung der Erde von der Sonne) der Fehler des mit Hülfe der vorstehenden Werthes berechneten Umfangs kleiner als ein Milliontel eines Millimeters sein würde, falls es in der Praxis überhaupt möglich wäre, schon den Radius eines Kreises mit solcher Genauigkeit zu messen. Die überaus mühsame Methode, welcher sich Ludolph bediente, wurde später von Huyghens und Gregory durch Aufstellung weiterer Lehrsätze über die Umfänge ein- und umbeschriebener regelmässiger Polygone erheblich vereinfacht. Es erscheint als überflüssig, diese Lehrsätze und verbesserten Methoden hier anzuführen, da an dieser Stelle überhaupt nur die Möglichkeit einer elementaren Bestimmung von π bis zu jedem verlangten Grade der Annäherung gezeigt werden soll. Die neuere Mathematik hat an einer späteren Stelle zu entwickelnde sehr bedeutend bequemere Mittel zur Berechnung von π gefunden, so dass heutzutage — wenn überhaupt eine solche Berechnung noch irgendwie erforderlich erschiene — niemand zu diesem Zwecke sich einer jener elementaren Methoden bedienen würde. Mit Hülfe dieser neueren Mittel ist die Berechnung von π von verschiedenen Mathematikern weiter fortgesetzt worden. Die neueste und weitgehendste, von Richter in Elbing, giebt den Werth von π auf 500 Decimalstellen.

Derartige Berechnungen haben selbstverständlich durchaus kein praktisches

sondern nur ein theoretisches Interesse. Für die Praxis genügt fast in allen Fällen der Gebrauch von sieben, meist sogar der von fünf oder weniger Decimalstellen, so dass man also hier ein- für allemal

$$\pi = 3{,}1415927$$

als den Werth des Verhältnisses der Peripherie zum Durchmesser annehmen darf. Dagegen bieten einiges praktische Interesse solche Näherungsbrüche, die innerhalb der Grenzen der im einzelnen Fall verlangten Genauigkeit für den obigen Decimalbruch gesetzt werden dürfen, und die man mittelst der Verwandlung des letztern in einen Kettenbruch finden kann. Der einfachste derselben ist der bereits angegebene archimedische $\frac{22}{7}$, welcher von dem wahren Werthe um weniger als 0,0013 abweicht. Ausser ihm ist besonders bemerkenswerth der zuerst von ADRIAAN ANTHONISZOON in Alkmaar im 16. Jahrh. nach Chr angegebene $\frac{355}{113}$, welcher sich mittelst des die drei ersten ungeraden Zahlen doppelt enthaltenden Schemas 113|355 leicht merken lässt. Durch Verwandlung desselben in einen Decimalbruch kann man sich überzeugen, dass er von dem genauen Werthe erst in der siebenten Decimale abweicht.

Ist also z. B. der Radius eines kreisrunden Platzes gleich 9 Meter gegeben, so kann man den Umfang desselben gleich $18 \cdot \frac{22}{7} = 56\frac{4}{7}$ Meter setzen, welcher Werth sich von dem genauen nur um etwa zwei Centimeter unterscheidet.

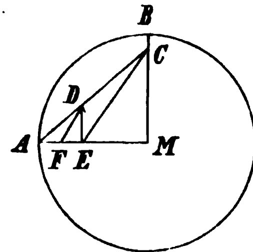
Eine absolut genaue Bestimmung des Werthes von π ist auch mit Hülfe der höhern Mathematik nicht möglich; man erhält immer nur einen an irgend einer Stelle abgebrochenen Decimalbruch und es liegt also die Vermuthung nahe, dass π eine Irrationalzahl sei. Dass dies wirklich der Fall, kann aber aus den bisherigen elementaren Erörterungen nicht gefolgert werden; ein geometrischer Beweis, dass der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser incommensurabel sei, ist bis jetzt überhaupt nicht bekannt. Hätten die bis jetzt ausgeführten Berechnungen in den Decimalstellen eine Periode erkennen lassen, so liesse sich der als unendlich angenommene Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln, also in endlicher rationaler Form darstellen; dies ist aber trotz der berechneten 500 Decimalen nicht der Fall. Aber auch in einer geschlossenen irrationalen Form, etwa mittelst Wurzeln aus rationalen Zahlen, hat sich der Werth von π nicht darstellen lassen. Diese Thatsachen lassen jede Aussicht darauf entschwinden, dass es gelingen könne, die der Berechnung des Kreises entsprechende geometrische Aufgabe zu lösen, welche unter dem Namen der Quadratur des Zirkels eine besondere Berühmtheit erlangt hat. Es ist dies die Aufgabe, ein Quadrat zu construiren, welches mit einem gegebenen Kreise gleichen Flächeninhalt hat. Diese Aufgabe würde ohne Weiteres leicht lösbar sein, wenn man für π einen (absolut genauen) Bruch oder eine Quadratwurzel aus einem solchen gefunden hätte, und umgekehrt müsste eine Lösung jener Aufgabe zu einer genauen Bestimmung von π in geschlossener Form führen.

Der Aufgabe der Quadratur des Zirkels steht zur Seite die andere, eine Gerade zu zeichnen, welche dem Umfang eines gegebenen Kreises gleich ist (Rectification des Kreises). Sie unterliegt derselben Schwierigkeit wie jene, und jede von beiden würde, wenn gelöst, zur Lösung der andern führen, da der Inhalt eines jeden Kreises gleich dem eines Dreiecks ist, dessen Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

6. Für die Praxis ist die Quadratur des Zirkels ohne Interesse. Die unvermeidlichen Ungenauigkeiten, welche der wirklichen Ausführung einer jeden construirenden Zeichnung anhaften, würden in jedem Falle das gezeichnete Quadrat in der Wirklichkeit zu einem fehlerhaften machen. Mit Hülfe der angenäherten Werthe von π lassen sich aber Constructionen von Quadraten angeben, die theoretisch dem gegebenen Kreise an Inhalt so nahe kommen, dass die Abweichung geringer ist, als der in der Praxis unvermeidliche Fehler. Solche Näherungsconstructionen ersetzen also, wenn die Verwandlung eines Kreises in eine gleich grosse geradlinige Figur oder die Darstellung der Länge seines Umfanges durch eine Gerade verlangt werden sollte, für den Praktiker vollständig die fehlenden theoretisch genauen Constructionen.

Als Beispiele solcher Näherungsconstructionen wählen wir aus der grossen Anzahl der bekannten die folgenden aus und beschränken uns dabei auf die Darstellung der Peripherie durch eine Gerade, da aus dieser, wie oben angegeben, leicht auch das betreffende Quadrat gefunden werden kann.

Man ziehe im gegebenen Kreise M zwei zu einander senkrechte Radien MA, MB, theile MB in acht gleiche Theile, verbinde denjenigen Theilpunkt C, welcher zunächst an B liegt, mit A, trage auf AC die Strecke AD gleich der Hälfte von MB ab, fälle von D die Senkrechte DE auf MA, ziehe CE und darauf DF parallel zu CE bis zum Durchschnittspunkt F mit MA, endlich zeichne man eine Strecke gleich dem Dreifachen des Durchmessers des Kreises plus dem Doppelten von AF, so ist diese Strecke näherungsweise der Peripherie gleich. Es ist



nämlich $AF : AE = AD : AC$, und $AE : AM = AD : AC$,

$$\text{also } AF = \frac{AE \cdot AD}{AC}, \quad AE = r \cdot \frac{AD}{AC},$$

$$\text{mithin } AF = r \cdot \frac{AD^2}{AC^2} = \frac{r \cdot \frac{1}{4} r^2}{r^2 + \frac{49}{64} r^2} = \frac{16}{113} r,$$

$$\text{und also } 6r + 2AF = 2r \cdot 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} \cdot 2r.$$

Hiernach beträgt der theoretische Fehler dieser Construction weniger als 0,000001 des Durchmessers, oder derselbe würde bei einem Durchmesser von 100 Metern noch nicht $\frac{1}{10}$ Millimeter betragen, wenn die Construction selbst mit einem entsprechenden Grade von Genauigkeit ausgeführt werden könnte.

Kürzer, aber weniger genau ist folgende Construction: Man ziehe zwei zu einander senkrechte Radien, verbinde ihre Endpunkte, theile die Verbindungslinie im Verhältniss 1 : 4 und verlängere den erhaltenen fünften Theil desselben um das Sechsfache des Radius. Die so gewonnene Linie ist gleich

$$\tfrac{1}{5} r \sqrt{2} + 6r = 2r \cdot (3 + \tfrac{1}{10} \sqrt{2}) = 2r \cdot 3{,}14142\ldots,$$

der Fehler beträgt also noch nicht zwei Zehntausendtel des Durchmessers. Oder man construire ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete gleich $\frac{3}{5}$ des Durchmessers und dessen andere Kathete doppelt so gross als die erstere ist: der Umfang dieses Dreiecks ist nahezu gleich der Peripherie des Kreises, denn derselbe ergiebt sich gleich $2r \cdot (\frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5} \sqrt{45}) = 2r \cdot 3{,}14164\ldots$

Die noch immer von Zeit zu Zeit auftauchenden angeblichen Lösungen der Quadratur des Zirkels sind, wenn nicht überhaupt grob fehlerhaft, im günstigsten

Fall derartige Näherungsconstructionen, bei welchen der Fehler der theoretischen Construction durch die praktische Ungenauigkeit der Zeichnung verdeckt erscheint.

7. Die Formeln $P = 2r\pi$ und $F = r^2\pi$ gestatten umgekehrt auch die Berechnung des Radius oder des Durchmessers sowol aus der gegebenen Peripherie als aus dem gegebenen Flächeninhalt des Kreises. Durch Auflösung derselben auf r erhält man

$$r = \frac{P}{2\pi} = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

Man kann endlich mittelst derselben den Flächeninhalt unmittelbar aus dem Umfang und umgekehrt berechnen. Es ist

$$F = \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \pi = \frac{P^2}{4\pi},$$

$$P = 2\sqrt{F\pi}$$

8. **Beispiele**: 1. Ein Wagenrad habe einen Durchmesser von 1,25 m. Wie schwer ist der eiserne Radreifen, wenn jedes 1 m lange Stück desselben 10 Kg. wiegt? Auflösung: $1{,}25\,\pi \cdot 10 = 12{,}5 \cdot \frac{22}{7} = 39{,}3$ Kg.

2. Aus der Peripherie eines Kreises $P = 35{,}5$ den Radius r und den Flächeninhalt F desselben zu berechnen. Auflösung: $r = \frac{35{,}5}{2\pi} = 5{,}65$; $F = 100{,}4$.

3. Jeder Grad des Erdäquators hat eine Länge von 15 geogr. Meilen. Man berechne daraus den Durchmesser des Aequators. Auflösung: $d\pi = 15 \cdot 360$, $d = \frac{15 \cdot 360}{\pi} = 1718{,}8\ldots$ Meilen.

4. Wie gross ist der Durchmesser der als Kugel betrachteten Erde, wenn der Bogen eines Meridians vom Pol bis zum Aequator zu 10 Millionen Meter gerechnet wird? Auflösung: $d\pi = 40000000$, $d = 12732000$ m.

5. Den Flächeninhalt eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ringes aus den beiden Radien R und r zu berechnen. $R = 0{,}8$; $r = 0{,}1$. Auflösung: $(R^2 - r^2)\pi = (R + r)(R - r)\pi = 0{,}9 \cdot 0{,}7\,\pi = 1{,}979\ldots$

6. Den Flächeninhalt eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ringes aus den durch einen Punkt des kleineren Kreises gebildeten Abschnitten eines Durchmessers des grösseren zu berechnen. Auflösung: $ab\pi$.

7. Den Flächeninhalt des einem Rechteck umbeschriebenen Kreises aus den Seiten a, b des Rechtecks zu berechnen. Auflösung: $\frac{1}{4}\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Wie verhalten sich die Umfänge und wie die Flächeninhalte zweier Kreise zu einander, von denen der eine einem Quadrat umbeschrieben, der andere demselben Quadrat einbeschrieben ist? Auflösung: $R = r\sqrt{2}$; $2R\pi : 2r\pi = R : r = \sqrt{2} : 1$; $R^2 : r^2 = 2 : 1$.

9. Ebenso für ein regelmässiges Sechseck.
Auflösung: $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$; $R : r = 2 : \sqrt{3} = 2\sqrt{3} : 3$; $R^2 : r^2 = 4 : 3$.

§ 58. Berechnung von Bogen, Sectoren und Segmenten.

1. Die Berechnung von Theilen von Kreislinien oder Kreisflächen lässt sich ebenfalls mit Hülfe der Zahl π (näherungsweise) ausführen. Als Maass eines **Kreisbogens** soll jetzt nicht, wie früher geschehen, ein anderer Bogen desselben Kreises, sondern die auch zum Messen gerader Linien benutzte Längeneinheit dienen, es soll also nicht das Verhältniss der Länge des Bogens zu einem anderen Bogen, sondern die absolute Länge in Beziehung auf ein geradliniges

Maass bestimmt werden. Das Messen der Länge einer krummen Linie mit einem solchen Maasse unterliegt dadurch einer grösseren Schwierigkeit als dasjenige von Strecken, dass das unmittelbare Abtragen des Maasses auf der zu messenden Linie nicht thunlich ist. Es muss also auch hier, wie schon vorher bei dem ganzen Kreise geschehen, die Berechnung an die Stelle der eigentlichen Messung treten. Hierzu verhilft bei Kreisbogen der Satz, dass die Längen zweier Bogen desselben Kreises sich zu einander verhalten, wie die zugehörigen Centriwinkel, dass also auch jeder Bogen sich zur ganzen Peripherie verhalten muss, wie der zu ihm gehörige Centriwinkel zu 360 Grad. Bezeichnet man die in Graden (Minuten, Secunden) ausgedrückte Maasszahl dieses Centriwinkels durch α, die gesuchte des Bogens durch b, so ist also

$$b : 2r\pi = \alpha : 360^\circ,$$

$$\text{woraus } b = 2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}, \quad (1)$$

folgt. Jeder Kreisbogen ist also der ebensovielte Theil der ganzen Peripherie wie sein Centriwinkel von 360°. So ist also z. B. der Bogen über der Seite des einbeschriebenen Quadrats gleich dem vierten Theile der Peripherie oder gleich $\frac{1}{2}r\pi$, der Bogen über der Seite des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks gleich $\frac{1}{6} \cdot 2r\pi$, u. dgl. m. Statt der Maasszahl des Centriwinkels kann in allen Fällen selbstverständlich auch die Maasszahl des Bogens in Bogengradmaass gegeben werden. Man verwandelt also das letztere in Längenmaass durch Multiplication mit $r \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$.

2. Ist umgekehrt ein Kreisbogen in Längenmaass b nebst dem Radius r des Kreises gegeben, so findet man die Länge des Bogens in Gradmaass durch Auflösung der obigen Gleichung auf α

$$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (2)$$

Die hiernach bei derartigen Verwandlungen von Längenmaass in Gradmaass und umgekehrt gebrauchte Zahl $\frac{180^\circ}{\pi}$ kann ein- für allemal ausgerechnet werden.

Dieselbe ergiebt sich gleich 57° 17′ 44,″ 8 . . . = 57°, 29578 = 3437,′ 7468 = 206264″ 8.

Dieselbe wird von manchen Schriftstellern durch ρ bezeichnet. Da dieser Buchstabe auch häufig zur Bezeichnung des Radius eines einer Figur einbeschriebenen Kreises gebraucht wird, so ist die Einführung eines anderen Zeichens für die vorstehende, in den Anwendungen häufig vorkommende Zahl wünschenswerth. Wählen wir dafür den Buchstaben P (welcher gleichzeitig an π und als grosser griechischer Buchstabe an ρ erinnert), so ist also

$$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \mathrm{P}, \; b = \frac{\alpha r}{\mathrm{P}}$$

3. Da die Länge des zu einer bestimmten Gradzahl gehörigen Bogens mit dem Radius des Kreises veränderlich ist, dagegen das Verhältniss dieser Länge zu derjenigen des Radius für dieselbe Gradzahl immer denselben Werth hat, so ist man übereingekommen, unter dem zu einem bestimmten Centriwinkel gehörigen Bogen in Längenmaas im engeren Sinn stets dieses Verhältniss der absoluten Länge des Bogens zum Radius oder, was dasselbe ist, diese Länge des Bogens in einem Kreise mit dem Radius 1 zu verstehen. Man bezeichnet in diesem Falle insbesondere den zu der Gradzahl α gehörigen Bogen durch *arc* α,

und es geht aus den vorstehenden Formeln, indem man in denselben $r = 1$ setzt, hervor, dass

$$arc\,\alpha = \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{\alpha}{P}, \qquad (3)$$
$$\alpha = P \cdot arc \cdot \alpha$$

ist. Zur Verwandlung von Gradmaass in Bogenmaass hat man also ersteres durch P zu dividiren, zur Verwandlung von Bogenmaass in Gradmaass ersteres mit P zu multipliciren. In beiden Fällen sind α und P gleichzeitig in Graden und Bruchtheilen eines solchen, oder in Minuten oder in Secunden auszudrücken. So ist z. B.

$$arc\ 5^\circ\, 17'\, 30'' = arc\ 5^\circ{,}29166\,.. = \frac{5{,}29166\,..}{57{,}29578}$$

$$\text{oder} = arc\, 317'{,}5 = \frac{317{,}5}{3437{,}7468}\ \text{oder} = arc\, 19050'' = \frac{19050}{206264{,}8}.$$

Alle drei Formeln ergeben $arc\, 5^\circ\, 17'\, 30'' = 0{,}09235\ldots$

Insbesondere ist also P gleich α, wenn $arc\,\alpha = 1$ ist, oder P ist in Gradmaass derjenige Bogen, welcher an Länge dem Radius des Kreises gleich ist. Umgekehrt ist $\frac{1}{P} = arc\, 1$.

Nach der vorstehenden Erklärung ergiebt sich weiter insbesondere, dass $arc\ 360^\circ = 2\pi$, $arc\ 180^\circ = \pi$, $arc\ 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ u. s. w. ist.

4. Um den Flächeninhalt eines Sectors zu berechnen, bestimme man, ähnlich wie bei der Berechnung der Länge eines Bogens aus derjenigen der ganzen Peripherie, das Verhältniss desselben zur ganzen Kreisfläche. Bei dem Beweise des Satzes, dass zu gleichen Centriwinkeln eines und desselben Kreises oder gleicher Kreise gleiche Bogen gehören, gelangten mit den Centriwinkeln und den Bogen auch die zugehörigen Sectoren zur Deckung, und es gilt also auch der Satz:

Zu gleichen Centriwinkeln und zu gleichen Bogen eines und desselben Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Sectoren.

Durch Theilung zweier Centriwinkel oder Bogen mittelst eines gemeinschaftlichen Maasses erhält man dann unter Anwendung dieses Satzes ganz in derselben Weise, wie im entsprechenden Fall bei den Bogen den allgemeinen Satz:

Die Flächen beliebiger Sectoren desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Centriwinkel und wie die zugehörigen Bogen.

Insbesondere verhält sich daher auch jeder Sector eines Kreises zum ganzen Kreise, wie sein Centriwinkel zu 360 Grad und wie sein Bogen zur ganzen Peripherie. Bezeichnet also S den Flächeninhalt eines Sectors des Kreises mit dem Radius r, α die Maasszahl des zugehörigen Centriwinkels oder die des Bogens in Gradmaass, b die des Bogens in Längenmaass, so ist

$$S : r^2\pi = \alpha : 360^\circ,$$
$$\text{oder } S = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \qquad (4\text{a})$$
$$\text{und ebenso } S : r^2\pi = b : 2r\pi,$$
$$\text{also } S = \tfrac{1}{2} br. \qquad (4\text{b})$$

Die letztere Formel lässt sich leicht dadurch behalten, dass nach derselben der einem Dreieck der Gestalt nach gleichende Sector durch dieselbe Regel wie ein Dreieck berechnet wird, wenn man statt der geradlinigen Grundlinie

des letzteren den krummen Bogen und statt der Höhe den Radius des Kreises nimmt.

5. Den Flächeninhalt eines Segmentes erhält man, falls dasselbe kleiner als ein Halbkreis ist, als Differenz eines Sectors und eines Dreiecks, welche beide durch die nach den Endpunkten des zugehörigen Bogens gehenden Radien und diesen Bogen, bezw. die zugehörige Sehne bestimmt werden. Ist das Segment grösser als ein Halbkreis, so ist es die Summe eines Sectors und eines Dreiecks.

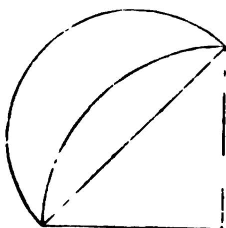
Es sei zur Ausführung dieser Rechnung ausser dem Radius r der Centriwinkel α des zum Segment gehörigen Bogens gegeben. Der Inhalt des betreffenden Sectors ergiebt sich dann ohne Weiteres aus der entsprechenden obigen Formel. Zur Bestimmung des Inhalts des zugehörigen Dreiecks müsste aus den gegebenen Stücken eine Seite desselben und die zu ihr gehörige Höhe, also beispielsweise die Sehne und ihr Abstand vom Mittelpunkte berechnet werden. Da nämlich von diesem Dreiecke zwei Seiten gleich dem Radius und der eingeschlossene Winkel, nämlich der Centriwinkel, bekannt sind, so ist dasselbe durch die als gegeben angenommenen Stücke bestimmt, und es ist nicht gestattet, zur Berechnung desselben noch anderweite Stücke als unabhängig von jenen gegeben anzunehmen. Es entsteht also die Aufgabe, aus dem Radius und einem Centriwinkel die zugehörige Sehne zu berechnen. Der ausserdem erforderliche Abstand der Sehne vom Mittelpunkt würde sich nach erfolgter Lösung dieser Aufgabe leicht mittelst des pythagoreischen Lehrsatzes ergeben. Die Berechnung der Sehne aber ist mit den bisher entwickelten Hülfsmitteln nur dann möglich, wenn diese Sehne Seite eines derjenigen einbeschriebenen Polygone ist, deren Berechnung im Vorhergehenden als möglich gezeigt wurde. In allen anderen Fällen unterliegt dieselbe der Schwierigkeit, dass aus einer Strecke (r) und einem Winkel (α), also aus zwei ungleichartigen, nicht durch dieselbe Maasseinheit gemessenen Grössen in einer und derselben Rechnung eine gesuchte Grösse gefunden werden soll, und die Lösung der Aufgabe erfordert daher die Hülfsmittel eines neuen Zweiges der Mathematik, welcher mit Hülfe einer Bestimmung von Winkeln durch dieselbe Maasseinheit, mit welcher die Strecken gemessen werden, die Einführung beider Arten von Grössen in dieselbe Rechnung gestattet. Diejenige mathematische Disciplin, welche die so gestellte Aufgabe löst, ist die Trigonometrie, und dieser muss also auch die vollständige und endgültige Lösung des hier vorliegenden Problems der Berechnung des Flächeninhalts eines Segments vorbehalten bleiben.

Wären umgekehrt für diese letztere Aufgabe die Sehne und deren Abstand vom Mittelpunkt gegeben, wäre also die unmittelbare Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ermöglicht, so müsste aus jenen Stücken behufs Berechnung des Sectors der Centriwinkel berechnet werden, sodass man wieder auf eine Aufgabe der Trigonometrie hingewiesen wird.

Wie sich jedoch in besonderen Fällen, welche bereits oben angedeutet wurden, die Berechnung des Inhalts eines Segments auch mit den bisherigen Hülfsmitteln ausführen lässt, möge beispielsweise die folgende Aufgabe zeigen:

Ueber der Hypotenuse eines rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreiecks als Durchmesser sei ausserhalb des letzteren ein Halbkreis, und über derselben Geraden als Sehne sei um den Scheitel des rechten Winkels ein Quadrant beschrieben. Man erhält so eine von zwei Kreisbogen begrenzte mondförmige

Figur (die *lunula* des Hippokrates), deren Flächeninhalt aus der Kathete a des Dreiecks berechnet werden soll.



Die gesuchte Fläche ist die Differenz eines Halbkreises und eines Segments. Der Halbkreis hat zum Durchmesser die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, für welche man mittelst des pythagoreischen Lehrsatzes den Werth $a\sqrt{2}$ erhält. Mithin ist der Inhalt des Halbkreises gleich $\frac{1}{4}a^2\pi$. Das Segment ist die Differenz eines Sectors und des Dreiecks, der Sector der vierte Theil eines Kreises, dessen Radius gleich der Kathete, also gleich a ist. Da hiernach der Inhalt des Sectors gleich $\frac{1}{4}a^2\pi$ ist, so ist derselbe gleich der vorher berechneten Halbkreisfläche. Der Inhalt des Dreiecks ergiebt sich aus den Katheten gleich $\frac{1}{2}a^2$. Demnach ist der gesuchte Inhalt der Lunula gleich

$$\tfrac{1}{4}a^2\pi - (\tfrac{1}{4}a^2\pi - \tfrac{1}{2}a^2) = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Die Lunula ist also dem Dreieck gleich; es liegt mithin hier ein Fall vor, in welchem sich eine nur von krummen Linien begrenzte Figur durch Construction in eine geradlinige verwandeln lässt, die Aufgabe der Quadratur der Figur also lösbar ist.

Beispiele: 1. Die Längen der Bogen eines Kreises mit dem Radius 1 zu berechnen, welche zu folgenden Centriwinkeln gehören: a) 90°, b) 180°, c) 60°, d) 36°, e) 120°. Resultate: a) $\frac{1}{2}\pi = 1{,}57080$; b) $\pi = 3{,}14159$; c) $\frac{1}{3}\pi = 1{,}04720$; d) $\frac{1}{5}\pi = 0{,}62832$; e) $\frac{2}{3}\pi = 2{,}09440$.

2. Ebenso für folgende Centriwinkel: a) 20° 12′; b) 117° 13′,5; c) 32° 18′ 30″; d) 0° 11′ 10″; e) 0° 0′ 33″,2; f) 0° 0′,12. Auflösung: a) $b = \frac{20^\circ\ 12' \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{20{,}2\,\pi}{180} = 0{,}352556$, oder $20^\circ\ 12' : P = \frac{20{,}2}{57{,}29578}$ oder $\frac{1212}{3437{,}7468}$, also mittelst *log* P′ = 3,53627 und *log* 1212 = 3,08350, b = *num. log* 0,54723 — 1 = 0,35256; b) 7033′,5 : P = *num. log* (3,84717 — 3,53627) = 2,04595; c) 1938′,5 : P′ = 0,56390; d) 670″ : P″ = *num. log* (2,82607 — 5,31443) = 0,0032482; e) 33″,2 : P″ = 0,00016096; f) 0′,12 : P′ = *num. log* (0,07918 — 1 — 3,53627) = 0,000034907.

3. Für den Radius $r = 10$ die Länge des Bogens zu berechnen, dessen Centriwinkel 112° 30′ ist. Auflösung: 112°,5 · 10 : P° = *num. log* (3,05115 — 1,75812) = 19,635.

4. Aus der gegebenen Bogenlänge b für den Radius 1 den zugehörigen Centriwinkel zu berechnen für a) $b = 0{,}324$; b) $b = 3{,}417$. Auflösung: $\alpha = b \cdot P$; a) *num. log* (0,51055 — 1 + 1,75812) = 18°,564 = 18° 33′ 50″; b) 195° 47′.

5) Aus der Länge b eines Bogens und dem zugehörigen Centriwinkel α den Radius des Kreises zu berechnen. Beispiel: $b = 0{,}4488$, $\alpha = 25^\circ\ 42',9$. Auflösung:

$$r = \frac{b\,P}{\alpha} = \frac{0{,}4488\ P'}{1542{,}9} = 1.$$

6. Den Flächeninhalt eines Sectors in einem Kreise mit dem Radius 1 zu berechnen, dessen Centriwinkel α gleich a) 60°, b) 45°, c) 36°, ist. Auflösung a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{\pi}{10}$.

7. Den Flächeninhalt eines Sectors in einem Kreise mit dem Radius $r = 1{,}13$ zu berechnen, wenn der zugehörige Centriwinkel $\alpha = 5^\circ\ 4',2$ gegeben ist. Auflösung: $\frac{r^2\pi \cdot 304{,}2}{360 \cdot 60} = 0{,}0565.$

8. Den Flächeninhalt eines Sectors im Kreise mit dem Radius $r = 0,123$ zu berechnen, dessen Bogen die Länge $b = 1,234$ hat.
Auflösung: $\frac{1}{2} br = 0,617 \cdot 0,123 = 0,0758$.

9. Aus dem Flächeninhalt F eines Sectors und dem Radius r des Kreises den zugehörigen Bogen und den Centriwinkel zu berechnen.

$$\text{Auflösung: } b = \frac{2F}{r}, \quad \alpha = \frac{F}{r^2} \cdot \frac{360°}{\pi} = \frac{2FP}{r^2}.$$

10. Aus dem Flächeninhalt F eines Sectors und dem zugehörigen Centriwinkel α den Radius des Kreises und den Bogen zu berechnen.

$$\text{Auflösung: } r = \sqrt{F \cdot \frac{360°}{\alpha \pi}}, \quad b = \sqrt{\frac{F \alpha \pi}{90°}}.$$

11. Berechne den Inhalt des kleineren der Segmente eines Kreises mit dem Radius r, welche zu der Seite eines einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks gehören. Auflösung: $\frac{1}{6} r^2 \pi - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \frac{1}{12} r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})$.

12. Ein Kreis berühre die beiden Radien und den Bogen eines Quadranten. Man berechne aus dem Radius r des letzteren die Flächeninhalte der zwischen dem einbeschriebenen Kreis und dem Umfang des Quadranten liegenden Figuren. Auflösung: Der den Quadranten halbirende Radius desselben besteht aus einem Radius (ρ) des einbeschriebenen Kreises und der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich dem Radius ρ ist. Daher ist $\rho + \rho\sqrt{2} = r$, also $\rho = \frac{r}{\sqrt{2} + 1}$ $= r(\sqrt{2} - 1)$. Der eine der gesuchten Theile ist die Differenz des genannten Quadrats und eines Quadranten des einbeschriebenen Kreises, also gleich $\rho^2 - \frac{1}{4} \rho^2 \pi = r^2 (3 - 2\sqrt{2})(1 - \frac{1}{4}\pi)$. Subtrahirt man den Inhalt dieses Theiles und den des einbeschriebenen Kreises von dem Inhalt des Quadranten, so erhält man die Summe der Inhalte der beiden übrigen gesuchten Theile, welche einander gleich sind.

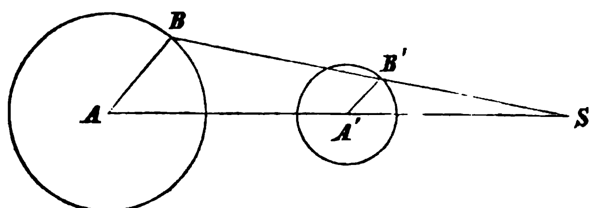
13. Den Inhalt einer von zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und dem zwischen denselben liegenden kleineren Bogen des einbeschriebenen Kreises eingeschlossenen Figur aus der Seite a des Dreiecks zu berechnen. Auflösung: Da im Ganzen drei solche Figuren von gleicher Grösse übrig bleiben, wenn man den Kreis von dem Dreieck wegnimmt, so ist der gesuchte Inhalt $\frac{1}{3}$ der Differenz der Inhalte des Dreiecks und des Kreises. Der Radius des letzteren ist — da der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit dem Mittelpunkt des Kreises und dem Durchschnittspunkt der Höhen zusammenfällt — gleich dem dritten Theil der Höhe, also gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Mithin erhält man für die gesuchte Fläche $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{12} a^2 \pi\right] = \frac{1}{36} a^2 (3\sqrt{3} - \pi)$.

§ 59. Von der Aehnlichkeit der Kreise.

1. Die Eigenschaft ähnlicher geradliniger Figuren, nach welcher dieselben in eine solche Lage zu einander gebracht werden können, dass je zwei homologe Eckpunkte zweier solchen Figuren auf einem von demselben Punkte S ausgehenden Strahl liegen und von diesem Stücke abschneiden, die zu einander für alle homologen Punktpaare in demselben Verhältniss stehen, lässt sich zur Aufstellung einer allgemeinen Definition ähnlicher Raumgebilde benutzen. Hiernach heissen auch krummlinige Figuren, und überhaupt zwei Systeme von Punkten und Linien

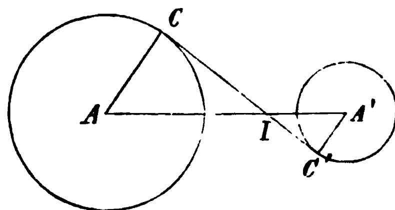
einander ähnlich, wenn sie in eine solche Lage zu einander gebracht werden können, dass jedem Punkte der einen Figur oder des einen Systems ein in der angegebenen Weise liegender homologer Punkt und somit auch jeder Linie desselben eine homologe Linie des anderen entspricht, und es gilt allgemein der Satz, dass je zwei homologe Strecken in zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren einander parallel sind und dass je zwei solche Strecken sich immer zu einander verhalten, wie die Abstände zweier homologen Eckpunkte von dem gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt. Auch die Unterscheidung innerer und äusserer Aehnlichkeitspunkte bleibt unverändert wie früher bestehen. Endlich gilt umgekehrt der Satz, dass die Verbindungslinien je zweier homologen Punkte zweier ähnlichen Raumgebilde sich stets in der gedachten Weise in einem und demselben Punkt, dem Aehnlichkeitspunkt, schneiden müssen, wenn die Raumgebilde so zu einander gestellt sind, dass zwei Linien des einen den homologen des anderen parallel laufen.

Dass alle Kreise ähnliche Figuren sind, ist schon früher auf anderem Wege gezeigt worden. Jede zwei Kreise derselben Ebene sind aber auch stets in ähnlicher Lage zu einander. Zieht man nämlich in zwei Kreisen zwei beliebige, einander parallele und gleichgerichtete Radien AB, $A'B'$ und verbindet deren auf den Peripherien liegende Endpunkte B, B', so schneidet die Verlängerung der Verbindungslinie die Verlängerung der Centrallinie AA' in einem Punkte S, so dass



$$AS : A'S = AB : A'B',$$

d. h. der Punkt S theilt AA' auf ihrer Verlängerung im Verhältniss der zugehörigen Radien. Da dies für jedes Paar einander paralleler und gleichgerichteter Radien unverändert gelten muss, so ist der Punkt S für alle solche Paare derselbe, also äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und A'. Derselbe liegt bei ungleichen Kreisen auf der Verlängerung der Centrallinie über den Mittelpunkt des kleineren Kreises, bei gleichen Kreisen im Unendlichen.



Zieht man ferner in zwei beliebigen Kreisen zwei einander parallele und entgegengesetzt gerichtete Radien AC, $A'C'$ und verbindet deren auf der Peripherie liegende Endpunkte C, C' mit einander, so schneidet die Verbindungslinie die Centrallinie AA' selbst in einem Punkte I, und die Dreiecke ACI, $A'C'I$ sind einander ähnlich. Daher ist

$$AI : A'I = AC : A'C',$$

d. h. der Punkt I theilt ebenfalls die Centrallinie im Verhältniss der zugehörigen Radien. Für alle Paare paralleler und entgegengesetzt gerichteter Radien zweier Kreise muss daher dieser Punkt I derselbe sein. Er ist also innerer Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise. Derselbe liegt stets auf der Centrallinie selbst, bei ungleichen Kreisen dem Mittelpunkt des kleineren näher als dem des grösseren, bei gleichen Kreisen im Halbirungspunkt der Centrallinie.

Jede zwei Kreise können daher gleichzeitig als direct ähnlich und als ent-

gegengesetzt ähnlich liegende Figuren betrachtet werden; sie haben stets sowol einen inneren als einen äusseren Aehnlichkeitspunkt, und diese beiden Aehnlichkeitspunkte theilen die Centrallinie im Verhältniss der zugehörigen Radien harmonisch.

2. Die im § 51 entwickelten Sätze über Aehnlichkeitsstrahlen und homologe Punkte ähnlicher Polygone lassen sich nunmehr leicht auf jede zwei beliebige Kreise übertragen. Insbesondere muss auch jede Gerade, welche zwei Kreise gleichzeitig berührt, ein Aehnlichkeitsstrahl derselben sein, wie daraus folgt, dass die beiden nach den Berührungspunkten gehenden Radien gleichzeitig senkrecht zu der Geraden und also einander parallel sind. Die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Tangente an zwei gegebene Kreise zu legen, kann also dadurch gelöst werden, dass man einen Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise construirt und von ihm aus an einen der letzteren eine Tangente zieht. Dieselbe muss dann auch den anderen Kreis berühren.

Die Untersuchung der bei dieser Aufgabe möglichen einzelnen Fälle ergiebt Folgendes: Liegen die Kreise ganz ausserhalb einander, so liegen beide Aehnlichkeitspunkte ausserhalb beider Kreise. Da man von jedem derselben zwei Tangenten ziehen kann, so erhält man in diesem Falle vier gemeinschaftliche Tangenten. — Berühren die Kreise einander von aussen, so fällt der innere Aehnlichkeitspunkt mit dem Berührungspunkt, und die beiden durch diesen Aehnlichkeitspunkt gedachten Tangenten fallen in eine einzige Gerade zusammen. In diesem Falle giebt es drei gemeinschaftliche Tangenten. — Schneiden die Kreise einander, so fällt der innere Aehnlichkeitspunkt innerhalb beider. Man kann also von ihm in diesem Falle keine Tangente an die Kreise ziehen, und diese haben nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. — Berührt der kleinere Kreis den grösseren von innen, so fällt der innere Aehnlichkeitspunkt wie vorher innerhalb beider; der äussere Aehnlichkeitspunkt fällt mit dem Berührungspunkte zusammen, und die Kreise haben nur eine einzige gemeinschaftliche Tangente. — Liegt endlich der kleinere Kreis ganz innerhalb des grösseren, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte innerhalb beider Kreise, und diese haben keine gemeinschaftlichen Tangenten.

Sind insbesondere zwei Kreise concentrisch, so fallen ihre Aehnlichkeitspunkte mit einander und dem Mittelpunkte zusammen.

Die weitere Entwicklung dieser Lehren gehört der sog. neueren Geometrie an. Vergl. § 82.

Kapitel 6.

Die planimetrischen Constructions-Aufgaben.

§ 60. Einleitung.

Die Constructions-Aufgaben der Geometrie fordern die Zeichnung von Figuren mit verlangten Eigenschaften, und zwar auf Grund geometrischer Lehrsätze, sodass also die Richtigkeit des Verfahrens vollkommen streng bewiesen werden kann. Hierbei ist von der »Construction« der Figur die wirkliche praktische Ausführung der Zeichnung zu unterscheiden; die Aufgabe im engeren Sinn verlangt nur die erstere, d. h. die theoretische Angabe des zur Darstellung der verlangten Figur führenden Verfahrens, sie sieht mithin von der praktischen Unmöglichkeit, wirkliche Linien (ohne Dicke) zu zeichnen und von anderen Hin-

dernissen einer absolut genauen Ausführung der Zeichnung ab und kann daher auch eine theoretisch vollkommene Genauigkeit der letzteren verlangen. Die Constructionen der Elementar-Geometrie bedienen sich keiner anderen Hülfsmittel als der geraden Linie und des Kreises, da diese Linien die einzigen sind, welche in den Elementen behandelt werden. Es wird also die Möglichkeit vorausgesetzt, eine Gerade und einen Kreis beschreiben zu können. Das geometrische Zeichnen, d. i. die praktische Ausführung jener theoretischen Constructionen, bedient sich daher bei den elementaren Aufgaben nur des Lineals und des Zirkels als Zeichen-Instrumente und hat mittelst derselben jene beiden fundamentalen Forderungen mit möglichster Annäherung an die in der Theorie angenommene Genauigkeit auszuführen. Weil aber diese Genauigkeit nie vollkommen erreicht werden kann, so darf der praktische Zeichner für seine besonderen Zwecke ausser Lineal und Zirkel noch andere Instrumente anwenden, wie das sog. rechtwinkelige Lineal (bezw. die Reissschiene), die Maassstäbe, und zum Anlegen von Winkeln den Transporteur. Derartige Hülfsmittel dienen jedoch nur dazu, gewisse häufig vorkommende Constructionen mit grösserer Bequemlichkeit angenähert auszuführen, und sind in soweit gestattet, als die dadurch bedingte Ungenauigkeit der Zeichnung nicht grösser wird, als bei der Ausführung der betreffenden Construction nur mit Zirkel und Lineal der Fall sein würde, bezw. als für den gerade vorliegenden praktischen Zweck erforderlich ist.

Man kann nach dem Vorstehenden die Lehre von den geometrischen Constructionen als die wissenschaftliche Grundlage des geometrischen Zeichnens erklären. Diejenigen hierher gehörigen Aufgaben, welche als die einfachsten am häufigsten Anwendung finden, wie z. B. das Errichten und Fällen von Senkrechten, das Ziehen von Parallelen, die Halbirung von Strecken oder Winkeln u. dgl. m., sind schon im Früheren — §§ 32—34, §§ 45, 46 und § 50 — behandelt worden. Dieselben mögen als Fundamental-Aufgaben bezeichnet werden, und ihre Kenntniss wird im Folgenden vorausgesetzt.

Die vollständige Auflösung einer Constructions-Aufgabe zerfällt in vier Theile: Die Analysis entwickelt den Gedankengang, durch welchen das zu der verlangten Figur führende Verfahren gefunden wird, indem sie die Beziehungen zwischen dem Gesuchten und dem Bekannten oder Gegebenen ermittelt. Die Construction lehrt dann, wie die Zeichnung ausgeführt wird, der Beweis zeigt die Richtigkeit dieses Verfahrens auf Grund bewiesener mathematischer Lehren, die Determination endlich untersucht, ob und wie weit die gesuchte Figur durch die gegebenen Grössen bestimmt ist. Die Determination hat also die etwaigen Bedingungen der Möglichkeit der Auflösung der Aufgabe, sowie die Anzahl derjenigen Figuren zu ermitteln, welche den Forderungen der Aufgabe entsprechen.

Die nähere Erläuterung dieser Theile und die sonstigen allgemeineren Erörterungen über die Lehre von den Constructionen sollen im Folgenden an bestimmte Beispiele geknüpft werden, wodurch dieselben an Verständlichkeit gewinnen dürften.

A. Methode der Hülfsfiguren.

§ 61.

Im § 32 sind diejenigen Fundamental-Aufgaben behandelt worden, welche in Anlehnung an die Congruenzsätze die Construction eines Dreiecks verlangen wenn

a) die drei Seiten, oder
b) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder
c) zwei Seiten und einer der denselben gegenüberliegenden Winkel, oder
d) eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel, oder
e) eine Seite, ein ihr anliegender und der ihr gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

In diesen Aufgaben ist jedes der zur Bestimmung des Dreiecks gegebenen Stücke entweder eine Seite oder ein Winkel desselben. An Stelle eines oder mehrerer dieser Stücke, die wir als »unmittelbare« bezeichnen wollen, können nun anderweite »Bestimmungsstücke«, wie z. B. die Summe oder die Differenz zweier Seiten, die Höhen, die von den Höhen auf den Seiten gebildeten Abschnitte, die Radien der Berührungskreise des Dreiecks u. dgl. m. gesetzt werden. Man erhält auf diese Weise eine unerschöpfbare Menge von anderweiten Aufgaben, in denen also die Construction eines Dreiecks aus drei Stücken verlangt wird, welche zum Theil oder sämmtlich nicht unmittelbare sind und im Gegensatz zu solchen als mittelbare Bestimmungsstücke bezeichnet werden können.

Nicht alle Zusammenstellungen dreier Stücke behufs Bildung solcher Aufgaben sind jedoch gestattet; es fragt sich vielmehr im einzelnen Falle, ob die Aufgabe möglich ist, d. h. ob das Dreieck aus jenen Stücken überhaupt construirt werden kann, und ob es durch dieselben hinreichend bestimmt ist. Sind z. B. ein Winkel, eine ihm anliegende Seite und die zu der anderen anliegenden Seite senkrechte Höhe der Grösse nach gegeben, so sieht man leicht ein, dass diese drei Stücke einem und demselben rechtwinkeligen Dreieck angehören, welches als ein Theil des gesuchten erscheint. Da aber dieses rechtwinkelige Dreieck bereits durch die gegebene Seite und den gegebenen Winkel nebst dem rechten Winkel, und mit ihm durch diese Stücke also auch die Länge der Höhe bestimmt ist, so ist jene Aufgabe unstatthaft. Hat nämlich die für die Höhe gegebene Strecke nicht diejenige Länge, welche durch die beiden anderen Stücke vorgeschrieben ist, so enthält die Aufgabe einen Widerspruch und verlangt also Unmögliches. Hat aber jene Strecke, vielleicht in Folge ihrer Messung an einem in der Natur existirenden Dreieck oder in Folge einer Berechnung, die richtige Länge, so ist die Angabe derselben einfach überflüssig, und zur Construction des gesuchten Dreiecks sind in Wirklichkeit nur zwei Stücke gegeben, sodass das erforderliche dritte fehlt und die Aufgabe unbestimmt ist.

In ähnlicher Weise ist z. B. durch den Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises und einen Winkel bereits die dem letzteren gegenüberliegende Seite, oder durch den Flächeninhalt und die Höhe zugleich die Grundlinie der Länge nach bestimmt und darf demnach nicht mit den beiden ersteren Stücken zugleich als Bestimmungsstück gegeben werden. Es ist also, allgemein ausgedrückt, die Bedingung zu erfüllen, dass die als Bestimmungsstücke gegebenen Grössen von einander unabhängig sein müssen.

Es ist jedoch, auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, damit noch keineswegs der Beweis geliefert, dass eine Aufgabe der gedachten Art immer möglich sei. So ist beispielsweise schon die oben erwähnte Fundamental-Aufgabe, ein Dreieck aus den drei Seiten zu construiren, in den Fällen unmöglich, in welchen die Summe zweier dieser Seiten nicht grösser oder die Differenz derselben nicht kleiner als die dritte Seite ist. Indem wir nun die Führung des Beweises der Möglichkeit der Behandlung jeder einzelnen Aufgabe überlassen, sei nur noch bemerkt, dass derselbe im Allgemeinen jedesmal durch die Analyse der Aufgabe

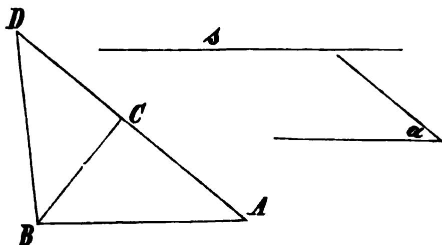
gegeben sein wird. Insofern nämlich durch dieselbe ein Weg für die Ausführung der Construction aufgefunden wird, ist damit auch die Möglichkeit dieser Ausführung nachgewiesen. Die Determination hat dann, wie schon bemerkt, zu untersuchen, ob diese Möglichkeit nur unter besonderen Voraussetzungen über die gegebenen Stücke stattfindet, in welchen speciellen Fällen also etwa die Aufgabe Unmögliches verlangt, sowie ob die gesuchte Figur durch die gegebenen Stücke mehr oder minder vollständig bestimmt wird.

Es soll nun zunächst ein zur Auflösung derartiger Aufgaben geeignetes Verfahren an einigen ausgeführten Beispielen gezeigt werden.

§ 62. Ausgeführte Beispiele.

1. Es sei die Aufgabe gestellt, ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Summe seiner Katheten und einem der spitzen Winkel zu construiren.

Es sei also eine Strecke s der Länge nach und ausserdem ein spitzer Winkel α gegeben; man soll ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, in welchem ein Winkel gleich α und die Summe der Katheten gleich s ist. Denkt man sich vorläufig irgend ein rechtwinkeliges Dreieck ABC gezeichnet, und nimmt man an, dasselbe sei das verlangte, so müsste also, wenn ACB der rechte Winkel ist, $AC + CB = s$ und etwa $\angle BAC = \alpha$ sein. Da nun die Auflösung der Aufgabe nicht gelingen kann, ohne dass die gegebenen Stücke benutzt werden, so trage man zunächst Sorge, eine der Strecke s gleiche Linie in geeigneter Weise mit dem Dreieck ABC in Verbindung zu bringen. Verlängert man zu diesem Zwecke AC um die der Seite CB gleiche Strecke CD, so ergiebt die Verbindung von D mit B ein Hülfsdreieck ADB, in welchem die Seite $AD = s$ und der Winkel DAB gleich α bekannt sind. Da ausserdem das Dreieck BCD gleichschenkelig und rechtwinkelig ist, so ist auch der Winkel ADB gleich 45 Grad bekannt. Man kennt also in dem Hülfsdreieck ADB eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel, und man kann somit dasselbe aus diesen Stücken gemäss einer der Fundamental-Aufgaben construiren. Ist dies geschehen, so erhält man die zur Construction des gesuchten Dreiecks noch nöthige Linie BC mittelst der von B auf AD zu fällenden Senkrechten, oder auch durch Anlegen eines Winkels von 45 Grad an BD im Punkte B.



Nach dieser Analyse wird die obige Aufgabe durch folgende Construction gelöst: Auf einer beliebigen Geraden trage man eine Strecke AD gleich der gegebenen s ab; darauf lege man an AD in A einen Winkel gleich dem gegebenen α und an DA in D (nach derselben Seite) einen Winkel gleich der Hälfte eines Rechten an. Die angelegten Schenkel werden sich dann in einem Punkte B schneiden. Endlich fälle man von B die Senkrechte BC auf AD und behaupte, ABC sei das verlangte Dreieck.

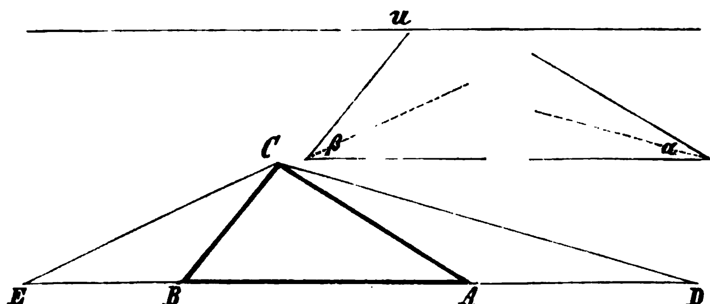
Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich durch folgenden Beweis. Der Winkel ACB ist ein rechter, da BC nach Construction senkrecht auf AC steht, und der Winkel BAC ist gleich dem gegebenen α, ebenfalls nach Construction. Ferner ist die Summe der Winkel CBD und CDB dem Aussenwinkel ACB des Dreiecks BCD, also einem Rechten gleich, und da CDB nach Con-

struction gleich der Hälfte eines Rechten ist, so muss CBD die gleiche Grösse haben. Hieraus folgt wieder die Gleichheit der diesen Winkeln bezüglich gegenüberliegenden Seiten CB und CD des Dreiecks BCD. Daher ist $AC + CB = AC + CD = AD$, AD aber ist nach Construction gleich s, mithin ist auch die Summe $AC + CB$ der Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks ABC der gegebenen Strecke s gleich. Dieses Dreieck erfüllt also alle gestellten Forderungen, d. h. es ist das verlangte.

Man erhält endlich die Determination der Aufgabe, wenn man die einzelnen in der Construction nach einander ausgeführten Operationen mit Rücksicht darauf betrachtet, ob dieselben sich stets oder nur unter gewissen Bedingungen ausführen lassen, bezw. zu dem verlangten Ziele führen, sowie im Bejahungsfalle, ob sie nur eine einzige Auflösung oder mehrere liefern. Im vorliegenden Falle ergiebt sich leicht, dass — sofern α ein spitzer Winkel ist, was als selbstverständlich vorausgesetzt werden darf — die gesammte Construction stets, und zwar nur auf eine einzige Art ausführbar ist. Die Determination ist also bei dieser Aufgabe dahin zu fassen, dass letztere stets, und zwar nur in eindeutiger Weise gelöst werden könne.

2. Es sei ferner die Aufgabe gestellt, **ein Dreieck aus dem Umfang und zwei Winkeln zu construiren.**

Analysis: Angenommen, das Dreieck ABC sei das verlangte, also der Winkel BAC gleich dem einen gegebenen α, der Winkel CBA gleich dem anderen gegebenen β, und die Summe der drei Seiten AB, BC und CA gleich der gegebenen Strecke u, so verlängere man BA um AD gleich AC, sowie AB um BE gleich BC und ziehe CD und CE. Hierdurch entsteht das Hülfsdreieck CDE, in welchem $DE = u$ bekannt ist. Ferner ist der Winkel CEB gleich BCE, da das Dreieck CBE gleichschenkelig ist. Nun ist der Aussenwinkel CBA dieses Dreiecks gleich der Summe der genannten Winkel, und folglich muss jeder der letzteren gleich der Hälfte von CBA, und mithin auch gleich $\frac{1}{2}\beta$ sein. In derselben Weise ergiebt sich mittelst des gleichschenkeligen Dreiecks CAD, dass jeder der Winkel ADC und DCA gleich $\frac{1}{2}\alpha$ ist. Somit sind von dem Hülfsdreieck CDE eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt, und dieses Dreieck kann also construirt werden. Durch Anlegen der bekannten Winkel DCA und BCE ergeben sich dann auch die noch fehlenden Eckpunkte A, B des gesuchten Dreiecks.



Construction: Man halbire die gegebenen Winkel α und β, zeichne eine beliebige Gerade, trage auf derselben eine Strecke ED gleich dem gegebenen Umfang u ab, lege an ED in E einen Winkel gleich $\frac{1}{2}\beta$ und an DE in D auf derselben Seite der Geraden einen Winkel gleich $\frac{1}{2}\alpha$ an; die angelegten Schenkel mögen einander in einem Punkte C schneiden. Man lege darauf an CD in C innerhalb des Dreiecks ECD einen Winkel gleich $\frac{1}{2}\alpha$ und ebenso an CE in C

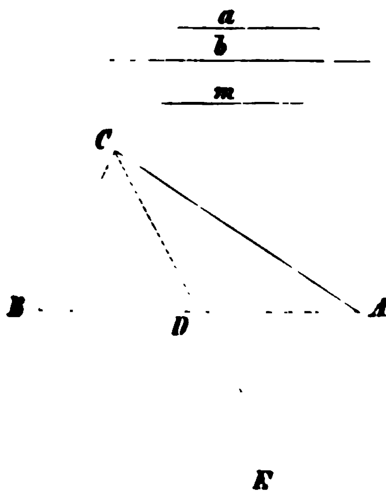
einen Winkel gleich $\frac{1}{2}\beta$ an; die angelegten Schenkel mögen ED bezüglich in A und B schneiden. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Da nach Construction jeder der Winkel CEB und BCE gleich $\frac{1}{2}\beta$, und da CBA als Aussenwinkel des Dreiecks BCE gleich der Summe jener beiden Winkel ist, so ist $\angle CBA = \beta$. Auf gleiche Weise ergiebt sich, dass der Winkel CAB gleich α ist. Da ferner die Winkel BCE und CEB, weil beide gleich $\frac{1}{2}\beta$, auch einander gleich sind, so müssen auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten BC und EB des Dreiecks BCE einander gleich sein. Ebenso ergiebt sich für das Dreieck CAD, dass CA gleich AD ist. Daher muss $BC + BA + CA = EB + BA + AD = ED$ sein, und da ED nach Construction gleich u ist, so hat das Dreieck ABC auch den gegebenen Umfang. Da dieses Dreieck also die drei gegebenen Stücke hat, so ist es das verlangte.

Determination: Aus der Construction ergiebt sich, dass die Bedingung $\alpha + \beta < 180^\circ$ als selbstverständlich vorausgesetzt, stets ein und nur ein einziges der Aufgabe genügendes Dreieck möglich ist, oder mit anderen Worten, dass alle Dreiecke, welche sich aus den gegebenen Stücken construiren lassen, nur der Lage, nicht aber der Gestalt und Grösse nach von einander verschieden sein können, dass also alle diese Dreiecke einander congruent sind. — Sollte die Bedingung $\alpha + \beta < 180^\circ$ nicht erfüllt sein, so würde in dem Dreieck CED, $\angle CED + \angle CDE \overset{=}{>} 90^\circ$, also $\angle ECD \overset{=}{<} 90^\circ$ sein, und es würden sich also die beiden Winkel ECB, DCA nicht von ECD so abtragen lassen, dass ein Rest BCA übrig bliebe.

3. Aufgabe: Ein Dreieck aus zwei Seiten und der die dritte Seite halbirenden Mittellinie zu construiren.

Analysis: Angenommen, ABC sei das gesuchte Dreieck, und zwar sei BC gleich der für die eine Seite gegebenen Strecke a, AC gleich der für die andere Seite gegebenen b, so halbire man AB und verbinde den Halbirungspunkt D mit C. Dann muss CD gleich der dritten gegebenen Strecke m sein. Verlängert man nun CD um DE gleich CD und verbindet E mit A, so sind die Dreiecke BCD und EDA congruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und es ist daher AE gleich BC und mithin gleich a. Es sind also von dem Hülfsdreieck CEA die drei Seiten CA gleich b, AE gleich a und CE gleich $2m$ bekannt, und dasselbe kann daher (im Allgemeinen) construirt werden. Dann ist auch D als Halbirungspunkt von CE bekannt, und durch die Linie AD und deren Verlängerung DB gleich AD ergiebt sich auch der Eckpunkt B.



Construction. Auf einer beliebigen Geraden trage man nach einander die Strecken CD und DE, beide gleich der für die Mittellinie gegebenen Strecke m ab, beschreibe dann um C mit der gegebenen Seite b und um E mit der gegebenen Seite a einen Kreisbogen, verbinde einen Durchschnittspunkt A dieser

beiden Kreisbogen mit C und mit D, verlängere AD um DB gleich AD und ziehe BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: Man ziehe AE. Dann ist, weil nach Construction CD gleich DE, AD gleich BD ist, und weil die Winkel BDC und ADE als Scheitelwinkel einander gleich sind, das Dreieck ADE dem Dreieck BCD congruent, also ist auch AE gleich BC. Da nun AE nach der Construction gleich a ist, so muss auch BC gleich a sein. Ferner ist nach Construction AC gleich b und CD gleich m, und es halbirt CD die Seite AB, weil DB gleich AD gemacht ist. Mithin ist das Dreieck ABC das verlangte.

Determination: Das Hülfsdreieck ACE ist nur dann möglich, wenn die Summe der Seiten AC und AE grösser und die Differenz derselben kleiner ist als die dritte Seite CE. Man erhält also die Bedingungen $a+b>2m$ und $a-b<2m$ für die Lösbarkeit der Aufgabe. Sind dieselben erfüllt, so kann das Dreieck ACE stets construirt werden. Da dann alle folgenden Theile der Construction stets, und zwar eindeutig ausgeführt werden können, so ist die gestellte Aufgabe unter den genannten Bedingungen stets, und nur auf eine einzige Art lösbar.

§ 63. Erläuterung der Methode.

Man nimmt, wie die Beispiele des vorigen Paragraphen zeigen, zum Zwecke der Analyse zunächst eine vorläufige Figur von der in der Aufgabe verlangten Art an und stellt die Bedingungen auf, welchen dieselbe genügen müsste, wenn sie die verlangte selbst sein sollte. Es ist dazu nothwendig, dass alle den gegebenen Bestimmungsstücken entsprechenden Stücke in der Figur vorkommen, da anderenfalls die Lösung der Aufgabe auch ohne das nicht gebrauchte Stück möglich und die Angabe des letzteren also nicht statthaft wäre. Sofern also die betreffenden Strecken oder Winkel nicht von selbst in jener vorläufigen Figur vorhanden sind, müssen dieselben in geeigneter Weise angebracht und mit der übrigen Figur in Zusammenhang gesetzt werden. So geschah dies in der ersten der Aufgaben des vorigen Paragraphen mit der Summe der Katheten, in der zweiten mit der Summe der drei Seiten, und in der dritten mit der Mittellinie des Dreiecks, während jedesmal die den beiden anderen gegebenen Stücken entsprechenden des angenommenen Dreiecks an diesem unmittelbar vorhanden waren und also einer solchen Construction nicht bedurften. In jeder der drei Aufgaben wurde das construirte mittelbare Stück durch eine oder mehrere geeignete Hülfslinien mit den übrigen in Verbindung gebracht. Es ist dann dahin zu streben, dass man eine Hülfsfigur erhalte, welche die sämmtlichen Bestimmungsstücke oder doch einen Theil derselben derart enthält, dass sie aus denselben nach einer bereits früher gelösten und daher als bekannt anzunehmenden, insbesondere womöglich nach einer Fundamental-Aufgabe construirt werden kann. In den Aufgaben des vorigen Paragraphen entstand jedesmal durch Vermittelung der Hülfslinien ein Dreieck, welches die sämmtlichen gegebenen Stücke oder aus ihnen leicht ableitbare (wie in der zweiten Aufgabe die Hälften der gegebenen Winkel) enthielt, und dessen Construction aus diesen Stücken durch eine der Fundamental-Aufgaben gelöst wurde. Ist bei irgend einer gestellten Aufgabe eine derartige Hülfsfigur ermittelt worden, so ist schliesslich noch ein Uebergang von derselben zu der verlangten Figur zu suchen, welcher die Construction der letzteren mit Hülfe der ersteren ermöglicht.

Das hiermit zur Construction von Dreiecken angegebene Verfahren lässt sich in

entsprechender Weise auf Vierecke und Polygone ausdehnen, wie später noch an einzelnen Beispielen gezeigt werden soll.

Ehe wir zur Aufstellung weiterer hierher gehöriger Aufgaben übergehen, sei noch eines besonderen Hülfsmittels erwähnt, welches in vielen Fällen die Auflösungen erleichtert. Die im § 61 erwähnte Thatsache, dass bereits durch zwei gegebene Bestimmungsstücke einer Figur ein anderes Stück derselben bestimmt sein kann, so dass dasselbe nicht neben jenen beiden als weiteres Bestimmungsstück verwendet werden darf, führt darauf, dass man in Fällen, wo die Construction dieses abhängigen Stücks aus den beiden anderen auf hinreichend einfache Weise ausgeführt werden kann, dasselbe wie eine ebenfalls gegebene Grösse behandeln darf. Indem dann dieses abgeleitete Stück an Stelle irgend eines von denen, aus welchen es gefunden wurde, gesetzt und benutzt werden kann, lässt sich die gestellte Aufgabe häufig in eine andere und leichter zu lösende verwandeln.

Man bezeichnet überhaupt solche Stücke einer Figur, welche aus anderen gegebenen Stücken der letzteren auf eine bekannte Weise gefunden und daher mit jenen ebenfalls als bekannt betrachtet werden dürfen, als »Data«. Im weiteren Sinne erhält man also durch jede ausgeführte Auflösung einer Aufgabe ein neues Datum, nämlich die gesuchte Figur, bezw. deren Theile. So kann beispielsweise, nachdem die erste Aufgabe des vorigen §. gelöst worden, jede Seite eines Dreiecks als ein aus dem Umfang und den Winkeln hervorgehendes Datum angesehen werden. Wir setzen jedoch im engeren Sinne voraus, dass die zur Herstellung der Data dienenden Operationen nicht über die Fundamental-Aufgaben hinausgehen. Solche Data sind beispielsweise folgende:

Durch die Summe $x+y$ zweier Strecken oder zweier Winkel (oder auch Flächen) und eine einzelne x dieser Grössen ist die andere y gegeben, denn ist $x+y=s$ und $x=a$, so ist $y=s-a$.

Ebenso ist durch $x-y$ und x auch y, durch $x-y$ und y auch x, durch einen spitzen Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks der andere, durch den Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks der Winkel an der Spitze und umgekehrt, durch zwei Winkel eines Dreiecks oder auch schon durch die Summe derselben der dritte Winkel gegeben, u. dgl. m.

Hierher gehören also auch die im § 61 erwähnten Fälle, nach welchen durch einen Winkel eines Dreiecks und eine ihm anliegende Seite die Höhe auf der anderen anliegenden Seite, durch den Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises und einen Winkel die gegenüberliegende Seite, durch den Flächeninhalt und die Höhe eines Dreiecks die Grundlinie des letzteren gegeben ist. Genauer ist es, zu sagen, dass durch je zwei der betreffenden drei Stücke das dritte, also beispielsweise nicht nur durch den Radius eines Kreises und einen Peripheriewinkel des letzteren die zugehörige Sehne, sondern auch durch die Sehne und den Peripheriewinkel der Radius und durch die Sehne und den Radius der Peripheriewinkel (letzterer allerdings zweideutig) gegeben sei.

Wir sehen von einer ausführlicheren Aufzählung solcher Beispiele, welche der Leser leicht selbst ergänzen wird, an dieser Stelle ab und führen nur noch eines derselben an, welches besonders häufig Anwendung findet und einer näheren Erläuterung bedürfen möchte.

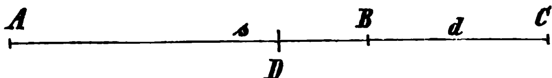
Ist nämlich die Summe zweier Grössen und zugleich die Differenz derselben zwei Grössen bekannt, so erhält man diese letzteren leicht einzeln durch den Satz, dass die grössere derselben gleich der Hälfte der durch Addition, die kleinere

gleich der Hälfte der durch Subtraction der gegebenen entstehenden Grössen sei. Mit anderen Worten, ist

$$x + y = s, \; x - y = d$$

gegeben, so ist $x = \frac{1}{2}(s + d)$ und $y = \frac{1}{2}(s - d)$. Man erhält diese Resultate ohne Weiteres durch die Auflösung jener beiden Gleichungen auf die Unbekannten x und y mittelst Addition und Subtraction.

Ist also beispielsweise die Summe s und die Differenz d zweier Strecken gekannt, so kann man, um diese letzteren selbst zu erhalten, eine Strecke AB gleich s um BC gleich d verlängern und die entstehende ganze Strecke AC halbiren. Die Hälfte AD der letzteren giebt dann die Länge der gesuchten grösseren Strecke x an; die der kleineren y bedarf dann keiner besonderen Construction mehr, da $DB = s - x = y$ sein muss.



Trägt man dagegen auf $AB = s$ eine Strecke $BE = d$ ab und halbirt den Rest AE in F, so ist $AF = y$ und folglich $FB = x$. In ganz entsprechender Weise erhält man aus der Summe und der Differenz zweier Winkel diese letzteren selbst, und diese Construction findet beispielsweise Anwendung, wenn sich unter den gegebenen oder ermittelten Stücken eines Dreiecks ein Winkel desselben nebst der Differenz der beiden anderen Winkel befindet. Durch jenen Winkel ist nämlich auch die Summe der beiden anderen Winkel gegeben, denn dieselbe ist gleich seinem Nebenwinkel.

§ 64. Weitere Aufgaben zur Methode der Hülfsfiguren.

a) Durch jede Höhe eines Dreiecks entstehen zwei rechtwinkelige Dreiecke, welche als Hülfsfiguren dienen können. Zur Determination ist zu bemerken, dass das gesuchte Dreieck sowol als Summe, wie als Differenz der Theildreiecke erscheinen, also eine Zweideutigkeit der Aufgabe stattfinden kann. Das letztere ist der Fall, wenn einer der Winkel an der Grundlinie ein stumpfer ist, das erstere, wenn beide spitz sind. Hiernach ist auch die Grundlinie entweder gleich der Differenz oder gleich der Summe ihrer Abschnitte. Eine Auswahl hierher gehöriger Aufgaben ist folgende:

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus

1. einer Kathete und der Projection derselben auf die Hypotenuse,
2. der Höhe auf die Hypotenuse und einem der spitzen Winkel,
3. einer Kathete und der Höhe auf die Hypotenuse.

Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren aus

4. dem Schenkel und der Höhe auf die Grundlinie,
5. der Basis und der Höhe auf die Grundlinie,
6. der Basis und der Höhe auf einem Schenkel.

Ein Dreieck zu construiren aus

7. der Höhe und den beiden anliegenden Seiten,
8. der Höhe, einer anliegenden Seite und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel,
9. zwei Seiten und der Projection der einen von ihnen auf die andere,
10. einem Winkel an der Grundlinie und den beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitten der letzteren,
11. der Höhe, einer anliegenden Seite und dem Winkel an der Spitze,
12. der Höhe, einem Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze.

b) Ist unter den gegebenen Stücken eine Mittellinie, so ist von den durch Construction derselben entstehenden Theil-Dreiecken jedes einzelne ein Hülfsdreieck, durch welches das andere und somit auch das gesuchte ganze Dreieck bestimmt ist. Man construire hiernach beispielsweise ein Dreieck aus 1. zwei Seiten und der die eine von ihnen halbirenden Mittellinie, 2. einem Winkel, einer demselben anliegenden Seite und der die andere anliegende Seite halbirenden Mittellinie, 3. einer Seite, der zu ihr gehörigen Mittellinie und dem Winkel zwischen diesen beiden Linien.

c) Dasselbe, wie unter b), gilt von den Theil-Dreiecken, welche durch eine winkelhalbirende Transversale entstehen. Der Winkel, welchen eine solche Transversale mit der ihr gegenüberliegenden Seite bildet, ist das Complement zur Hälfte der Differenz der beiden dieser Seite anliegenden Dreieckswinkel. (Es ist $\angle\ \varphi = \beta + \frac{1}{2}\gamma = \beta + 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Man construire hiernach beispielsweise ein Dreieck aus 1. einem Winkel, der denselben halbirenden Transversale und einer anliegenden Seite, 2. einem Winkel, der einen zweiten Winkel halbirenden Transversale und der beiden Winkeln anliegenden Seite, 3. zwei Winkeln und der den dritten Winkel halbirenden Transversale.

d) Die Mittellinie m, welche die Grundlinie c halbire, ist die Hypotenuse eines Hülfsdreiecks, dessen eine Kathete die Höhe h ist. Durch dieses Hülfsdreieck ergeben sich die durch die Höhe oder durch die Mittellinie entstehenden Theil-Dreiecke des ganzen. Man construire z. B. ein Dreieck aus 1. m, h und einer anliegenden Seite a; 2. m, h und einem Winkel β an der Grundlinie; 3. m, h und c.

e) Die den Winkel γ an der Spitze halbirende Transversale w ist die Hypotenuse eines Hülfsdreiecks, dessen eine Kathete die Höhe h ist. Der Winkel φ zwischen der Transversale und der Grundlinie c ist nach c) gleich $90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Man construire, diesen Bezeichnungen entsprechend, ein Dreieck aus 1. w, h, und einer anliegenden Seite a; 2. w, a, $\alpha - \beta$; 3. w, h, α.

f) Die drei Höhen theilen das gesuchte Dreieck in sechs kleinere rechtwinkelige Dreiecke. Durch irgend eines von diesen Dreiecken und ein von ihm unabhängiges Stück eines zweiten ist das ganze bestimmt. Man construire z. B. ein Dreieck aus 1. einer Höhe, dem oberen (d. h. dem Eckpunkt anliegenden Abschnitt derselben und einem Winkel an der Grundlinie, 2. einer Höhe, dem oberen Abschnitt derselben und dem oberen Abschnitt einer zweiten Höhe, 3. dem oberen Abschnitt einer Höhe und den beiden Winkeln an der Grundlinie.

g) Die drei Mittellinien eines Dreiecks theilen einander im Verhältniss 1 : 2 und das Dreieck in sechs kleinere Dreiecke, von denen jedes das ganze bestimmt. Man construire ein Dreieck aus 1. zwei Mittellinien und der von einer derselben halbirten Seite, 2. zwei Mittellinien und dem Winkel zwischen einer derselben und der von der anderen halbirten Seite, 3. zwei Mittellinien und dem Winkel, unter welchem dieselben einander schneiden.

h) Die drei winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks theilen dasselbe in sechs kleinere Dreiecke, von denen jedes das ganze bestimmt. Man construire ein Dreieck aus 1. einer Seite und den Abständen ihrer Endpunkte von dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, 2. einem Winkel, der Entfernung seines Scheitelpunkts vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und einer ihm anliegenden Seite, 3. einem Winkel, dem Abstand seines Scheitelpunkts und dem Abstand eines zweiten Eckpunkts vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises

i) Befindet sich unter den gegebenen Stücken die Summe $a + b = s$ zweier

Seiten $BC = a$, $AC = b$ des gesuchten Dreiecks und verlängert man BC um $CD = CA$, so ergiebt die Verbindung von D mit A ein Hülfsdreieck BDA, in welchem $BD = s$, $BA = c$ die dritte Seite des gegebenen Dreiecks, ferner $\angle DBA = \beta$, ein Winkel des letzteren, $\angle BDA = \frac{1}{2}\gamma$ gleich der Hälfte eines zweiten Winkels desselben und $BAD = \alpha + \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist. Ist insbesondere ABC ein bei C rechtwinkeliges Dreieck, so ist BD gleich der Summe der Katheten und $\angle BDA = 45^\circ$. Ist dagegen in diesem Falle die Summe $c + a$ der Hypotenuse c und einer Kathete a gegeben, so verlängere man diese Kathete CB über B um die Hypotenuse. Das Hülfsdreieck ACD ist dann rechtwinkelig, hat die Katheten $c + a$ und $AC = b$ und den Winkel $\frac{1}{2}\beta$. Verlängert man dagegen die Hypotenuse AB über B um die Kathete a, so ist das Hülfsdreieck schiefwinkelig, hat eine Seite gleich b, eine gleich $c + a$ und Winkel gleich $\frac{1}{2}\beta$ und α.

Ein rechtwinkeliges Dreieck (nach den vorstehenden Bezeichnungen) zu construiren aus 1. $a + b, c$; 2. $a + b, \alpha - \beta$; 3. $c + a, b$; 4. $c + a, \alpha$; 5. $c + a, \beta$; 6. $c + a, \alpha - \beta$.

Ein Dreieck zu construiren aus 7. $a + b, c, \beta$; 8. $a + b, c, \gamma$; 9. $a + b, c, \alpha - \beta$; 10. $a + b, \alpha, \beta$; 11. $a + b, \alpha - \beta, \gamma$.

k) Befindet sich unter den gegebenen Stücken die Differenz d zweier Seiten $BC = a$ und $AC = b$, und trägt man $CE = CA$ auf CB ab, so ergiebt die Verbindung von E mit A ein Dreieck EAB, in welchem $BE = d$, ferner $BA = c$ und $\angle EBA = \beta$ unmittelbare Stücke des gesuchten Dreiecks und endlich, wenn $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$ gesetzt wird, $\angle BEA = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\angle EAB = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist. — Ist insbesondere die Differenz der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks gegeben, so ist entsprechend $\angle BEA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus 1. $a - b, \alpha$; 2. $a - b, \beta$; 3. $a - b, \alpha - \beta$; 4. $a - b, c$.

Ein Dreieck zu construiren aus 5. $a - b, c, \beta$; 6. $a - b, c, \gamma$; 7. $a - b, c, \alpha - \beta$; 8. $a - b, \beta, \gamma$; 9. $a - b, \alpha - \beta, \gamma$; 10. $a - b, \alpha, \beta$.

l) Verlängert man dagegen in dem unter k) angegebenen Falle CA um AF, so dass $CF = CB$ ist, und verbindet F mit B, so ist in dem Dreieck ABF, $AF = a - b$, $AB = c$, $\angle BAF = 180^\circ - \alpha$, $AFB = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, $ABF = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ist im rechtwinkeligen Dreieck, wenn c die Hypotenuse bezeichnet, $c - a$ gegeben, so erhält man in gleicher Weise, indem man also die Kathete $BC = a$ um CF verlängert, so dass $BF = BA$ wird, das rechtwinkelige Hülfsdreieck ACF, in welchem $CF = c - a$, $CA = b$, $\angle CFA = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ ist. Mittelst derartiger Hülfsdreiecke lassen sich für bereits vorher unter k) angegebene Aufgaben andere Lösungen finden. Ausserdem können die folgenden in dieser Weise behandelt werden:

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus 1. $c - a, b$; 2. $c - a, \beta$; 3. $c - a, \alpha$.

Ein Dreieck zu construiren aus 4. $a - b, c, \alpha$.

m) Ist der Umfang $a + b + c$ des Dreiecks ABC unter den gegebenen Stücken und macht man die in der zweiten Aufgabe des Paragraphen 62 angegebene Hülfsconstruction, so erhält man das ebendaselbst benutzte Hülfsdreieck. Ist $a + b - c$ gegeben und verlängert man — selbstverständlich bei Anwendung der im Vorigen gebrauchten Bezeichnungen — einerseits BC um $CD = CA$, schneidet andererseits $BG = BA$ von BD ab und zieht DA und GA, so ist in dem Dreieck DGA, $DG = a + b - c$, $\angle GDA = \frac{1}{2}\gamma$, $DGA = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, $DAG = \frac{1}{2}\alpha$.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus 1. $a + b + c, \alpha$; 2. $a + b - c, \alpha$; 3. $a + c - b, \beta$.

Ein Dreieck zu construiren aus 4. $a + b - c, \alpha, \beta$.

n) Zu den früher unter a) bis h) gestellten Aufgaben lassen sich mit Anwendung der unter i) bis m) angegebenen Verfahrungsweisen zusammengesetztere Aufgaben bilden, indem man das dortige Hülfsdreieck selbst wieder mittelst Summen oder Differenzen seiner Seiten bestimmt sein lässt. Man kann in solchen Fällen also zuerst dieses Hülfsdreieck auf dem betreffenden vorstehend unter i)—m) angegebenen Wege und sodann aus ihm das gesuchte, wie unter a)—h) gezeigt, construiren. Aus der grossen Anzahl derartiger Aufgaben wählen wir folgende als Beispiele aus, wobei wir behufs bequemer Stellung der Aufgabe ausser den im Vorigen angegebenen Bezeichnungen noch folgende benutzen: Es bezeichne h die auf c (im rechtwinkeligen Dreieck also auf der Hypotenuse) senkrechte Höhe, p die Projection der Seite a auf c, wobei $a > b$ vorausgesetzt werde, q die Projection von b auf c, w die den Winkel γ halbirende, m die die Seite c halbirende Transversale. Im gleichschenkeligen Dreieck sei b die Basis, a der Schenkel, h die Höhe auf der Basis.

Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren aus 1. $a + h$; 2. $a - h$.

Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren aus 3. $a + h, \beta$; 4. $a + h, \alpha$; 5. $a - h, \alpha$.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus 6. $a + h, \beta$; 7. $a + p, \alpha$; 8. $p + h, \alpha$; 9. $a - h, \beta$; 10. $a - h, p$.

Ein Dreieck zu construiren aus 11. $a + h, p, \alpha$; 12, $a + h, b, \beta$; 13. $a + p, \beta, q$; 14. $h + p, \alpha, \gamma$; 15. $h + p, a, \gamma$; 16. $a - h, p, b$; 17. $p - h, b, \beta$; 18. $p - h, \alpha, \gamma$; 19. $m - h, b$ und dem Winkel zwischen m und c; 20. $w + h, a, \alpha - \beta$; 21. $w - h, b, \alpha - \beta$; 22. $a + h$, β und der zu a gehörigen Mittellinie m_a; 23. $h + p, a, m_a$. 24. $b + h, \alpha$ und der den Winkel α halbirenden Transversale.

o) Trägt man vom Fusspunkt D der Höhe CD aus, wenn $\alpha < 90°$ ist auf DB, wenn $\alpha > 90°$ ist auf der Verlängerung von BD die Strecke $DE = DA$ ab und zieht CE, so erhält man das Hülfsdreieck BCE, in welchem $BC = a$ und zufolge der Congruenz der Dreiecke CAD, CED die Seite $CE = b$, ferner $\angle CBE = \beta$, $\angle CEB = 180° - \alpha$ und $< BCE = \alpha - \beta$ ist. Ferner ist BE gleich $p - q$, bezw. $p + q$. Betrachtet man, im Falle dass α ein stumpfer Winkel ist, q als eine negative Grösse, so kann man in beiden Fällen BE als die Differenz der durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Grundlinie betrachten. Wo demnach im Folgenden $p - q$ als gegebenes Stück genannt ist, unterscheide man die beiden Fälle, in denen q positiv oder negativ gedacht ist, bezw. setze im ersten Fall $\alpha < 90°$ voraus und im zweiten Fall $p + q$ statt $p - q$ und $\alpha > 90°$. — Man construire ein Dreieck aus:

1. $a, b, p - q$; 2. $a, p - q, \alpha - \beta$; 3. $a, h, \alpha - \beta$; 4. $p - q, h, \beta$.

p) Verlängert man in der bei o) angegebenen Figur noch BC um $BF = CA$ und zieht EF, so erhält man das Hülfsdreieck BEF, in welchem $BF = a + b$, $BE = p - q$, bezw. $p + q$, $\angle FBE = \beta$, $BFE = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $BEF = 90° + \frac{1}{2}$. ist. Man construire hiernach ein Dreieck aus:

1. $a + b, p - q, \beta$; 2. $a + b, p - q, \gamma$; 3. $a + b, p - q, \alpha - \beta$.

q) Trägt man dagegen in der bei o) angegebenen Figur $CG = CA$ von CB ab und zieht GE, so erhält man das Hülfsdreieck BGE, in welchem $BG = a - b$, $BE = p - q$, $\angle GBE = \beta$, $\angle BEG = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle BGE = 90° + \frac{1}{2}(\alpha -$ ist. Man construire hiernach ein Dreieck aus:

1. $a-b, p-q, \beta$; 2. $a-b, p-q, \gamma$; 3. $a-b, p-q, \alpha-\beta$.

r) Verlängert man die Höhe CD über D und ausserdem die Seite CB, letztere um $BK = BA$, und zieht die Parallele KL zu BA, welche die Verlängerung von CD in L schneide, so entsteht das Hülfsdreieck CKL, in welchem $CK = a + c$, $\angle CKL = \beta$, $\angle CLK = 90°$ ist. Zieht man noch BM senkrecht auf KL, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke BKM und ABN, wobei AN die zu BC senkrechte Höhe ist, dass $DL = AN$, also CL gleich der Summe zweier Höhen $h_a + h_c$ sei.

Durch das Hülfsdreieck CLK und ein von demselben unabhängiges Stück des Dreiecks ABC oder auch ein solches Stück von BKA ist ABC bestimmt. In letzterem Falle ist zu beachten, dass $\triangle ABK$ gleichschenkelig ist, und da $\angle BAK = \angle AKL$, so folgt dass KA den Winkel BKL halbirt. — Man construire hiernach ein Dreieck aus:

1. $a + c, h_a + h_c, a$; 2. $a + c, h_a + h_c, b$; 3. $h_a + h_c, \beta, a$; 4. $a + c, h_a + h_c, \alpha$; 5. $h_a + h_c, \alpha, \gamma$.

s) Trägt man dagegen $BP = BA$ von BC ab und zieht PQ parallel zu BA bis zum Durchschnittspunkt Q mit der Höhe CD, so ergiebt sich in entsprechender Weise, wie bei r), dass in dem Hülfsdreieck CPQ die Seite CQ gleich der Differenz zweier Höhen $h_c - h_a$, sowie $CP = a - c$, $\angle CPQ = \beta$, $\angle CQP = 90°$ ist und dass AP den Winkel BPQ halbirt. Man construire hiernach ein Dreieck aus:

1. $a - c, h_c - h_a, \gamma$; 2. $h_c - h_a, \beta, b$; 3. $a - c, h_c - h_a, \alpha$.

§ 65. Fortsetzung: Vierecks-Aufgaben.

a) Die Construction von Vierecken kann in vielen Fällen auf diejenige der Dreiecke zurückgeführt werden, in welche das Viereck durch seine Diagonalen zerlegt wird. So ist ein Parallelogramm $ABCD$ durch jedes einzelne der Dreiecke bestimmt, welche durch Ziehen irgend einer der beiden Diagonalen entstehen, denn man hat nach Construction des Dreiecks nur das Parallelogramm mittelst zweier zu Seiten des ersteren parallelen Geraden, oder durch Anlegen eines congruenten, aus den Längen der Seiten zu construirenden Dreiecks, oder auch mittelst noch anderer Abänderungen des Verfahrens, welche leicht ersichtlich sind, zu vervollständigen. Daher können die vorhergehenden Dreiecks-Aufgaben, auf das Dreieck ABC angewendet, zu Aufgaben über das Parallelogramm $ABCD$ benutzt werden. Dabei ist die Mittellinie m_b jenes Dreiecks die Hälfte der zweiten Diagonale des Parallelogramms. — Zieht man beide Diagonalen zugleich, so erhält man vier kleinere Dreiecke, von denen ebenfalls jedes einzelne das Parallelogramm bestimmt. — Hiernach können beispielsweise folgende Aufgaben behandelt werden, bei denen wir der Kürze halber $AB = a$, $BC = b$, $AC = e$, $BD = f$, $\angle DAB = \alpha$ und den Winkel der Diagonalen gleich ε, ferner die Höhe auf AB gleich h_a und die auf CB gleich h_b setzen.

Ein Rechteck zu construiren aus 1. a, e; 2. e, ε.

Einen Rhombus zu construiren aus 3. e, f; 4. e, h; 5. h, α.

Ein Parallelogramm zu construiren aus 6. a, b, e, 7. a, b, h_a; 8. e, h_a, α; 9. a, h_a, h_b; 10. e, f, ε.

Ein Quadrat zu construiren aus 11. $e + a$; 12. $e - a$.

Ein Rechteck zu construiren aus 13. $a + b, e$; 14. $a, e - b$; 15. $a - b, e$; 16. $a, e + b$.

Einen Rhombus zu construiren aus 17. $a, e+f$; 18. $e+h, \alpha$; 19. $e-a, \alpha$; 20. $a, e-f$.

Ein Parallelogramm zu construiren aus 21. $a+b, \alpha, e$; 22. $b+h_a, \alpha, a$; 23. $b-h_a, \alpha, e$; 24, $a-b, \alpha, e$; 25. $a+e, b, \alpha$.

b) Ein Trapez $ABCD$, in welchem $AB=a$ die grössere, $CD=c$ die kleinere parallele Seite, $BC=b$, $DA=d$, h die Höhe, die Diagonale $AC=e$, $BD=f$ und $\angle BAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ sei, ist bestimmt durch das Dreieck ABC und ein davon unabhängiges Stück von CAD oder BCD; ein gleichschenkeliges Trapez schon durch das Dreieck BAC allein. — Verlängert man ferner BA um $AE=CD$ und zieht DE, so ist in dem Hülfsdreieck BDE die Seite $BE=a+c$, ferner $BD=f$, $DE=e$, $\angle BDE$ gleich dem Winkel ε der Diagonalen (oder $180^\circ-\varepsilon$), $\angle DBE=(f, a)$, $\angle DEB=(e, a)$. — Zieht man endlich DF parallel zu CB bis zum Durchschnittspunkt F mit AB, so ist in dem Hülfsdreieck ADF die Seite $AF=a-c$, ferner $DF=b$, $DA=d$, $\angle DAF=\alpha$, $\angle DFA=\beta$.

Fin gleichschenkeliges Trapez zu construiren aus 1. a, b, e; 2. b, h, e.

Ein Trapez zu construiren aus 3. a, b, β, c; 4. a, b, f, β; 5. b, e, f, h; 6. b, e, h, α

Ein Trapez zu construiren aus 7. $a+b, c, e, \alpha$; 8. $a-b, d, e, \alpha$; 9. $a+b, e, f, \beta$; 10. $a-b, c, d, e$.

Ein Trapez zu construiren aus 11. $a+c, d, e, f$; 12. $a+c, e, f, \alpha$; 13. a, e, f, ε; 14. $a+c, b, e, f$; 15. b, e, f, ε; 16. $e, f, \alpha, \varepsilon$.

Ein Trapez zu construiren aus 17. $a-c, b, d, f$; 18. $a-c, b, d, e$; 19. $a-c, b, f, \beta$; 20. a, c, α, β.

c) Ein allgemeines Viereck ist bestimmt, wenn zwei von den Dreiecken, in welchen es durch die Diagonalen zerlegt wird, und welche je eine ganze Diagonale zur Seite haben, construirt werden können. — Zieht man zum Viereck $ABCD$ die Geraden BF und DG parallel zu der Diagonale AC, ferner CF parallel zu AB und bis zum Durchschnittspunkt F mit BF, ebenso CG parallel zu AD bis zum Durchschnittspunkt G mit DG, sowie endlich die Verbindungslinie FG, so ist in dem Dreieck CFG, $CF=AB=a$, $CG=AD=d$, $FG=BD=f$, $\angle FCG=\angle BAD=\alpha$. Ferner ist $BF=DG=AC=e$, $\angle BCF=\angle ABC=\beta$, $\angle DCG=\angle ADC=\delta$. Ferner mögen BC durch b, DC durch c, $\angle BCD$ durch γ und der Winkel der Diagonalen durch ε bezeichnet werden.

Man construire ein Viereck aus

1. a, b, c, d, e; 2. a, b, e, α, γ; 3. a, b, c, e, γ.

Man construire ein Viereck aus

4. $a+b, c, d, e, \beta$; 5. $a-b, e, f, \beta, \gamma$; 6. $a+e, b, c, d, \beta$.

Man construire ein Viereck aus

7. f, e, ε, a, c,; 8. f, e, ε, b, d; 9. $a, d, \alpha, e, \varepsilon$.

Die im Vorstehenden angeführten Aufgaben, welche selbstverständlich innerhalb der einzelnen Gruppen sehr leicht erheblich vermehrt werden können mögen zur Erläuterung und Einübung der vorgetragenen Methode — für welche Verf. den Namen »Methode der Hülfsfiguren« angewendet hat — hinreichen. Auch mit noch anderen Bestimmungsstücken, wie z. B. den Radien der Berührungskreise des Dreiecks, deren Summen und Differenzen, den Abständen der Mittelpunkte der Berührungskreise von einander u. a. m. lassen sich in entsprechender Weise zu lösende Aufgaben bilden.

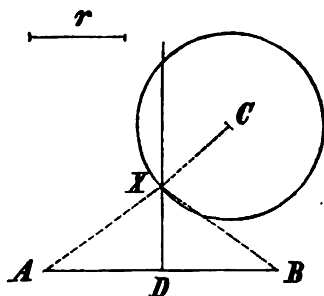
B. Methode der geometrischen Oerter.

§ 66. Ausgeführte Beispiele der Anwendung der Methode.

1. Aufgabe: Einen Punkt zu bestimmen, der von zwei gegebenen Punkten A, B gleiche, und von einem dritten gegebenen Punkte C eine gegebene Entfernung r hat.

Lässt man zunächst die Forderung, dass der gesuchte Punkt vom Punkte C die gegebene Entfernung r haben soll, unbeachtet, so wird die Aufgabe unbestimmt, d. h. es giebt unzählig viele Punkte, welche bloss die andere Forderung, von A und B gleichweit entfernt zu sein, erfüllen. Alle diese letzteren Punkte liegen aber auf einer bestimmten Linie, nämlich derjenigen Geraden, welche auf der Verbindungsstrecke von A und B in deren Halbirungspunkt senkrecht steht. Auf dieser Geraden muss daher auch der in der vorliegenden Aufgabe gesuchte Punkt liegen. — Lässt man dagegen die eben beibehaltene Forderung unbeachtet, verlangt also nur, dass der gesuchte Punkt von dem gegebenen C die Entfernung r habe, so ist die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, und die unzähligen Punkte, welche derselben genügen, liegen auf dem Kreise, welcher mit einem Radius gleich r um C beschrieben werden kann. Da nun der gesuchte Punkt sowol auf diesem Kreise als auf der vorher angegebenen Geraden liegen muss, so kann derselbe nur ein diesen beiden Linien gemeinschaftlicher Punkt sein.

Zur Construction desselben verbinde man also A mit B, halbire die Strecke AB und errichte im Halbirungspunkt D auf ihr die Senkrechte. Man beschreibe ferner um C mit einem Radius gleich r den Kreis, dann genügt jeder Punkt X, welchen dieser Kreis mit jener Senkrechten gemeinsam hat, der Aufgabe.



Zum Beweis der Richtigkeit dieser Construction verbinde man X mit B, und C; dann ist $XC = r$ als Radius des um C beschriebenen Kreises, ferner $\triangle XAD \cong \triangle XBD$ (da $XD = XD$, $AD = DB$ n. Constr. und $\angle XDA = \angle XDB$ als Rechte), mithin $XA = XB$.

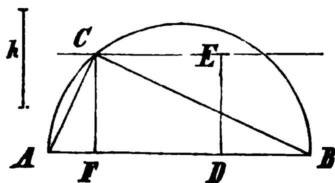
Die Determination ist dahin zu fassen, dass die Aufgabe zwei Auflösungen oder nur eine oder gar keine hat, je nachdem der Kreis C die Senkrechte schneidet oder sie berührt oder sie gar nicht trifft. Fällt man auf AB oder deren Verlängerung die Senkrechte CE, so treten diese drei Fälle bezüglich ein je nachdem $r > DE$, $r = DE$ oder $r < DE$ ist.

2. Aufgabe: Ueber einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn ausserdem die Länge der zur Hypotenuse senkrechten Höhe gegeben ist.

Analysis: Die Scheitel aller rechtwinkeligen Dreiecke, welche über derselben Hypotenuse beschrieben werden können, liegen auf dem über dieser Hypotenuse als Durchmesser zu construirenden Halbkreis. Die Spitzen aller Dreiecke, welche die gegebene Hypotenuse zur Grundlinie haben, und deren Höhen der anderen gegebenen Strecke gleich sind, liegen auf einer Geraden, welche jener Grundlinie parallel ist und von ihr einen Abstand gleich der gegebenen Höhe hat. Die Spitze des gesuchten Dreiecks muss daher sowol auf jenem Halbkreis als auf dieser Parallelen liegen und mithin ein Punkt sein, in welchem beide Linien

einander schneiden oder berühren. Durch Verbindung eines solchen Punktes mit den Endpunkten der gegebenen Hypotenuse erhält man das verlangte Dreieck.

Construction: Man beschreibe über der für die Hypotenuse gegebenen Strecke AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte auf AB in einem beliebigen Punkte D die Senkrechte, trage auf dieser (nach der Seite des Halbkreises) die Strecke DE gleich der gegebenen Höhe h ab, ziehe durch E die Parallele zu AB, welche den Halbkreis in C treffe, und verbinde C mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.



Beweis: Der Winkel ACB ist ein rechter als Peripheriewinkel über einem Durchmesser; das Dreieck ABC ist also rechtwinkelig, und AB seine Hypotenuse. Construirt man ferner die Höhe CF dieses Dreiecks, so ist CF parallel zu ED, da beide auf AB senkrecht stehen. Da ausserdem nach Construction CE parallel zu FD ist, so sind CF und ED als Parallele zwischen Parallelen einander gleich. Nun ist ED nach Construction gleich h, also ist auch die Höhe CF des Dreiecks ABC gleich der gegebenen h. Dieses Dreieck ist also das verlangte.

Determination: Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich, wenn die Parallele den Halbkreis weder schneidet noch berührt. Dieser Fall tritt ein, wenn der Abstand der Parallelen vom Mittelpunkt des Halbkreises grösser ist, als ein Radius desselben, also wenn die gegebene Höhe h grösser ist als die Hälfte der Hypotenuse AB. — Ist $h = \frac{1}{2}AB$, so berührt die Parallele den Halbkreis, und die Aufgabe hat daher nur eine Auflösung; das zugehörige Dreieck ist gleichschenkelig. Ist endlich $h < \frac{1}{2}AB$, so schneidet die Parallele den Kreis und man erhält zwei der Aufgabe genügende Dreiecke. Dieselben sind jedoch (wie leicht bewiesen werden kann) nur der Lage, nicht aber der Gestalt und Grösse nach verschieden; sie liegen symmetrisch zu einander.

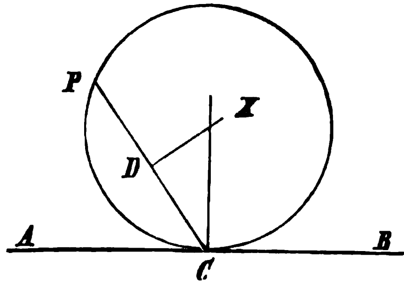
3. Aufgabe: Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine der Lage nach gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis: Die Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebene Gerade AB in dem auf ihr gegebenen Punkte C berühren, liegen auf der Geraden, welche in C auf AB senkrecht steht. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch die beiden gegebenen Punkte P und C gehen, liegen auf der Geraden welche auf der Verbindungsstrecke dieser Punkte in dem Halbirungspunkt derselben senkrecht steht. Der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises muss daher der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden sein. Da nach Bestimmung von X auch der Radius XP oder XC bekannt ist, so ist die Construction gefunden

Construction: Errichte auf der gegebenen Geraden AB in dem auf ihr gegebenen Punkte C die Senkrechte, verbinde C mit dem anderen gegebenen Punkte P, halbire PC, errichte auf PC in ihrem Halbirungspunkt D die Senkrechte und beschreibe um den Durchschnittspunkt X der beiden errichteten Senkrechten mit XC als Radius den Kreis. Dieser Kreis ist der verlangte.

Beweis: Da XC nach Construction ein Radius des Kreises X und zugleich auf AB in C senkrecht ist, so ist AB eine Tangente des Kreises X, oder dieser Kreis berührt AB, und zwar im Punkte C. Verbindet man ferner den Mittelpunkt X mit P, so stimmen die Dreiecke XPD und XCD in der gemeinschaft

lichen Seite XD, in den rechten Winkeln XDP, XDC und in den Seiten PD, DC überein und sind mithin congruent. Daher ist auch XP gleich XC, also XP ebenfalls ein Radius des Kreises X, und dieser letztere geht somit auch durch den Punkt P. Der Kreis X ist also der verlangte.



Determination: Da zwei gerade Linien einander nur in einem einzigen Punkte X schneiden können, so hat die Aufgabe im Allgemeinen eine einzige Auflösung. Die beiden Geraden können aber auch einander parallel sein, und dann wird die Auflösung unmöglich. Dieser Fall tritt ein, wenn P auf AB liegt, da dann die beiden Geraden auf derselben Linie AB senkrecht stehen. Dass P nicht auf AB liegen darf, geht übrigens auch daraus hervor, dass ein Kreis nicht eine Gerade berühren und gleichzeitig doch mit ihr zwei Punkte gemeinsam haben kann. — Endlich können die beiden den Mittelpunkt bestimmenden Geraden einander decken, in welchem Falle unzählig viele Auflösungen möglich sein würden. Dieser Fall kann jedoch nur dann eintreten, wenn P mit C zusammenfällt, und da dann thatsächlich statt zweier Punkte nur ein einziger gegeben sein würde, so kann dieser Fall streng genommen nicht in Betracht kommen. — Zu erwähnen ist ausserdem noch der besondere Fall, in welchem P auf der in C errichteten Senkrechten liegt. Die Construction vereinfacht sich dann dahin, dass X mit D zusammenfällt, also die in D zu PC senkrechte Gerade nicht construirt zu werden braucht.

§ 67. Erläuterung der Methode.

Kommt die Auflösung einer Aufgabe im Wesentlichen darauf hinaus, dass die unbekannte Lage eines Punktes gesucht werden soll, so kann dieselbe als gelöst betrachtet werden, wenn man zwei gerade oder krumme Linien gefunden hat, auf welchen gleichzeitig dieser Punkt liegen muss, denn es kann derselbe dann nur ein solcher Punkt sein, in welchem die beiden Linien einander schneiden oder berühren.

Eine solche Linie erhält man dadurch, dass man eine der Forderungen der Aufgabe unbeachtet lässt. Hierdurch muss die Aufgabe, da nicht mehr die nöthige Anzahl bestimmender Bedingungen vorhanden ist, zu einer unbestimmten werden. Unter den unzählig vielen Auflösungen, welche dieselbe zulässt, muss sich dann auch die eine befinden, die in Wirklichkeit verlangt wird. Die unzähligen Punkte, welche sich so ergeben, werden sich im Allgemeinen continuirlich an einander reihen, und es wird somit eine Linie der verlangten Art entstehen.

So waren z. B. in der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen drei Bedingungen für das gesuchte Dreieck gestellt; dasselbe sollte 1. rechtwinkelig sein, 2. eine der Lage und Länge nach gegebene Hypotenuse und 3. eine der Länge nach gegebene Höhe haben. Der zu bestimmende Punkt war hier die Spitze des Dreiecks. Durch Weglassung der dritten Bedingung erhielt man unendlich viele Dreiecke, deren Spitzen sich continuirlich auf einem Halbkreis an einander reihten, und durch Weglassung der ersten Bedingung wurde man entsprechend

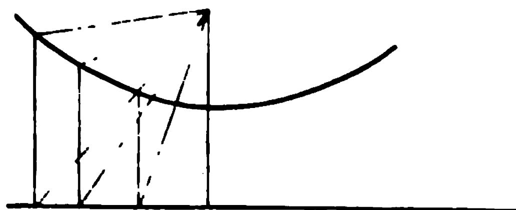
auf eine Gerade als Ort des gesuchten Punktes geführt. — In ähnlicher Weise ist bei den anderen Aufgaben des vorigen Paragraphen verfahren worden.

Da jede gerade oder krumme Linie oder jedes System von Linien, welches die Eigenschaft hat, dass jeder ihrer Punkte einer gestellten unbestimmten Aufgabe genügt, und dass umgekehrt jeder dieser Aufgabe genügende Punkt auf der betreffenden Linie liegt, der geometrische Ort des gesuchten Punktes genannt wird, so wählen wir für das soeben beschriebene Auflösungs-Verfahren den Namen »Methode der geometrischen Oerter«.

Da man im Allgemeinen jedes der bestimmenden Stücke einer Aufgabe weglassen kann, so ist es möglich, dass sich auf dem angegebenen Wege mehr als zwei geometrische Oerter finden lassen. Man hat dann die Wahl, welches Paar dieser Oerter man benutzen will, und erhält hiernach verschiedene Arten der Auflösung, sowie einen Lehrsatz über gemeinschaftliche Punkte der sämmtlichen vorhandenen Oerter. In sehr vielen Fällen, wie z. B. den meisten Constructionen von Dreiecken oder Kreisen enthält die bestimmte Aufgabe drei Forderungen; es giebt dann im Allgemeinen drei geometrische Oerter, welche einander in denselben Punkten treffen müssen, und daher auch drei verschiedene Wege der Auflösung, da man den ersten Ort mit dem zweiten oder den ersten mit dem dritten oder den zweiten mit dem dritten verbinden kann.

Derartige Fälle sind schon aus dem System bekannt. Soll z. B. ein Kreis beschrieben werden, der durch drei gegebene Punkte geht, so liegt sein Mittelpunkt auf jeder der Mittelsenkrechten des Dreiecks jener drei Punkte. Man kann also zu seiner Bestimmung zwei beliebige dieser Mittelsenkrechten, welche einander in demselben Punkte schneiden müssen, auswählen. Aehnliches ist von den Winkelhalbirenden eines Dreiecks bekannt.

In der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen ergiebt sich jedoch, dass in dieser Weise kein dritter Ort angegeben werden kann. Die entstehende unbestimmte Aufgabe, ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, dessen Höhe eine gegebene Länge habe, lässt nämlich die Lage des Dreiecks und somit auch die seiner Spitze völlig unbestimmt. Derartige Fälle machen also eine Ausnahme von dem vorher Gesagten. — In der dritten Aufgabe des vorigen Paragraphen dagegen existirt ein dritter geometrischer Ort; es ist derjenige der Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebene Gerade AB in irgend einem beliebigen Punkte berühren und durch den ausserhalb derselben gegebenen Punkt P gehen. Dieser geometrische Ort ist jedoch aus keinem Lehrsatz der Elementar-Geometrie bekannt. Um sich eine Vorstellung von der Gestalt desselben zu machen, kann man auf AB eine (thunlichst grosse) Anzahl von Punkten nach einander als Berührungspunkte annehmen und jedesmal mit Hülfe der beiden anderen zugehörigen Oerter die entsprechende Lage des Mittelpunkts bestimmen. Die so gewonnenen auf einander folgenden Punkte sind Punkte des dritten Orts und geben eine um so genauere Vorstellung von der Gestalt desselben, je dichter sie aneinander gereiht sind. Im vorliegenden Beispiel ist dieser Ort eine krumme Linie, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass der Abstand eines jeden derselben von dem festen Punkte P gleich seinem Abstand von der festen Geraden AB



ist. Dieselbe besteht aus zwei symmetrischen Aesten, welche in's Unendliche auseinander laufen, und heisst eine Parabel. Da aber in der Elementar-Geometrie nur gerade Linien und Kreise behandelt werden, so können andere krumme Linien in Aufgaben, welche auf elementarem Wege gelöst werden sollen, keine Anwendung als geometrische Oerter finden.

Die Methode der geometrischen Oerter kann also nur bei solchen Aufgaben zu elementaren Auflösungen gebraucht werden, bei denen sich mindestens zwei Oerter finden lassen, von denen jeder entweder eine gerade Linie oder ein Kreis ist.

Construction und Beweis sind auch bei dieser Methode unmittelbar durch die Analysis bestimmt. Die Determination schliesst sich an die Untersuchung der verschiedenen Lagen, welche die beiden benutzten Oerter gegen einander haben können und die Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Punkte in jeder dieser Lagen.

§ 68. Weitere Aufgaben zur Methode der geometrischen Oerter.

a) Der geometrische Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkt P einen gegebenen Abstand r haben, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche durch P gehen, und deren Radien gleich r sind, ist der um P mit dem Radius r beschriebene Kreis. — Der g. O. der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A, B gleich weit entfernt sind, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, die durch A und B gehen, ist die auf der Verbindungsstrecke von A und B in dem Halbirungspunkt derselben senkrechte Gerade. — Der g. O. der Punkte, die von einer der Lage nach gegebenen Geraden MN eine gegebene Entfernung r haben, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche die Gerade MN berühren und den Radius r haben, besteht aus den beiden in einem Abstand gleich r zu MN parallelen Geraden. — Der g. O. der Punkte, welche von zwei einander schneidenden Geraden gleichweit entfernt sind, oder der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche zwei einander schneidende Gerade berühren, besteht aus den zwei Halbirungslinien der von diesen Geraden gebildeten vier Winkel. — Der g. O. der Punkte, welche von zwei der Lage nach gegebenen einander parallelen Geraden gleichweit entfernt sind, oder der g. O der Mittelpunkte der Kreise, welche zwei parallele Gerade berühren, ist die Gerade, welche zu den beiden gegebenen parallel und von ihnen gleichweit entfernt ist. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche eine der Lage nach gegebene Gerade MN in einem auf derselben gegebenen Punkte A berühren, ist die auf MN in A senkrechte Gerade.

Man construire hiernach einen Punkt, der auf einer der Lage nach gegebenen Geraden (oder einem gegebenen Kreise) liegt und 1. von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat, oder 2. von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, oder 3. von einer anderen gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung hat.

Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher 4. eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, oder 5. eine gegebene Gerade berührt und durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt geht, oder 6. durch zwei gegebene Punkte geht.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher 7. zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt, oder 8. jede von zwei gegebenen parallelen Geraden und ausserdem eine dieselben schneidende gegebene Gerade

berührt, oder 9. zwei gegebene parallele Gerade berührt und durch einen zwischen denselben gegebenen Punkt geht.

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises gehende Gerade. Es sind jedoch dieser Mittelpunkt M selbst und der Berührungspunkt B ausgenommen. Die zwischen M und B liegende Strecke des Ortes enthält die Mittelpunkte solcher Kreise, welche den gegebenen von innen berühren, ihre Verlängerung über B enthält die Mittelpunkte der von aussen berührenden, und ihre Verlängerung über M die Mittelpunkte der umschliessend berührenden Kreise. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren und einen gegebenen Radius haben, besteht aus zwei dem gegebenen concentrischen Kreisen, von denen der eine mit der Summe, der andere mit der Differenz der beiden Radien beschrieben wird. Der erstere enthält die Mittelpunkte solcher gesuchten Kreise, welche den gegebenen von aussen berühren, der letztere, je nachdem der Radius des gesuchten Kreises kleiner oder grösser ist als der des gegebenen, die Mittelpunkte von Kreisen, welche den gegebenen von innen oder umschliessend berühren. Sind beide Radien gleich gross, so fällt der mit der Differenz der Radien beschriebene Kreis fort. — Der g. O. der Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene concentrische Kreise berühren, besteht aus zwei denselben concentrischen Kreisen. Zieht man durch einen beliebigen Punkt C des kleineren der gegebenen Kreise den Durchmesser AB des grösseren, so geht jeder der beiden Oerter durch einen der Halbirungspunkte der Strecken AC und CB und die zugehörige dieser Strecken ist jedesmal gleich dem Durchmesser des gesuchten Kreises.

Man beschreibe hiernach einen Kreis, der einen gegebenen Radius hat und 1. einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, oder 2. einen gegebenen Kreis berührt und durch einen nicht auf demselben liegenden gegebenen Punkt geht, oder 3. einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, oder 4. zwei gegebene Kreise berührt.

Einen Kreis zu construiren, der 5. einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt uud durch einen anderen gegebenen Punkt geht, oder 6. einen Kreis in einem gegebenen Punkte und ausserdem eine gegebene Gerade berührt, oder 7. zwei gegebene concentrische Kreise, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

c) Der geometrische Ort der Scheitel aller rechtwinkeligen Dreiecke, welche über einer der Lage und der Länge nach gegebenen Hypotenuse stehen, ist der über dieser Hypotenuse als Durchmesser beschriebene Halbkreis. — Der g. Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche über einer der Lage und Länge nach gegebenen Grundlinie stehen und an der Spitze einen Winkel von gegebener Grösse haben, ist der über der Grundlinie als Sehne stehende Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst. — Der g. O. der Spitzen aller Dreiecke, welche über einer der Lage und Länge nach gegebenen Grundlinie stehen und eine zu letzterer gehörige Höhe von gegebener Länge haben, ist die zu der Grundlinie in einem Abstande gleich der Höhe parallele Gerade.

Man construire ein rechtwinkeliges Dreieck über einer gegebenen Hypotenuse: 1. dessen Höhe die Hypotenuse in einem gegebenen Punkte trifft, 2. dessen Scheitel auf einer der Lage nach gegebenen Geraden liegt.

Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und 3. der Höhe auf jener Seite oder 4. der zu jener Seite gehörigen Mittellinie oder 5. dem auf jener Seite gegebenen Punkte, in welchem sie von der Halbirungslinie des gegenüberliegenden Winkels geschnitten wird.

Ein Dreieck zu construiren aus 6. zwei Mittellinien und den durch eine derselben getheilten Winkel.

d) Der geometrische Ort der Halbirungspunkte aller Sehnen eines Kreises, die einander in einem und demselben Punkte schneiden, ist der Kreis, für welchen die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkt des ersteren Kreises ein Durchmesser ist. — Der g. O. der Halbirungspunkte aller Sehnen eines Kreises, welche eine und dieselbe gegebene Länge haben, ist ein jenem erstern concentrischer Kreis. — Der g. O. der Endpunkte aller Tangenten eines Kreises, welche vom Berührungspunkt aus dieselbe Länge haben, ist ein concentrischer Kreis.

In einem gegebenen Kreise eine Sehne zu ziehen, so dass dieselbe von einer der Lage nach gegebenen Geraden halbirt werde und 1. durch einen gegebenen Punkt gehe oder 2. eine gegebene Länge habe.

Von einem zu bestimmenden Punkte einer gegebenen Geraden aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente von gegebener Länge zu ziehen.

Einen Punkt zu bestimmen, von welchem man an jeden von zwei gegebenen Kreisen eine Tangente von derselben gegebenen Länge ziehen kann.

Von einem Punkte, welcher auf einem Kreise gegeben ist, in diesen eine Sehne zu ziehen, so dass die vom Halbirungspunkt der Sehne an einen zweiten gegebenen Kreis gezogene Tangente eine gegebene Länge habe.

Die Vermehrung der Anzahl der im Vorstehenden angeführten geometrischen Oerter und der bezüglichen Aufgaben bleibt den besonderen Aufgaben-Sammlungen überlassen.

C. Methode der ähnlichen Figuren.

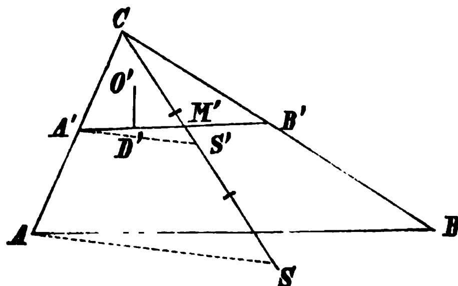
§ 69. Ausgeführte Beispiele der Anwendung der Methode.

1. Aufgabe: Ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Summe des Radius des umbeschriebenen und des Radius des einbeschriebenen Kreises zu construiren.

Analyse: Construirt man zunächst ein Dreieck aus den beiden gegebenen Winkeln und einer Seite von beliebig angenommener Länge, so muss dasselbe wegen der Uebereinstimmung in den Winkeln dem gesuchten ähnlich sein. Construirt man daher zu jenem Hülfsdreieck die Summe eines Radius des demselben umbeschriebenen und eines Radius des demselben einbeschriebenen Kreises, so muss diese Summe sich zu der gegebenen verhalten, wie jede Seite des Hülfsdreiecks zur homologen Seite des gesuchten. Man kann daher irgend eine Seite des letzteren als vierte geometrische Proportionale zu drei bekannten Strecken, und dann aus ihr und den Winkeln das gesuchte Dreieck construiren.

Construction: Man zeichne eine Strecke $A'B'$ von beliebiger Länge, lege an $A'B'$ in A' einen Winkel gleich dem einen gegebenen α und an $B'A'$ in B' auf derselben Seite einen Winkel gleich dem anderen gegebenen β an; die angelegten Schenkel mögen einander in einem Punkte C schneiden. Man construire dann auf bekannte Weise den Mittelpunkt M' des dem Dreieck $A'B'C$ umbeschriebenen und den Mittelpunkt O' des demselben einbeschriebenen Kreises, fälle die Senkrechte $O'D'$ auf $A'B'$, verbinde C mit M' und verlängere CM' um

$M'S' = O'D'$. Dann trage man auf der nöthigenfalls verlängerten CS' die Strecke CS gleich der gegebenen Summe s ab, ziehe $S'A'$ und dann SA parallel zu $S'A'$ und bis zum Durchschnittspunkt A mit CA' oder deren Verlängerung. Endlich ziehe man durch A die Parallele zu $A'B'$, welche CB' oder deren Verlängerung in B schneide, dann ist ABC das verlangte Dreieck.



Beweis: Es ist $\angle CAB = CA'B'$ als correspondirender Winkel an parallelen Linien, $CA'B' = \alpha$ n. Constr., also auch $CAB = \alpha$. In entsprechender Weise ist $\angle CBA = CB'A' = \beta$. Bezeichnet nun ρ' den Radius des dem Dreieck $A'B'C$ einbeschriebenen, r' den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises, und sind ρ und r die entsprechenden Linien für das Dreieck ABC, so muss, da die beiden Dreiecke in Folge ihrer Uebereinstimmung in den Winkeln ähnlich sind.

$$\rho' : r' : CA' = \rho : r : CA,$$

also auch

$$\rho' + r' : \rho + r = CA' : CA$$

sein. Nun ist, wie leicht aus der Construction hervorgeht, $CS' = \rho' + r'$ und da $CS = s$ und $A'S'$ parallel zu AS ist,

$$\rho' + r' : s = CA' : CA.$$

Die Vergleichung dieser Proportion mit der vorhergehenden zeigt, dass $\rho + r = s$ ist, was noch zu beweisen war.

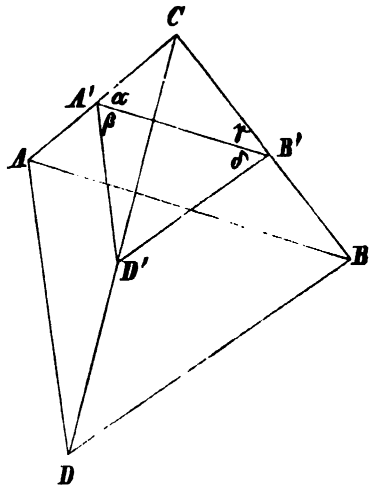
Determination: Die Aufgabe ist stets, und in eindeutiger Weise lösbar.

2. Aufgabe: Ein Viereck aus einer Diagonale und den vier Winkeln, welche die andere Diagonale mit den Seiten bildet, zu construiren.

Analyse: Wäre die nicht gegebene Diagonale bekannt, so liesse sich jedes der beiden Dreiecke, in welche dieselbe das Viereck theilt, aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln construiren. Nimmt man nun statt der nicht gegebenen Diagonale eine Strecke von beliebiger Länge an und construirt in entsprechender Weise aus dieser und den vier gegebenen Winkeln ein Viereck, so muss dasselbe dem gesuchten ähnlich sein, und seine zweite Diagonale muss sich mithin zu der gegebenen Diagonale des gesuchten Vierecks verhalten, wie seine erste Diagonale oder auch irgend eine seiner Seiten zu der homologen des gesuchten. Daher kann jede der betreffenden Strecken für das letztere als vierte geometrische Proportionale zu drei bekannten Strecken construirt, und dann mit Hülfe derselben die Aufgabe gelöst werden.

Construction: Man zeichne eine Strecke $A'B'$ von beliebiger Länge, lege an $A'B'$ in A' nach der einen Seite einen Winkel gleich dem gegebenen α und nach der anderen Seite einen Winkel gleich dem gegebenen β an. In entsprechender Weise lege man an $B'A'$ in B' Winkel gleich den gegebenen γ und δ an, so dass die vier Winkel die von der Aufgabe verlangte gegenseitige Lage haben. Die auf der einen Seite von $A'B'$ angelegten Schenkel mögen einander in C, die auf der anderen angelegten in D' schneiden. Man ziehe darauf CD', trage auf dieser nöthigenfalls verlängerten Linie eine Strecke CD gleich der gegebenen Diagonale f ab, ziehe durch D die Parallelen zu $D'A'$ und zu $D'B'$ bis zum Durchschnittspunkt mit CA', bezw. CB' oder deren Verlängerungen in A, bezw. B, und behaupte, $ABCD$ sei das verlangte Viereck.

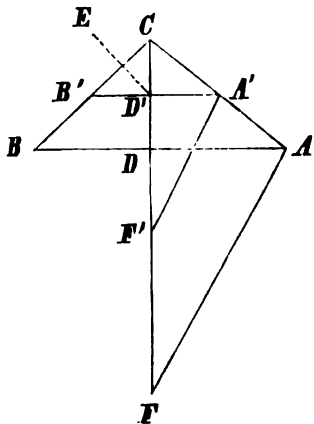
Beweis: Die Diagonale CD des Vierecks $ABCD$ hat die gegebene Länge f nach Construction. Da $AD \parallel A'D'$, $BD \parallel B'D'$, so ist $CA : CA' = CD : CD'$ und $CB : CB' = CD : CD'$, mithin auch $CA : CA' = CB : CB'$. Hieraus folgt, dass, wenn man A mit B verbindet, AB parallel zu $A'B'$ sein muss. Daher ist auch $\angle CAB = \angle CA'B'$ als correspondirender Winkel an parallelen Linien, und da $\angle CA'B'$ n. Constr. gleich dem gegebenen Winkel α ist, so muss auch $\angle CAB$ gleich α sein. In derselben Weise ergiebt sich, dass $\angle DAB = \angle D'A'B' = \beta$, $\angle CBA = \angle CB'A' = \gamma$, $\angle DBA = \angle D'B'A' = \delta$ ist, und dass somit das Viereck $ACBD$ alle gestellten Bedingungen erfüllt.



Discussion: Damit die Aufgabe so lösbar sei, dass ein Viereck im engeren Sinne entsteht, muss $\alpha + \gamma < 2R$ und $\beta + \delta < 2R$ sein. Ueberhaupt unlösbar ist die Aufgabe, wenn eine dieser Summen (oder beide) gleich zwei Rechten sind. Die Aufgabe ist eindeutig.

3. Aufgabe: Ein Dreieck aus dem Verhältniss der Höhe zu einer anliegenden Seite, $h : a = m : n$, dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel und der Summe der Grundlinie und Höhe $c + h = s$ zu construiren.

Analysis: Durch das gegebene Verhältniss ist die Gestalt des die Seite $CB = a$ und die Höhe $CD = h$ enthaltenden rechtwinkeligen Dreiecks BCD bestimmt und man erhält somit durch Construction eines diesem Dreieck ähnlichen den Winkel $CBA = \beta$ des gesuchten Dreiecks. Dann sind von letzterem zwei Winkel bekannt, man kann daher wieder ein diesem ähnliches Dreieck construiren und es muss sich dann die Summe der Grundlinie und Höhe des ähnlichen Dreiecks zu der gegebenen des gesuchten verhalten, wie irgend eine Seite des ähnlichen zur homologen Seite des gesuchten. Hiernach ist alles Uebrige einleuchtend.



Construction: Man zeichne zwei beliebige Strecken h', a', welche zu einander in dem gegebenen Verhältniss $m : n$ stehen, errichte auf einer Strecke $CD' = h'$ in D' die Senkrechte, beschreibe um C mit a' als Radius einen Kreisbogen, der die Senkrechte in B' schneide, ziehe CB', lege an $D'B'$, etwa in D', einen Winkel $B'D'E = \alpha$ an, ziehe durch C die Parallele zu $D'E$ bis zum Durchschnittspunkt A' mit der Verlängerung von $B'D'$, verlängere CD' um $D'F = A'B'$, trage auf der (nöthigenfalls verlängerten) Geraden CF' die Strecke CF gleich der gegebenen Summe s ab, ziehe $A'F'$ und durch F die Parallele zu $F'A'$ bis zum Durchschnittspunkt A mit CA' oder deren Verlängerung; endlich ziehe AB parallel zu

$A'B'$ bis zum Durchschnittspunkt B mit CB' oder deren Verlängerung, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis: $\angle CAB = \angle CA'B'$ (corresp. W. an Parallelen); $\angle CA'B' = \angle ED'B'$ (ebenso), $\angle ED'B' = \alpha$ n. Constr., also ist auch $\angle CAB = \alpha$. Die Gerade CF schneide AB in D. Dann ist CD senkrecht zu AB, da CD' senkrecht auf der zu AB parallelen Geraden $A'B'$ ist; CD ist also die Höhe des Dreiecks ABC. Nun ist $CD : CB = CD' : CB'$, und da $CD' : CB' = h' : a' = m : n$ n. Constr., so ist auch $CD : CB = m : n$. Endlich ist $(AB + CD) : (A'B' + CD') = AC : A'C = FC : F'C = s : (A'B' + CD')$, woraus $AB + CD = s$ folgt.

Determination: Damit die Aufgabe lösbar sei, muss zunächst $a' > h'$, also $n > m$ sein. Sodann muss die Summe der Winkel $CB'D'$ und α weniger als zwei Rechte betragen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Auflösung stets möglich, und zwar auf eine einzige Art. Ist insbesondere $\alpha = 90°$, so vereinfacht sich die Auflösung in leicht ersichtlicher Weise.

§ 70. Erläuterung der Methode.

Ist durch einen Theil der zur Construction einer Figur gegebenen Bestimmungsstücke die Gestalt der Figur bestimmt, so dass also alle gleichartigen Figuren, welche in diesen Stücken übereinstimmen, einander ähnlich sind, so kann man zunächst eine solche der gesuchten ähnliche Figur zeichnen. Da nämlich hierbei die Grösse der Figur gleichgültig ist, so kann man für irgend eine beliebig ausgewählte Strecke an derselben eine willkürliche Länge annehmen, und man wird zu diesem Zwecke eine solche Strecke, z. B. eine Seite, nehmen, dass die veränderte Aufgabe, aus ihr und jenen Bestimmungsstücken die Figur zu construiren, eine bekannte, möglichst einfache Auflösung hat. Es handelt sich dann nur noch darum zu der so gewonnenen Hülfsfigur eine ihr ähnliche zu zeichnen, welche auch die richtige Grösse hat. Zu diesem Zwecke muss stets eine bei der Construction der Hülfsfigur nicht benutzte Strecke unter den gegebenen Bestimmungsstücken sein, und zeichnet man die derselben homologe Strecke zu der Hülfsfigur, so giebt das Verhältniss beider auch das Verhältniss je zweier anderen homologen Strecken der zwei Figuren an. Man kann also jede Seite oder Diagonale u. dgl. der gesuchten Figur als vierte Proportionale zu jenen beiden Strecken und der homologen Seite oder Diagonale u. dgl. der Hülfsfigur construiren und damit die Aufgabe lösen.

Bei dieser Construction einer vierten geometrischen Proportionale wird man die bereits in der Figur vorhandenen Strecken möglichst in ihrer Lage zu benutzen suchen, um eine in Zeichnung und Darstellung möglichst zusammenhängende und einfache Construction der ganzen Aufgabe zu erhalten.

Es ist ferner zur Anwendung dieser Methode nicht nöthig, dass sich zu der gesuchten Gesammtfigur eine ähnliche construiren lasse, sondern es genügt häufig, dass dies für einen Theil der letzteren, wie z. B. in der dritten Aufgabe des vorigen Paragraphen bei dem einen der durch die Höhe entstehenden Theildreiecke der Fall war, möglich sei, sofern durch diesen Theil ein oder mehrere weitere Bestimmungsstücke der ganzen Figur gefunden werden, deren Benutzung die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückführt.

Bei der Construction der gesuchten Figur zu der ihr ähnlichen kann man sich auch der Theorie der Aehnlichkeitspunkte mit Vortheil bedienen.

§ 71. Weitere Beispiele zur Methode der ähnlichen Figuren.

a) Dreiecksconstructionen, bei denen zwei Winkel des Dreiecks gegeben sind, lassen sich sämmtlich leicht in der angegebenen Weise ausführen. Man kann hiernach verschiedene der früher nach der Methode der Hülfsfiguren behandelten Aufgaben lösen, wie z. B. wenn ausser den beiden Winkeln gegeben sind: 1. eine Höhe h, 2. eine Mittellinie m, 3. eine winkelhalbirende Transversale w, 4. die Summe zweier Seiten $a + b$, 5. die Differenz zweier Seiten $a - b$, 6. der Umfang $a + b + c$, 7. der Ueberschuss der Summe zweier Seiten über die dritte $a + b - c$, 8. die Summe zweier Höhen $h_a + h_b$, 9. die Differenz zweier Höhen $h_b - h_a$, 10. der Radius r des umbeschriebenen Kreises, 11. der Radius ρ des einbeschriebenen Kreises, ferner Summen und Differenzen von Berührungsradien von Seiten und Radien, Seiten und Höhen, u. dgl. m.

b) Statt eines Winkels kann das Verhältniss zweier Seiten $a : b = m : n$ des gesuchten Dreiecks gegeben sein. Der gegebene Winkel ist dann entweder der eingeschlossene γ oder ein gegenüberliegender. Im letzteren Falle kann die Aufgabe zweideutig werden. Man bilde hiernach die den Aufgaben unter a) entsprechenden. Für ein rechtwinkeliges Dreieck genügt die Angabe eines einzigen Seitenverhältnisses, ohne einen Winkel, da für letzteren der rechte Winkel bekannt ist. Es können endlich beide Winkel durch Verhältnisse von Seiten des gesuchten Dreiecks vertreten sein, zu denen dann beispielsweise jedes der unter a) 1—11 angegebenen Stücke als drittes treten kann. —

Statt jedes Verhältnisses zweier Seiten kann das Verhältniss der zu ihnen senkrechten Höhen gegeben sein, da je zwei Seiten eines Dreiecks sich zu einander umgekehrt wie die zugehörigen Höhen verhalten.

Man construire beispielsweise ein Dreieck aus

1. dem Verhältniss der Höhe zur Projection einer anliegenden Seite auf die Grundlinie, dem Verhältniss der anderen anliegenden Seite zu ihrer Projection auf die Grundlinie und der Summe der drei Höhen,

2. dem Verhältniss des Radius des einbeschriebenen Kreises zu einem auf einer Seite durch den Berührungspunkt gebildeten Abschnitt, dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel und der zu dieser Seite gehörigen Mittellinie,

3. den Verhältnissen der drei Höhen zu einander und der Differenz der durch eine Winkelhalbirende auf der gegenüberliegenden Seite gebildeten Abschnitte.

c) Noch allgemeiner kann man die vorstehende Methode überhaupt mit derjenigen der Hülfsfiguren verbinden, indem man jene bei der Construction von Figuren anwendet, die ihrerseits wieder mittelst der letzteren Methode als Hülfsfiguren auf die Construction von anderen, verlangten führen. Die Hinzufügung besonderer Beispiele, die sich nach dem Vorhergegangenen leicht bilden lassen, darf unterbleiben.

Auch auf die Anwendung der Methode auf die Construction von Vierecken und Polygonen, die meist auf diejenige von Dreiecken zurückgeführt wird, soll der Kürze halber nicht näher eingegangen werden.

D. Methode der algebraischen Analyse.

§ 72. Ausgeführte Beispiele der Anwendung der Methode.

1. Aufgabe: Eine gegebene Strecke so zu theilen, dass die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich dem Rechteck aus der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt sei.

Analysis: Es sei AB die zu theilende Strecke, a ihre Maasszahl, x die Maasszahl des kleineren, also $a—x$ die Maasszahl des grösseren gesuchten Abschnittes, so soll

$$(a-x)^2 - x^2 = ax$$

sein. Die Auflösung dieser Gleichung auf die Unbekannte x führt zu

$$a^2 - 2ax = ax$$
$$a^2 = 3ax.$$
$$x = \frac{a}{3}$$

Construction: Theile die Strecke AB im Verhältniss $1:2$.

Beweis: Nach Construction ist der grössere Abschnitt $AX = \frac{2}{3}AB$, der kleinere $BX = \frac{1}{3}AB$, die Differenz ihrer Quadrate also gleich $\frac{4}{9}AB^2 - \frac{1}{9}AB^2 = \frac{1}{3}AB^2$, und das Rechteck aus der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitt ebenfalls gleich $\frac{1}{3}AB^2$. Dieses Rechteck ist also jener Differenz gleich.

Determination: Die Aufgabe ist stets eindeutig lösbar.

2. Aufgabe: Ein gegebenes Dreieck durch eine zur Grundlinie parallele Gerade zu halbiren.

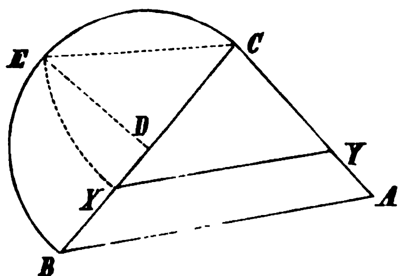
Analysis: Ist ABC das gegebene Dreieck, XY die gesuchte, zu AB parallele Gerade, so ist das Dreieck CXY ähnlich dem Dreieck ABC und die Flächenräume beider verhalten sich also wie die Quadrate zweier homologen Seiten. Setzt man den Abschnitt CX der Seite CB gleich x, diese Seite selbst gleich a, so muss also, da das Dreieck CXY die Hälfte von ABC sein soll,

$$x^2 : a^2 = 1 : 2$$

sein, woraus

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\, a^2}$$

folgt. Schreibt man dieses Resultat in der Form $x = \sqrt{\frac{1}{2}a \cdot a}$, so sieht man, dass x die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\frac{1}{2}a$ und a ist.



Construction: Halbire die Seite CB des gegebenen Dreiecks ABC in D, beschreibe über CB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte auf CB in D die Senkrechte, welche den Halbkreis in E schneide, ziehe CE, beschreibe um C mit CE als Radius einen Kreisbogen, der CB in X schneide, und ziehe durch X die Parallele zu BA, welche CA in Y treffen möge. Dann ist XY die verlangte Theilungslinie.

Beweis: XY ist parallel zu BA nach Construction. Daher ist ferner $\triangle CXY \sim \triangle CBA$, folglich $\triangle CXY : \triangle CBA = CX^2 : CB^2$. Nun ist $CX^2 = CE^2 = CD \cdot CB = \frac{1}{2}CB \cdot CB = \frac{1}{2}CB^2$, woraus weiterhin $\triangle CXY = \frac{1}{2}CBA$ folgt, was noch zu beweisen war.

Determination: Die Aufgabe ist stets eindeutig lösbar.

3. Aufgabe: Eine gegebene Strecke so zu theilen, dass der grössere Abschnitt die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt werde.

Analysis: Ist $AB = a$ die gegebene Strecke, $AX = x$ der gesuchte grössere Abschnitt, also $BX = a - x$ der kleinere Abschnitt, so muss

$$x^2 = a(a-x)$$

sein. Hieraus folgt

$$x^2 + ax = a^2,$$

also
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Die Wurzelgrösse in diesem Ausdruck ist zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes gleich der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten bezüglich gleich a und $\frac{a}{2}$ sind. Von den beiden Vorzeichen derselben kann für eine Behandlung der Aufgabe im engeren Sinne nur das obere benutzt werden, da anderenfalls für x ein negativer Werth entsteht, der nur dann Sinn hat, wenn nicht bloss die Länge, sondern auch die Richtung der gesuchten Strecke in Betracht kommt.

Construction: Halbire die gegebene Strecke AB, errichte in B auf AB die Senkrechte BC gleich der Hälfte von AB, ziehe AC, trage auf CA die Strecke $CD = CB$ und auf AB die Strecke $AX = AD$ ab, so ist X der verlangte Theilpunkt.

Beweis: Es ist $AX = AD = AC - CD = AC - CB$, also $AC = AX + CB$. Nun ist $AC^2 = AB^2 + CB^2$, also $AB^2 + CB^2 = (AX + CB)^2 = AX^2 + 2\,AX \cdot CB + CB^2$. Hieraus folgt $AB^2 = AX^2 + 2\,AX \cdot CB$ oder $AX^2 = AB^2 - AX.\ 2\,CB$ oder $AX^2 = AB^2 - AX \cdot AB$ oder $AX^2 = AB \cdot (AB - AX)$, oder endlich $AX^2 = AB \cdot BX$, was zu beweisen war.

Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar. Dieselbe ist eindeutig, sofern der Theilpunkt X zwischen A und B vorausgesetzt ist. Fasst man jedoch die Aufgabe im weiteren Sinn so auf, dass der Theilpunkt auch auf der Verlängerung der zu theilenden Strecke liegen darf, so erhält man eine zweite Auflösung, welche der Anwendung des unteren Vorzeichens in dem in der Analyse gefundenen Werthe von x entspricht. Man hat AC um BC zu verlängern und die entstehende Strecke von A aus statt in der Richtung nach B in der entgegengesetzten Richtung (entsprechend dem negativen Werthe von x) abzutragen. In diesem Falle wird nur der kleinere Abschnitt AX die mittlere geometrische Proportionale zwischen AB und dem anderen Abschnitt BX. Dies stimmt damit überein, dass jetzt $AB < AX$ wird, mithin $AX < BX$ sein muss. Soll diese Auflösung gelten, so ist also in dem Wortlaut der Aufgabe statt »der grössere« Abschnitt zu setzen »ein« Abschnitt. In der That war die Bedingung, dass $AX > BX$ sei, nicht bei dem Ansatz der Gleichung in der Analyse berücksichtigt worden, so dass diese Gleichung deshalb auf beide Auflösungen führen musste. — Die vorliegende Aufgabe ist die bekannte der Theilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt, und die oben angegebene Construction stimmt mit der früher auf anderem Wege gefundenen Auflösung vollständig überein.

§ 73. Erläuterung der Methode.

Hängt die Auflösung einer gegebenen Aufgabe im Wesentlichen davon ab, dass eine Strecke von gesuchter Länge construirt werde, so suche man diese Strecke als die Unbekannte x einer Gleichung darzustellen, indem man diese Gleichung aus den durch die Bedingungen der Aufgabe angegebenen Beziehungen zwischen x und bekannten Grössen ermittelt. Zu diesem Zwecke kann jede Strecke, welche gegeben ist, oder welche zu einer gegebenen Figur in bekannter Weise construirt werden kann (wie z. B. die Höhen eines gegebenen Dreiecks u. dgl. m.) durch eine als bekannt vorauszusetzende Maasszahl ausgedrückt werden.

Die Auflösung der gefundenen Gleichung liefert einen algebraischen Ausdruck für die Unbekannte, welcher dann geometrisch zu deuten und hiernach zu construiren ist. Selbstverständlich können auch mehrere Unbekannte durch eine gleiche Anzahl von Gleichungen gesucht werden. Die Analysis besteht also bei dieser Methode aus folgenden Theilen: 1. Angabe oder Wahl der Strecken, welche als Unbekannte gesucht werden sollen, 2. Ansetzen der nöthigen Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe, 3. Auflösen dieser Gleichungen, 4. geometrische Deutung der Resultate.

Von diesen Theilen erheischt der letzte eine nähere Erörterung. Wir setzen behufs derselben im Folgenden voraus, dass a, b, c, ... die Maasszahlen bekannter Strecken seien. Dann bedeutet

$a + b$ die durch Verlängerung der Strecke a um die Strecke b (oder umgekehrt) entstehende Summe beider Strecken,

$a - b$ die durch Abtragen der Strecke b von der Strecke a entstehende Differenz derselben,

$a + b - c + d$... die den Zeichen in dieser algebraischen Summe entsprechend durch Verlängern oder Abschneiden aus den gegebenen entstehende Strecke.

Jede beliebige Verbindung von Zeichen, welche Strecken bedeuten, bloss durch + und — bedeutet also wieder eine Strecke und heisst daher, ebenso wie die einzelnen den betreffenden Ausdruck zusammensetzenden Grössen, eine lineare, oder eine Grösse erster Dimension.

Ein Product na bedeutet ebenfalls eine Strecke, wenn der Multiplicator n eine unbenannte Zahl ist, also nur der Multiplicandus a eine Strecke bedeutet: na ist dann ein Vielfaches von a und wird durch $n$maliges Abtragen einer Strecke gleich a nach einander auf einer Geraden construirt.

Dagegen kann das Produkt ab, in welchem beide Faktoren Strecken bedeuten, nicht mehr als eine Strecke gedeutet werden, da das Produkt zweier benannter Factoren an sich keinen Sinn hat. Dagegen lässt sich dasselbe nach den Erklärungen in § 40 als die arithmetische Darstellung des Inhalts eines Rechtecks, dessen Seiten bezüglich gleich a und b sind, oder irgend einer anderen Figur von gleicher Grösse mit diesem Rechteck betrachten.

Insbesondere ist also a^2 als Inhalt eines geometrischen Quadrats zu deuten, dessen Seite gleich a ist.

Ausdrücke, welche, wie ab und a^2, Flächen bedeuten, werden als Ausdrücke zweiter Dimension bezeichnet.

Ein Quotient $\frac{a}{n}$ hat eine geometrische Bedeutung, wenn der Divisor n eine unbenannte Zahl ist, dagegen der Dividendus a eine Strecke bedeutet. Die Aufgabe, denselben zu construiren, ist wenn n eine ganze Zahl ist identisch mit der bekannten, die Strecke a in n gleiche Theile zu theilen. Ist n eine gebrochene Zahl, so fordert die Construction von $\frac{a}{n}$, ebenso wie die von na, die Theilung der Strecke a in einem gegebenen Verhältniss. Der Quotient ist also in diesem Falle ein Ausdruck erster Dimension.

Bedeutet dagegen in $\frac{a}{b}$ sowol b als a je eine Strecke, so ist der Quotient eine unbenannte Zahl, nämlich das Verhältniss der Strecke a zur Strecke b. Derselbe kann daher nicht construirt werden. Er heisst ein Ausdruck nullter Dimension.

Ist endlich in $\frac{n}{a}$, n unbenannt und a eine Strecke, so lässt der Ausdruck überhaupt keine Deutung zu.

Den im Vorstehenden angeführten einfachen Ausdrücken reihen sich folgende zusammengesetzte an:

Der Ausdruck $\frac{a \cdot b}{c}$ kann angesehen werden als das Produkt der unbenannten Verhältnisszahl $\frac{a}{c}$ mit der Strecke b, oder auch als das Produkt der Strecke a mit $\frac{b}{c}$. Derselbe bedeutet also wieder eine Strecke. Da aus $\frac{ab}{c} = x$ ohne Weiteres $c : a = b : x$ folgt (und umgekehrt), so erkennt man leicht, dass die Construction dieses Ausdrucks gleichbedeutend ist mit der bekannten Construction der vierten geometrischen Proportionale zu c, a und b, für welche früher verschiedene Methoden angegeben sind.

Insbesondere ist also der Ausdruck $\frac{a^2}{b} = x$ als die dritte geometrische Proportionale zu b und a zu deuten, denn es folgt aus demselben $b : a = a : x$.

Bestehen allgemeiner der Dividendus und der Divisor eines Quotienten aus linearen Faktoren, und ist die Anzahl der Faktoren des Dividendus um 1 grösser als die des Divisors, so bedeutet der Ausdruck geometrisch eine Strecke und heisst daher wieder ein Ausdruck erster Dimension in Beziehung auf die einzelnen linearen Grössen. Man kann nämlich jeden solchen Ausdruck als das Produkt eines linearen Faktors mit zwei oder mehreren unbenannten Verhältnisszahlen, so z. B. $\frac{abcd}{efg}$ als $a \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$, ansehen. Die Construction eines derartigen Ausdrucks kann durch wiederholte Construction einer vierten geometrischen Proportionale geschehen. Beispielsweise kann man, um $x = \frac{abcd}{efg}$ zu construiren, zuerst die vierte geometrische Proportionale zu e, a und b suchen. Setzt man dieselbe gleich y, so ist $y = \frac{ab}{e}$, also $x = \frac{ycd}{fg}$. Sucht man darauf wieder die vierte geometrische Proportionale z zu f, y und c, so ist $z = \frac{yc}{f}$, also $x = \frac{zd}{g}$, und man hat also schliesslich noch die vierte geometrische Proportionale zu g, z und d zu construiren. — Soll ferner beispielsweise $x = \frac{a^2 b^3 c^4}{d^5 e^3}$ geometrisch gedeutet werden, so ergiebt sich, dass derselbe, da der Zähler neun, der Nenner acht Faktoren enthält, von der ersten Dimension ist, und dass man x bekommt, wenn man etwa der Reihe nach die Ausdrücke $y = \frac{a^2}{d}$, $z = \frac{bc}{d}$, $u = \frac{yc}{d}$, $v = \frac{uz}{e}$, $w = \frac{vz}{e}$, $x = \frac{wz}{e}$ construirt. Selbstverständlich kann die Reihenfolge der einzelnen Constructionen in allen derartigen Fällen eine sehr verschiedene sein.

Ist dagegen die Anzahl der linearen Faktoren im Zähler um zwei grösser als die der Faktoren im Nenner, so erhält man durch Absonderung eines der Faktoren des Zählers ein Produkt zweier Strecken; der betreffende Ausdruck ist daher von der zweiten Dimension und lässt sich als eine Fläche construiren.

Ist allgemein die Anzahl der linearen Faktoren des Zählers um n grösser als diejenige des Nenners, so heisst der Ausdruck ein solcher $n$ter Dimension. Aus-

drücke dritter Dimension, wie abc, $a^2 b$, $\frac{abcd}{e}$ u. dgl. m. erhalten ihre geometrische Deutung in einem späteren Theile der Geometrie, der Stereometrie; Ausdrücke von einer höheren als der dritten Dimension haben keine geometrische Bedeutung und können daher in geometrischen Aufgaben überhaupt nicht vorkommen. Sind die Anzahlen der Faktoren des Zählers und des Nenners gleich gross, so ist der Ausdruck von der nullten Dimension, d. h. eine unbenannte Zahl; ist die Anzahl der Faktoren des Nenners die grössere, so ist überhaupt eine Deutung des Ausdrucks nicht vorhanden.

Ein Ausdruck zweiter Dimension kann auf einen solchen erster Dimension zurückgeführt werden, nicht nur dadurch, dass man ihn durch eine lineare Grösse dividirt, sondern auch durch Ausziehen der Quadratwurzel aus demselben. Wie $\sqrt{a^2}$ die Seite eines Quadrats, d. h. die Strecke a bedeutet, so hat auch $\sqrt{ab}$ die Bedeutung einer Strecke. Setzt man $\sqrt{ab} = x$, so folgt $x^2 = ab$ oder $a : x = x : b$ (und umgekehrt), d. h. x ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b und kann daher in bekannter Weise construirt werden.

Entsprechend ist beispielsweise $x = \sqrt{\frac{abc}{d}}$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und der vierten geometrischen Proportionale zu d, b und c, oder auch zwischen b und $\frac{ac}{d}$, oder zwischen $\frac{ab}{d}$ und c. Ebenso kann z. B. $x = \sqrt{\frac{a^3 bc^2}{d^3 e}}$ so construirt werden, dass man zunächst $x = \frac{a}{d}\sqrt{\frac{abc^2}{de}}$ setzt und nach einander $y = \frac{ab}{d}$, $z = \frac{yc}{e}$, $u = \sqrt{cz}$, $v = \frac{au}{d}$ construirt.

Hierher gehören auch insbesondere folgende sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz leicht ergebenden Fälle:

$\sqrt{a^2 + b^2}$ ist gleich der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten bezüglich gleich a und b sind.

$\sqrt{a^2 - b^2}$ ist gleich einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich a und dessen andere Kathete gleich b ist.

Man kann auch $\sqrt{a^2 - b^2}$ mittelst der Umformung in $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ als die mittlere geometrische Proportionale zwischen $a + b$ und $a - b$ deuten.

Aus dem Vorstehenden folgen leicht die Deutungen und Constructionen zahlreicher zusammengesetzter Ausdrücke, von denen wir beispielsweise noch die folgenden anführen;

$\sqrt{ab + cd}$ kann construirt werden, indem man die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und b, ferner die mittlere geometrische Proportionale zwischen c und d und endlich die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks construirt, dessen Katheten bezüglich diese beiden mittleren Proportionalen sind.

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ kann construirt werden, indem man zunächst $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, also die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den Katheten a und b zeichnet, so dass dann für den vorhergehenden Ausdruck $\sqrt{z^2 + c^2 + d^2}$ gesetzt werden kann, dann entsprechend $u = \sqrt{z^2 + c^2}$ und zuletzt $x = \sqrt{u^2 + d^2}$ construirt.

Insbesondere ist $a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$ gleich der Hypotenuse eines

rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreiecks mit der Kathete a oder gleich der Diagonale eines Quadrats mit der Seite a; $a\sqrt{19} = \sqrt{19a^2}$ kann construirt werden, indem man dafür $\sqrt{16a^2 + 4a^2 - a^2} = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2 - a^2}$ setzt, also z. B. zuerst $y = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2}$ und sodann $x = \sqrt{y^2 - a^2}$ construirt. Man kann aber auch dafür $\sqrt{25a^2 - 4a^2 - a^2 - a^2}$ setzen und dann entsprechend verfahren. Ferner kann man entsprechend der Form $\sqrt{19a \cdot a}$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und $19a$ zeichnen. Noch andere zu geometrischer Deutung geeignete Umformungen sind $\sqrt{(6a)^2 - (4a)^2 - a^2}$ oder $\sqrt{(5a)^2 - (2a) \cdot (3a)}$, u. dgl. m.

Ist ein Ausdruck aus mehreren anderen durch Addition bezw. Subtraction zusammengesetzt, so heissen seine einzelnen, durch + oder — verbundenen Theile seine Glieder. Soll ein solcher zusammengesetzter Ausdruck einer geometrischen Deutung unterworfen werden, so ist vor Allem nothwendig, dass seine sämmtlichen Glieder alle von derselben Dimension (also hier entweder alle von der ersten oder alle von der zweiten) sind, da es keinen Sinn hat, z. B. Strecken zu Flächen zu addiren. Ist in einem Ausdrucke diese Bedingung nicht erfüllt, so ist entweder ein Fehler gemacht worden, oder die gestellte Aufgabe fordert Unmögliches. — Die Construction eines derartigen in richtiger Weise zusammengesetzten Ausdrucks aus den einzelnen Gliedern bedarf keiner weiteren Erklärung.

Anders verhält es sich, wenn unter den vorhandenen Strecken eine als die zu gebrauchende Maasseinheit erklärt und benutzt worden ist. So geht beispielsweise der folgende Ausdruck erster Dimension

$$\frac{ab}{c} + \frac{er}{f} + \frac{gr^2}{hi} + \frac{kl}{r} + \frac{mn^2}{r^2}$$

durch die Annahme $r = 1$ in

$$\frac{ab}{c} + \frac{e}{f} + \frac{g}{hi} + kl + mn^2$$

über, also in einen Ausdruck, welcher scheinbar Glieder der $o$ten, ersten, zweiten und dritten Dimension nebeneinander, ja sogar ein solches, welches bei consequenter Durchführung der Bezeichnung als von der — ersten Dimension zu bezeichnen wäre, enthält. Dieser Schein verschwindet aber sofort, wenn man bedenkt, dass die Annahme der Grösse r zur Maasseinheit es bedingt, dass in dem zweiten Ausdruck die Grössen a, b, c, e u. s. w. nur noch die Verhältnisszahlen der früher so bezeichneten Grössen zu r bezeichnen können. Setzt man statt derselben hiernach bezüglich $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}$ u. s. w. ein, so erhält man nach leichten Umformungen wieder den Ausdruck in der zuerst angegebenen Gestalt.

§ 74. Weitere Beispiele zur Methode der algebraischen Analyse.

a) Aufgaben, deren Analyse auf Gleichungen ersten Grades führt, bedürfen keiner weiteren Erklärung. Sie sind stets eindeutig bestimmt. Kommt bei der gesuchten Strecke ausser der Länge auch die Lage in Betracht, so zeigt ein negatives Resultat an, dass derselben in der Construction diejenige Richtung zu geben ist, welche der in der Analysis angenommenen entgegengesetzt ist. Kommt die Lage in keiner Weise in Betracht, so zeigt ein negatives Resultat die Unmöglichkeit der Auflösung an; zugleich aber deutet dasselbe auf die Möglichkeit einer Abänderung oder Erweiterung des Wortlauts der Aufgabe hin, durch welche auch dieses negative Resultat einen Sinn erhalten würde.

Zu einer Seite BC eines Dreiecks ABC eine parallele Transversale XY zu zeichnen, so dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt wird:

1. $XY = CY$; 2. $AX = CY$; 3. $XY^2 = AX \cdot AB$; 4. $XY = BX + CY$; 5. $XY = CY - BX$; 6. $XY = AX - CY$; 7. $BC - XY = AX + AY$; 8. $BC - XY = AX - AY$.

9. Auf den Seiten eines Rechtecks von den Eckpunkten aus gleichmässig solche gleiche Stücke abzuschneiden, dass die Theilpunkte der Seiten die Eckpunkte eines Rhombus bilden.

10. In ein Dreieck ABC ein Parallelogramm mit dem Umfang $2s$ so zu zeichnen, dass es mit demselben den Winkel B gemeinsam hat.

11. Auf einem Durchmesser AB eines Kreises sei ein Punkt P gegeben; man soll auf der Verlängerung von AB einen Punkt X so bestimmen, dass die Tangente XY gleich PX wird.

12. Auf einem Durchmesser AB eines Kreises ist ein Punkt C gegeben und über AC als Durchmesser ist ein Halbkreis construirt; man soll einen Kreis construiren, welcher die auf AB senkrechte Gerade CD und zwei Halbkreise berührt.

b) Aufgaben, deren Analyse auf reine Gleichungen zweiten Grades führt, liefern für die gesuchte Unbekannte stets zwei entgegengesetzt gleiche Werthe. In Betreff des negativen Werthes gilt das darüber bei a) Gesagte. Hiernach kann eine solche Aufgabe eindeutig oder zweideutig sein.

1. Auf einer Strecke AB, auf welcher ein Punkt C gegeben ist, soll ein zweiter Punkt X so bestimmt werden, dass $AC : AX = AX : AB$ ist.

2. Im Dreieck ABC eine zu BC parallele Transversale XY so zu ziehen, dass das Dreieck AXY gleich $\frac{2}{3}$ von ABC ist.

3. In einen gegebenen Kreis fünf gleiche Quadrate zu zeichnen, so dass jeder der vier äusseren zwei Eckpunkte auf dem Kreise und mit dem mittleren eine Seite gemeinsam hat.

4. Ein gleichschenkeliges Dreieck aus den Höhen auf der Basis und auf einem Schenkel zu construiren.

5. Zwei Strecken zu construiren, wenn die Summe ihrer Quadrate und ihr Verhältniss gegeben ist.

6. Ein regelmässiges Sechseck zu zeichnen, dessen Inhalt die mittlere geometrische Proportionale zwischen den gegebenen Quadraten a^2 und b^2 ist.

c) Aufgaben, deren Analyse auf gemischte quadratische Gleichungen führt, haben im Allgemeinen zwei verschiedene Auflösungen. Ist eine Wurzel der Gleichung negativ, so gilt für die zugehörige Auflösung das im entsprechenden Fall unter a) Gesagte. Damit die Gleichung $x^2 + px = q$, in welcher x die Maasszahl einer Strecke bedeutet, möglich sei, müssen alle Glieder mit dem ersten von gleicher, also der zweiten Dimension sein; p muss daher ebenfalls eine Strecke, q aber eine Fläche bedeuten. Wir können demnach q stets als in der Form eines Produktes $m \cdot n$ gegeben voraussetzen. Man erhält dann durch Auflösen der Gleichung $x = \pm\sqrt{mn + \frac{1}{4}p^2} - \frac{1}{2}p$, und die Construction dieses Ausdrucks geht ohne Weiteres aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten hervor. Eine andere Construction der beiden Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung gründet sich auf den Satz, dass, wenn w_1, w_2 diese beiden Resultate der Auflösung bedeuten, $-p = w_1 + w_2$, $-q = w_1 \cdot w_2$ ist. Man hat nun die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen w_1 und w_2 gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. In beiden Fällen beschreibt man zunächst einen Kreis mit dem Durchmesser p. Haben w_1 und w_2 gleiche Vorzeichen, ist also q nega-

tiv, so trage man in diesen Kreis eine Sehne AB ein, welche aus zwei Strecken $AP = m$, $PB = n$ besteht, und also gleich $m + n$ ist; haben w_1 und w_2 ungleiche Vorzeichen, also bei positivem q, so trage man eine Sehne $AB = m - n$ ein und verlängere AB um $BP = n$, so dass also $AP = m$ ist. In beiden Fällen ziehe man dann die durch P und den Mittelpunkt gehende Sehne XY, so sind die Abschnitte XP, YP die gesuchten Strecken w_1 und w_2. — Liegt der Punkt P innerhalb des Kreises, so sind beide Strecken positiv zu nehmen, wenn p negativ ist, dagegen beide negativ, wenn p positiv ist. Liegt P ausserhalb des Kreises, so ist stets die eine Strecke positiv, die andere negativ, und zwar hat die grössere immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie p.

Beispiele: Eine gegebene Strecke AB in einem Punkte X so zu theilen, dass 1. $AX^2 = 2 \cdot BX^2$; 2. $AX \cdot BX = AX^2 - BX^2$; 3. $AX \cdot BX = (AX - BX)^2$ ist.

In einem gegebenen Dreieck ABC eine Transversale XY parallel zu BC zu ziehen, so dass 4. $\triangle AXY = \triangle BCX$; 5. $BC : XY = AX : BX$; 6. $AC : XY = AX : CY$ ist.

Eine Sehne AB eines gegebenen Kreises so zu verlängern, dass die von dem Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente 7. eine gegebene Länge hat, 8. gleich dem $n$ten Theil der ganzen Secante ist.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren aus 9. einer Kathete und der Projection der anderen Kathete auf die Hypotenuse, 10. der Höhe auf die Hypotenuse und der Bedingung, dass eine Kathete gleich der Projection der anderen auf die Hypotenuse sei, 11. der Hypotenuse und der Bedingung, dass die drei Seiten eine stetige Proportion bilden.

Einen Kreis zu construiren, 12. der zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt und von der dritten unter einer Sehne von gegebener Länge geschnitten wird, 13. der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und von einem gegebenen Kreise unter einem Durchmesser geschnitten wird, 14. welcher den einen von zwei gegebenen Kreisen berührt, durch den Halbirungspunkt der Centrallinie derselben geht und seinen Mittelpunkt auf der Peripherie des andern hat. 15. Auf einem kreisförmigen Billard steht ein Ball in einem Punkte P. Man soll denselben central so stossen, dass er nach zweimaligem Anprallen nach P zurückkehrt.

E. Einige besondere Arten von Constructions-Aufgaben.

§ 75. Verwandlungs- und Theilungs-Aufgaben.

a) Die Verwandlungs-Aufgaben, von denen die einfachsten und wichtigsten bereits im § 45 behandelt sind, verlangen die Construction einer Figur, welche mit einer gegebenen Figur gleichen Flächeninhalt haben, und welche ausserdem eine oder mehrere andere Bedingungen erfüllen soll. Man kann dieselben also als Aufgaben bezeichnen, bei denen sich unter den zur Construction einer verlangten Figur gegebenen Bestimmungsstücken der Flächeninhalt derselben befindet, indem dieser Flächeninhalt eben durch diejenige Figur angegeben wird, deren Verwandlung verlangt ist. Zur Auflösung können verschiedene der im Vorigen angegebenen Methoden angewendet werden; selbstverständlich stützt sich dieselbe stets auf die Sätze über den Flächeninhalt der Figuren, § 40—44.

Häufig wird die Auflösung dadurch erleichtert, dass man die verlangte Verwandlung successive ausführt, d. h. zuerst die gegebene Figur in eine andere verwandelt, welche noch nicht alle gestellten Bedingungen erfüllt, diese dann in eine

zweite und eventuell die zweite in eine dritte u. s. w. verwandelt, indem man stets Sorge trägt, dass die bereits erfüllten Bedingungen auch erfüllt bleiben.

Soll beispielsweise ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichschenkeliges Dreieck mit gegebener Grundlinie verwandelt werden, so kann man zunächst jenes nach § 45 in ein beliebiges Dreieck ABE, dann dieses ebenfalls nach § 45 in ein andres AFG mit der gegebenen Grundlinie AG und zuletzt AFG unter Beibehaltung dieser Grundlinie in ein gleichschenkeliges Dreieck AHG verwandeln, indem man die Spitze H als Durchschnittspunkt zweier Oerter, nämlich der durch F gehenden Parallelen zu AG und der auf AG in ihrem Halbirungspunkt senkrechten Geraden bestimmt.

b) Die Theilungs-Aufgaben, von denen ebenfalls die einfachsten und wichtigsten bereits früher, § 46, behandelt sind, fordern die Theilung einer Figur in zwei oder mehrere Theile, welche entweder einander gleich sind oder in einem anderen gegebenen Verhältniss zu einander stehen. Ausserdem können besondere Bedingungen für die Lage oder Richtung der Theilungslinien gestellt sein. In allen solchen Fällen kann man jede einzelne der gesuchten Theilungslinien als eine solche Linie ansehen, welche für sich die gegebene Figur in einem bekannten Verhältniss theilen, also von derselben ein Stück abschneiden soll, welches ein bestimmter Theil der ganzen Figur ist. Eine solche Linie lässt sich, wenn man zunächst die sonstigen Bedingungen der Aufgabe unbeachtet lässt, nach den Angaben des § 46 leicht construiren, und man hat dann noch das durch diese Linie abgeschnittene Stück in ein anderes zu verwandeln, so dass auch den übrigen Bedingungen genügt wird. Die Theilungs-Aufgaben werden also auf diese Weise auf Verwandlungs-Aufgaben zurückgeführt. Zuweilen lässt sich auch der umgekehrte Weg einschlagen, dass man zuerst die gegebene ganze Figur in eine andere verwandelt, welche so beschaffen ist, dass ihre entsprechende Theilung durch ein bekanntes Verfahren auch den verlangten Theil der ursprünglichen Figur liefert.

Soll z. B. ein gegebenes Viereck $ABCD$ in drei gleiche Theile getheilt werden, und zwar durch gerade Linien, welche von demselben Eckpunkt A ausgehen, so hat man durch jede der Theilungslinien ein Stück von dem Viereck abzuschneiden, welches gleich $\frac{1}{3}$ desselben ist. Zieht man die Diagonale BD, theilt dieselbe in drei gleiche Theile BE, EF, FD und zieht die gebrochenen Linien AFC, AEC, so ist offenbar durch dieselben das Viereck $ABCD$ in drei gleiche Theile getheilt. Man hat dann noch jedes der Vierecke $AFCD$, $AECB$ zu verwandeln, so dass statt jener gebrochenen Linien gerade entstehen. Zieht man beispielsweise AC und durch F und E die Parallelen zu AC, welche bezüglich DC in X, BC in Y schneiden mögen, so sind AX und AY die verlangten Theilungslinien. Man kann aber auch nach der anderen Methode zuerst $ABCD$ in ein Dreieck verwandeln, dessen Spitze in A und dessen Grundlinie in einer Seite liegt, dann dieses Dreieck durch von A ausgehende Linien in drei gleiche Theile theilen, u. s. w.

In der Praxis wendet man noch ein anderes Verfahren an, welches nicht streng construirend ist, aber für den Gebrauch hinreicht. Hat man nämlich den Flächeninhalt der zu theilenden Figur durch Messung und Rechnung ermittelt, so ergiebt sich daraus auch der Inhalt des durch die gesuchte Theilungslinie abzuschneidenden Stückes. Kennt man nun durch die übrigen Bedingungen die Gestalt und Lage des letzteren so weit, dass man hiernach mittelst seines Inhalts die Lage von zur Bestimmung der Theilungslinie dienenden Punkten durch

Rechnung ermitteln kann, so lässt sich durch Abtragen der erforderlichen Längen mittelst eines Maassstabes diese gesuchte Linie mit der entsprechenden Annäherung zeichnen. — Ist beispielsweise in der vorstehenden Aufgabe der Theilung eines Vierecks in drei gleiche Theile $DC = 8{,}34$ m, $CB = 5{,}12$ m, $AB = 3{,}14$ m, $AD = 2{,}55$ m, $AC = 7{,}19$ m gemessen, so kann man zunächst den Inhalt jedes der Dreiecke ABC und ACD aus seinen drei Seiten berechnen. Man findet $\triangle\, ABC = 7{,}0258\, qm$, $\triangle\, ACD = 8{,}7164\, qm$, also den Inhalt des Vierecks $ABCD$ gleich $15{,}7422\, qm$ und mithin den des dritten Theils dieses Vierecks gleich $5{,}2474\, qm$. Das durch die gesuchte Linie AX abzuschneidende Drittel ADX wird ein Dreieck, dessen Höhe gleich der zur Grundlinie DC gehörigen des Dreiecks ACD, und dessen Grundlinie der Abschnitt $DX = x$ von DC ist. Jene Höhe ergiebt sich aus $DC = 8{,}34$ und dem Inhalt des Dreiecks ADC gleich $8{,}7164$ zu $8{,}7164 : 4{,}17 = 2{,}09$ m; also ist $\frac{1}{2}x \cdot 2{,}09 = 5{,}2474$, woraus $x = 5{,}02$ m folgt. Trägt man also mittelst eines Maassstabes von DC die Strecke $DX = 5{,}02$ m ab und zieht AX, so hat man die eine der gesuchten Theilungslinien gefunden.

§ 76. Constructionen von Figuren in und um Figuren.

Eine Figur heisst einer anderen einbeschrieben, wenn ihre sämmtlichen Eckpunkte auf dem Umfang der anderen liegen; die letztere Figur heisst dann der ersteren umbeschrieben.

Soll eine Figur in eine gegebene Figur construirt werden, so ist durch den Umfang der letzteren ein Ort für jeden Eckpunkt der ersteren gegeben, und es sind somit diese Eckpunkte und damit die gesuchte Figur gefunden, so bald für jeden derselben ein zweiter Ort aus den Bedingungen der Aufgabe ermittelt ist. Soll beispielsweise in das gemeinschaftliche Stück von zwei gleichen Kreisen ein Quadrat beschrieben werden, so muss der Mittelpunkt des letzteren die Centrallinie halbiren, und diese muss zwei Seiten des Quadrats parallel sein. Daraus folgt, dass die Diagonalen des Quadrates als gerade Linien, welche die Centrallinie in deren Halbirungspunkt unter Winkeln von 45° schneiden, die noch fehlenden Oerter für die vier Eckpunkte sind.

Soll eine Figur um eine gegebene Figur beschrieben, oder soll, was bei geradlinigen Figuren dasselbe ist, eine Figur gezeichnet werden, deren Seiten durch gegebene Punkte gehen, so sind diese Seiten durch je einen zweiten Punkt oder durch den Winkel, welchen sie mit einer bekannten Linie bilden, bestimmt.

Nähere allgemeine Anweisungen können hier nicht gegeben werden, da die Aufgaben je nach der Art der gegebenen und der gesuchten Figuren und nach den weiteren Bedingungen für ihre Lage zu verschiedenartig sein können. Selbstverständlich ist man auch an die vorstehenden Bemerkungen nicht gebunden, und hat in jedem einzelnen Falle sich das am zweckdienlichsten scheinende Verfahren zu suchen. So kann beispielsweise die algebraische Analyse in manchen Fällen zur Anwendung kommen. Das Vorstehende soll nur den Zweck erfüllen, dass die angegebene Gruppe eigenartiger Aufgaben, welche vorher nirgends vorgekommen ist, an dieser Stelle Erwähnung finde, und muss wegen des Weiteren auf die betreffenden besonderen Schriften verwiesen werden, denen wir auch die Erörterung anderer besonderer Arten oder auch einzelner historisch berühmt gewordener Aufgaben zu überlassen haben, welche vorwiegend nur theoretisches Interesse bieten. Hier mögen nur noch zwei der wichtigsten derartigen Aufgaben oder Aufgaben-Gruppen der allgemeinen Kenntniss wegen kurz angeführt werden. —

Das Apollonische Berührungs-Problem, auch Tactionsproblem genannt, kann in seinem planimetrischen Theil als die Aufgabe bezeichnet werden, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt. Indem man dabei den Punkt als die Grenze eines Kreises, dessen Radius bis zum Verschwinden abnimmt, und die Gerade als die Grenze eines Kreises, dessen Radius bis in's Unendliche wächst, mit heranzieht, also gestattet, statt eines (oder mehrerer) der gegebenen Kreise einen Punkt, durch welchen der gesuchte Kreis gehen, oder eine Gerade, welche derselbe berühren soll, zu setzen, erhält man im Einzelnen zehn Aufgaben. Eine Auflösung des Problems mit Hülfe von Sätzen der neueren Geometrie ist am Schluss des § 82 angegeben.

Die Malfattische Aufgabe ist die Aufgabe, in ein gegebenes Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Schlussbemerkung: Die vorstehende Anleitung zur Behandlung von planimetrischen Constructions-Aufgaben soll und kann den Gegenstand nicht erschöpfen; der Zweck derselben ist nur für die häufigsten und wichtigsten vorkommenden Fälle Wege zu zeigen und damit die Befähigung, auch schwierigere Aufgaben zu behandeln und selbständige Lösungen zu suchen, vermitteln zu helfen. Dass die unterschiedenen einzelnen „Methoden" nicht immer streng auseinander zu halten sind, dass vielmehr auch Verbindungen derselben zur Lösung einer Aufgabe vorkommen können, darf als selbstverständlich bezeichnet werden. Auch die beigefügten Aufgaben sind nur als Beispiele zu betrachten. In Betreff weiter gehender Forderungen verweisen wir auf die besonderen Aufgaben-Sammlungen für Planimetrie, von denen wir folgende als empfehlenswerth namhaft machen:

GANDTNER und JUNGHANS, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Zwei Theile. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung.

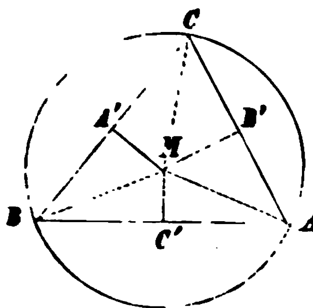
LIEBER und LÜHMANN, Geometrische Constructions-Aufgaben. Berlin, Verlag von L. Simion.

Anhang.

Die sogenannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

§ 77.

Von den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks, nämlich den Durchschnittspunkten: a) der drei Mittelsenkrechten der Seiten, b) der drei Winkelhalbirenden, c) der drei Mittellinien und e) der drei Höhen, ist in den § 21 (2), § 22 (2), § 38 (3), (3) und (5) die Rede gewesen. Im Nachstehenden soll noch eine Anzahl auf dieselben bezüglicher bemerkenswerther Sätze zusammengestellt werden.



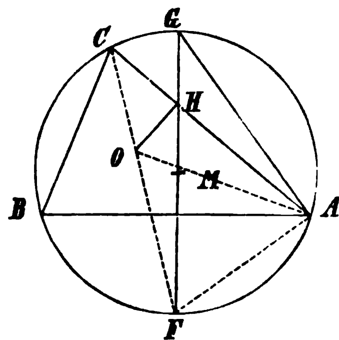
1. Der Mittelpunkt M des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises, d. i. nach § 21 (2) der Durchschnittspunkt der auf den Seiten in ihren Halbirungspunkten C', B', A' errichteten Senkrechten liegt innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks, je nachdem dasselbe spitz- oder stumpfwinkelig ist; für ein rechtwinkeliges Dreieck ist er der Halbirungspunkt der Hypo-

tenuse. Dies geht daraus hervor, dass allgemein, wenn man M mit A und B verbindet, der Winkel AMB als Centriwinkel doppelt so gross ist als der Dreieckswinkel ACB.

Bezeichnet man in üblicher Weise die Winkel an A, B, C bezüglich durch α, β, γ und die ihnen gegenüberliegenden Seiten bezüglich durch a, b, c, so ist also $\angle AMB = 2\gamma$, $\angle AMC = 2\beta$, $\angle BMC = 2\alpha$, daher $\angle BMC' = \gamma$ u. s. w. Ferner ist $\angle MBC' = 90^\circ - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$ und ebenso $\angle MCB' = \angle MAB' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$ und $\angle MBA' = \angle MCA' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$.

Die Berechnung des Radius r aus den drei Seiten a, b, c ist bereits in § 49 gezeigt worden.

Da die durch M senkrecht zu AB gelegte Gerade die Sehne BA und mithin auch den zugehörigen Bogen, dessen Peripheriewinkel ACB ist, halbirt, so folgt, dass jede winkelhalbirende Transversale eines Dreiecks und die zu der gegenüberliegenden Seite gehörige Mittelsenkrechte einander in einem Punkte des umbeschriebenen Kreises treffen.



Verbindet man diesen Durchschnittspunkt F der Halbirungslinie des Winkels C und der Mittelsenkrechten von AB mit einem anliegenden Eckpunkt A, so ist der Peripheriewinkel $BAF = BCF = \frac{1}{2}\gamma$. Ist ferner O der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises, also AO die Halbirungslinie des Winkels α, so ist demnach $\angle OAF = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Da nun $\angle FOA = \angle OCA + \angle OAC = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ und demnach $\angle OAF = \angle FOA$ ist, so folgt $OF = FA$, d. h. die Verbindungslinie jenes Durchschnittspunktes F mit einem anliegenden Eckpunkt ist gleich dem Abstand desselben Punktes F von dem Durchschnittspunkt O der drei Winkelhalbirenden.

Zieht man durch F den Durchmesser FG des umbeschriebenen Kreises, verbindet G mit A und fällt von O die Senkrechte OH auf AC, so sind die Peripheriewinkel AGF und ACF einander gleich, mithin die rechtwinkeligen Dreiecke AGF und COH ähnlich. Daher ist

$$CO : OH = FG : AF \text{ oder } CO \cdot AF = OH \cdot FG,$$

oder da $AF = OF$ ist, und wenn man für den Radius OH des einbeschriebenen Kreises ρ und für den Durchmesser FG des umbeschriebenen Kreises $2r$ einsetzt,

$$CO \cdot OF = 2r\rho.$$

Da ferner das Product der Abschnitte jeder anderen durch O gehenden Sehne des umbeschriebenen Kreises gleich $CO . OF$ sein muss, so hat man den Satz: Jede durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises gehende Sehne des umbeschriebenen Kreises eines Dreiecks wird in diesem Punkte so getheilt, dass das Rechteck aus den Abschnitten gleich dem doppelten Rechteck aus den Radien der beiden Kreise ist, oder kürzer: Die Potenz des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises eines Dreiecks in Beziehung auf den umbeschriebenen Kreis ist gleich dem doppelten Rechteck aus den beiden Radien.

Wendet man diesen Satz auf den durch O gehenden Durchmesser des Kreises M an, und bezeichnet d den Abstand der beiden Mittelpunkte M und O,

so sind die betreffenden Abschnitte gleich $r+d$ und $r-d$, und aus

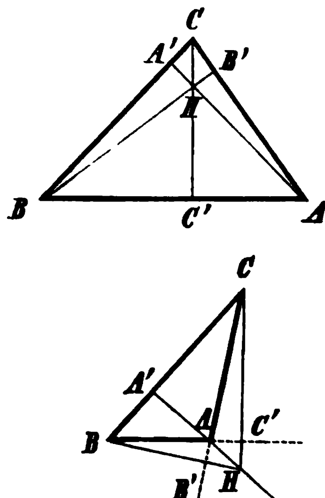
$$(r+d)\,(r-d) = 2r\rho \text{ folgt}$$

$$d^2 = r^2 - 2r\rho.$$

Durch eine ähnliche Entwicklung in Beziehung auf einen äusseren Berührungskreis O_a erhält man für die Entfernung d_a des Mittelpunktes des letzteren von M die Gleichung

$$d_a^2 = r^2 + 2r\rho_a.$$

2. Es seien AA_1, BB_1, CC_1, die drei Höhen eines Dreiecks ABC und H ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Da die Winkel $AA'B$ und $BB'A$ rechte sind, so folgt ohne Weiteres, dass jeder über einer Seite eines Dreiecks als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Fusspunkte der zu den anderen Seiten senkrechten Höhen geht.



Für die einander in H schneidenden Sehnen BB', AA' und ebenso für die einander in C schneidenden BA', AB' ergiebt sich hieraus

$BH \cdot HB' = AH \cdot HA'$ $(= CH \cdot HC')$ und

$CA' \cdot CB = CB' \cdot CA$ oder $CA : CB = CA' : CB'$

d. h. die Rechtecke aus den beiden Abschnitten je einer Höhe eines Dreiecks sind einander gleich, und je zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander umgekehrt wie ihre dem gemeinschaftlichen Eckpunkt anliegenden Abschnitte.

Berücksichtigt man, dass durch die drei Höhen drei neue Dreiecke AHB, AHC, BHC entstehen, derart dass beispielsweise für BHC die Seitenabschnitte CB', BC' Höhen, also jedesmal der dritte Eckpunkt des ursprünglichen Dreiecks der Durchschnittspunkt der drei Höhen des neuen ist, so sieht man, dass die beiden vorstehenden Sätze in einen einzigen zusammenfallen. Auch sind dieselben identisch mit den bereits früher (§ 44,2), auf anderem Wege bewiesenen Satze, dass die Rechtecke aus je einer von zwei Seiten eines Dreiecks und der Projection der anderen auf dieselbe einander gleich sind.

Die obige Figur enthält ferner drei Gruppen von je vier einander ähnlichen Dreiecken, wie leicht durch die Uebereinstimmung in den betreffenden Winkeln bewiesen werden kann. Es ist nämlich 1. $\triangle ABB' \sim \triangle ACC' \sim \triangle CHB' \sim \triangle BHC'$; 2. $\triangle BCC' \sim \triangle BAA' \sim \triangle AHC' \sim \triangle CHA'$; 3. $\triangle CAA' \sim \triangle CBB' \sim \triangle BHA' \sim \triangle AHB'$. Auch mit Hülfe der Aehnlichkeit dieser Dreiecke lassen sich die vorstehenden Sätze unmittelbar beweisen.

Man erhält in entsprechender Weise mittelst der durch je vier Punkte, wie z. B. C, A', H, B', gehenden Kreise oder durch die angeführten Aehnlichkeiten denselben Satz in der anderen Form

$$BA' \cdot BC = BH \cdot BB',$$

d. h. das Rechteck aus je einer Seite und einem ihrer Abschnitte ist gleich dem Rechteck aus der mit diesem Abschnitt zusammenstossenden Höhe zu einer anderen Seite und dem oberen Abschnitt dieser Höhe.

Durch die Aehnlichkeit vorher angegebener Dreieckspaare oder durch Gleich-

setzung dreier Ausdrücke für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, $a h_a = b h_b = c h_c$ erhält man ferner den Satz, dass die Rechtecke aus je einer Seite eines Dreiecks und der zugehörigen Höhe einander gleich sind.

Verbindet man endlich den Satz $BA' \cdot BC = BH \cdot BB'$ mit dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \mp 2\, BC \cdot BA'$, so erhält man den Satz:

Das Quadrat jeder Seite eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus der zur ersten Seite gehörigen Höhe und ihrem oberen Abschnitt.

3. Die Fusspunkte A', B', C' der Höhen eines Dreiecks ABC sind die Eckpunkte eines neuen Dreiecks, welches das Fusspunkten-Dreieck des ursprünglichen genannt wird.

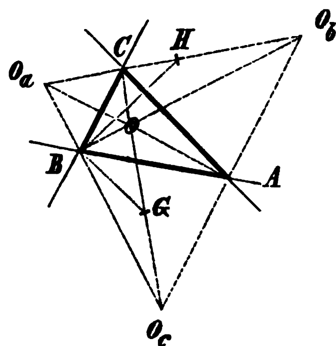
Jede Seite des Fusspunktendreiecks schneidet von dem ursprünglichen ein ihm ähnliches Dreieck ab, denn die Dreiecke ABC und $A'B'C$ stimmen ausser in dem gemeinschaftlichen Winkel C zufolge der Gleichung $CA' \cdot CB = CB' \cdot CA$ auch in den Verhältnissen der denselben einschliessenden Seiten überein.

Daher ist $\angle\, CA'B' = \angle\, CAB = \alpha$. Ebenso ist $\angle\, BA'C' = \alpha$, und da auch die rechten Winkel $AA'C$ und $AA'B$ einander gleich sind, so folgt $\angle\, B'A'H = \angle\, CA'H$. Man erhält somit den Satz: Die Höhen eines Dreiecks halbiren die Winkel, bezw. die Aussenwinkel des Fusspunktendreiecks, je nachdem sie innerhalb oder ausserhalb des Urdreiecks liegen, und die Seiten des ersteren halbiren entsprechend die Aussenwinkel oder die inneren Winkel des letzteren.

Der Durchschnittspunkt der Höhen ist demnach der Mittelpunkt des inneren oder eines der äusseren Berührungskreise des Fusspunktendreiecks, und die Eckpunkte des Urdreiecks sind die Mittelpunkte der drei anderen dieser Kreise.

Auch ergiebt sich aus dem Vorstehenden, dass jeder Winkel des Fusspunktendreiecks durch einen Winkel des Urdreiecks bestimmt ist. Ist z. B. letzteres spitzwinkelig, so ist jeder Winkel des ersteren doppelt so gross als das Complement des gegenüberliegenden Winkels des letzteren. Die Auffindung der für ein stumpfwinkeliges Urdreieck nöthigen Abänderung dieses Satzes kann dem Leser überlassen bleiben.

Umgekehrt, wenn O, O_a, O_b, O_c die Mittelpunkte des inneren und der äusseren Berührungskreise des Dreiecks ABC sind, so ist dieses letztere das Fusspunktendreieck eines jeden der vier Dreiecke, welche je drei jener Mittelpunkte zu Eckpunkten haben, und der vierte Mittelpunkt ist jedesmal der Durchschnittspunkt der Höhen des betreffenden Urdreiecks. Es folgt dies daraus, dass je zwei der Winkelhalbirenden wie z. B. $O_b B$ und $O_a O_c$ als Halbirungslinien von Nebenwinkeln zu einander senkrecht stehen.



Beschreibt man über OO_c als Durchmesser einen Kreis, so muss derselbe durch die Scheitel A, B der rechten Winkel OAO_c und OBO_c gehen. Der Halbirungspunkt G von OO_c ist also von O und B gleich weit entfernt. Daher ist im gleichschenkeligen Dreieck BOG der Winkel BGO gleich $2\,R - 2\,GOB$

$= 2\,R - 2\,(OCB + OBC) = 2\,R - 2 \cdot (\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma) = 2\,R - (\beta + \gamma) = \alpha$. Aus der Gleichheit der Winkel BGO und BAC folgt aber, dass der dem Dreieck ABC umbeschriebene Kreis auch durch G, und ebenso gilt dass er auch durch die Halbirungspunkte von OO_a und OO_b gehen muss. — Der Punkt G ist also derselbe, in welchem die Winkelhalbirende von C und die Mittelsenkrechte von AB einander treffen.

In gleicher Weise muss der über O_aO_b als Durchmesser beschriebene Kreis durch die Scheitel A, B der rechten Winkel O_aBO_b, O_aAO_b gehen, und demnach der Halbirungspunkt H von O_aO_b gleichweit von B und O_a entfernt sein. Im gleichschenkeligen Dreieck O_aHB ist also $\angle\, O_aHB = 2\,R - 2\,HO_aB$. Es ist aber $\angle\, HO_aB = 2\,R - COB = OBC + \angle\, OCB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, mithin $\angle\, O_a\,HB = 2\,R - (\beta + \gamma) = \alpha$. Daher ist CHB Peripheriewinkel des durch B, C und A gehenden Kreises oder der dem Dreieck ABC umbeschriebene Kreis geht auch durch H, und ebenso gilt, dass er auch durch die Halbirungspunkte von O_aO_c und O_bO_c gehen muss.

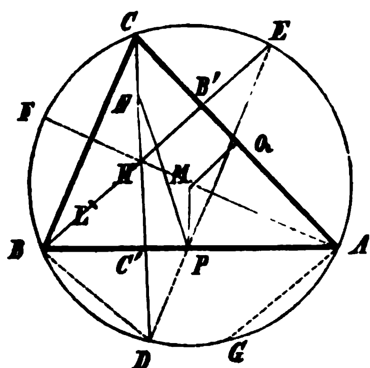
Der einem Dreieck umbeschriebene Kreis geht also durch die Halbirungspunkte der sechs Verbindungstrecken der Mittelpunkte der vier Berührungskreise dieses Dreiecks.

Betrachten wir wieder eins der Dreiecke $O_aO_bO_c$, OO_aO_b u. s. w. als das Urdreieck, ABC also als das Fusspunktendreieck desselben, so erhält der vorstehende Satz die Form:

Der um ein Fusspunktendreieck beschriebene Kreis geht durch die Halbirungspunkte der Seiten der zu jenem gehörigen vier Urdreiecke oder, was dasselbe ist, er halbirt die Seiten und die oberen Höhenabschnitte eines jeden einzelnen solchen Urdreiecks.

Der genannte Kreis geht also im Ganzen durch neun bestimmte Punkte. Daher heisst er der Kreis der neun Punkte. Eine andere Benennung desselben ist FEUERBACH'scher Kreis.

4. Verlängert man die Höhen eines spitzwinkeligen Dreiecks über ihre Fusspunkte bis zum umbeschriebenen Kreise, so ist jede solche Verlängerung gleich dem unteren Abschnitt der zugehörigen Höhe, denn ist CD diese Verlängerung der Höhe CC', und zieht man BD, so ist $\angle\, DBA = \angle\, DCA = 90^\circ - \alpha = \angle\, ABB'$, daher $\triangle\, BCD \cong BCH$ und also $CD = HC'$.



Daher muss auch umgekehrt, wenn man eine Höhe über ihren Fusspunkt um ihren unteren Abschnitt verlängert, der Endpunkt der Verlängerung auf dem umbeschriebenen Kreise liegen.

Für stumpfwinkelige und rechtwinkelige Dreiecke gilt im Wesentlichen derselbe Satz und Beweis; auch hier halbirt der Fusspunkt jeder Höhe den Abstand des Durchschnittspunktes derselben mit dem umbeschriebenen Kreis von ihrem Durchschnittspunkt mit den anderen Höhen.

Verbindet man die Endpunkte D, E, F der genannten Verlängerungen mit einander, so folgt daraus, dass $\angle\, FDC = \angle\, FAC = 90^\circ - \gamma$ und $\angle\, CDE = \angle\, EBC$

$= 90^0 - \gamma$, also $\angle FDC = \angle EDC$ ist, dass die Winkel des entstandenen Dreiecks DEF durch die Höhen des ursprünglichen halbirt werden.

Errichtet man ferner in A die Senkrechte AG auf AC bis zum umbeschriebenen Kreis, so ist $\angle BAG = 90^0 - \alpha$ und $\angle DBA = \angle DCA = 90^0 - \alpha$, also $\angle BAG = \angle DBA$. Daher ist der Bogen BG gleich dem Bogen AD und also auch Bogen AG gleich dem Bogen BD und daher die Sehne AG gleich der Sehne BD. Zufolge der Congruenz der Dreiecke BCD, BCH ist aber $BD = BH$ und man erhält somit den Satz: Errichtet man in einem Endpunkte einer Seite eines Dreiecks auf derselben die Senkrechte bis zum umbeschriebenen Kreis, so ist diese Senkrechte gleich dem oberen Abschnitt der zu jener Seite gehörigen Höhe.

Sind ferner MP, MQ vom Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises bezüglich zu den Seiten AB, AC, senkrecht gefällt, so ist das Dreieck MPQ dem Dreieck BCH ähnlich und daher

$$MQ : BH = PQ : BC = AP : AB = 1 : 2.$$

Der obere Abschnitt einer jeden Höhe eines Dreiecks ist also doppelt so gross als der Abstand des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises von der zugehörigen Grundlinie.

Da nun $MQ \parallel BH$ ist, so muss, wenn man M mit B und Q mit dem Halbirungspunkte L von BH verbindet, ein Parallelogramm $MBLQ$ entstehen und also $QL = MB = r$ sein. Die Verbindungslinie des Halbirungspunktes des oberen Abschnittes einer Höhe eines Dreiecks mit dem Halbirungspunkt der zugehörigen Seite ist also gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises.

Die drei auf diese Art möglichen Verbindungslinien sind mithin auch unter einander gleich.

Verbindet man die Halbirungspunkte L, N der oberen Abschnitte BH, CH zweier Höhen mit einander, so ist $LN : BC = HL : HB = 1 : 2$ oder $LN = \frac{1}{2}BC$. Ebenso ist $PQ = \frac{1}{2}BC$, also $PQ = LN$. Ferner ist $LN \parallel BC \parallel PQ$, daher ist $LNQP$ ein Parallelogramm und die Diagonalen NP, LQ desselben halbiren einander. Ebenso muss auch die dritte der vorher genannten Verbindungslinien die übrigen halbiren. Hieraus folgt, dass der gemeinschaftliche Halbirungspunkt dieser drei Verbindungslinien von den Mitten der drei Seiten und den Mitten der drei oberen Höhenabschnitte gleichweit entfernt ist. Zieht man durch denselben Punkt die Parallele zu AB, so muss dieselbe ebenso wie NP auch NC' halbiren, und da die Parallele auch zu NC' senkrecht ist, so ist jener Punkt auch von C' und in gleicher Weise von den Fusspunkten der beiden anderen Höhen ebensoweit wie von N entfernt. Man wird somit durch diese Entwicklung wieder auf den Kreis der neun Punkte geführt. Zugleich ergeben sich folgende Sätze:

Der Mittelpunkt des FEUERBACH'schen Kreises halbirt die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der oberen Höhenabschnitte mit dem jedesmal zugehörigen Halbirungspunkt einer Seite, und der Radius dieses Kreises ist halb so gross als der Radius des dem Urdreieck umbeschriebenen Kreises.

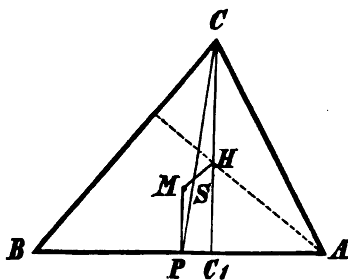
Da ferner MP gleich und parallel HN ist, so folgt leicht weiter, dass der Mittelpunkt des FEUERBACH'schen Kreises die Verbindungslinie des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises mit dem Durchschnittspunkt der Höhen halbirt.

Auch aus der Figur Seite 347 lässt sich leicht ableiten, dass, da $BG = GA$ und $BH = HA$ ist, GH als zur Seite AB senkrechte Gerade ein Durchmesser des dem dortigen Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises sein muss, u. s. w.

Aus $AP^2 = \frac{1}{4}c^2 = AM^2 - MP^2 = AM^2 - \frac{1}{4}CH^2$ folgt endlich der Satz:

Das Quadrat jeder Seite eines Dreiecks ist gleich der Differenz aus dem Quadrat des Durchmessers des umbeschriebenen Kreises und dem Quadrat des oberen Abschnitts der zu der Seite gehörigen Höhe.

5. Zieht man im Dreieck ABC eine Höhe CC', fällt vom Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises die Senkrechte MP auf die zu der Höhe gehörige Seite, verbindet C mit dem Halbirungspunkt P dieser Seite AB und zieht die Verbindungslinie von M und dem Durchnittspunkt H der Höhen, welche CP in einem Punkte S schneiden muss, so ist, da MP parallel zu CH ist, $CS : SP = CH : MP$. Nun ist vorher gezeigt worden, dass $MP = \frac{1}{2}CH$ ist, daher ist auch $CS : PS = 2 : 1$. Der Punkt S ist hiernach der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Umgekehrt folgt hieraus der Satz:



Der Durchschnittspunkt der Höhen, der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und der Schwerpunkt eines jeden Dreiecks liegen in gerader Linie, und es theilt der Schwerpunkt den Abstand der beiden anderen Punkte im Verhältniss 2 : 1, so dass der grössere Abschnitt dem Durchschnittspunkt der Höhen anliegt. (EULER'scher Satz.)

Die drei Punkte M, S, H stehen also in solcher Beziehung zu einander, dass durch die Lage je zweier derselben der dritte bestimmt ist.

Ueber den Schwerpunkt eines Dreiecks möge als besonders bemerkenswerth noch der folgende Satz hier eine Stelle finden:

Zieht man durch die drei Eckpunkte A, B, C und durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks unter sich parallele Gerade bis zu einer ausserhalb des Dreiecks liegenden Geraden, so ist die von S ausgehende gleich dem arithmetischen Mittel (d. i. dem dritten Theile der Summe) der drei anderen. — Zum Beweise ziehe man ausser den angegebenen Parallelen AA_1, BB_1, CC_1 und SS_1 noch die zugehörige Parallele DD_1 durch den Halbirungspunkt D einer Seite AC, dann erhält man, wenn man noch durch B die Parallele zu B_1D_1 bis zum Durchschnitt mit DD_1 zieht, leicht

$$\frac{SS_1 - BB_1}{DD_1 - BB_1} = \frac{BS}{BD} = \frac{2}{3}, \text{ also}$$

$$3SS_1 - 3BB_1 = 2DD_1 - 2BB_1 \text{ oder } 3SS_1 = 2DD_1 + BB_1.$$

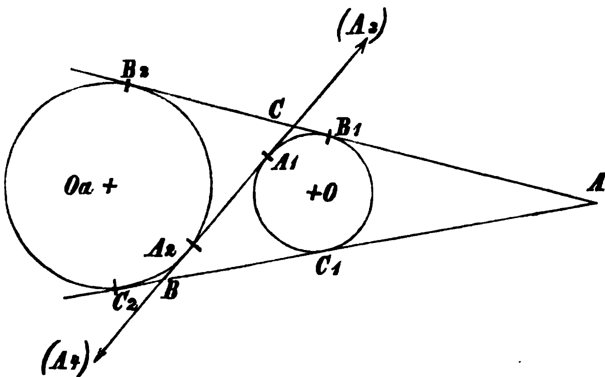
Da aber DD_1 die Mittellinie des Trapezes ACC_1A_1 ist, so hat man $2DD_1 = AA_1 + CC_1$ und substituirt man dies in die vorige Gleichung, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung.

Schneidet die Gerade A_1B_1 das Dreieck ABC, so liegt entweder einer der Eckpunkte, oder es liegen zwei derselben mit S auf verschiedenen Seiten der Geraden, die von ihnen aus gezogenen Parallelen laufen daher nach entgegengesetzter Richtung mit der von S aus gezogenen. Man überzeugt sich leicht, indem man zu der Geraden A_1B_1 irgend eine Parallele ausserhalb des Dreiecks zieht, mit Anwendung der vorher bewiesenen Behauptung und des Abstandes der beiden

Geraden, dass der vorstehende Satz auch für jede das Dreieck ABC schneidende Gerade gelten muss, sofern man die Parallelen von den mit S auf verschiedener Seite der Geraden liegenden Eckpunkten als negative Grössen behandelt. Es ist also allgemein die vom Schwerpunkt aus gezogene Parallele gleich dem dritten Theil der algebraischen Summe der von den Eckpunkten aus gezogenen Parallelen.

Für jede durch den Schwerpunkt selbst gehende Gerade folgt hieraus insbesondere der Satz, dass die algebraische Summe je dreier nach ihr von den Eckpunkten aus gezogenen Parallelen gleich Null ist.

6. Sind A_1, B_1, C_1 die Berührungspunkte des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises O, welche bezüglich auf den Seiten BC, AC, AB liegen, so ist bekanntlich $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$ und $CA_1 = CB_1$. Daher ist $AB_1 = \frac{1}{2}(AB_1 + AC_1) = \frac{1}{2}[AC + AB - BC_1 - CB_1] = \frac{1}{2}[AC + AB - BC]$, oder nach der üblichen Bezeichnungsweise der Längen der drei Seiten, $AB_1 = AC_1 = \frac{1}{2}(b + c - a)$.



Setzt man $a + b + c = 2 \cdot s$, so erhält man

$$AB_1 = AC \ = s - a.$$

In gleicher Weise muss $BC_1 = BA_1 = s - b$, $CA_1 = CB_1 = s - c$ sein.

Sind entsprechend A_2, B_2, C_2 die Berührungspunkte des der Seite BC anbeschriebenen äusseren Berührungskreises O_a des Dreiecks, so ist in gleicher Weise

$$AB_2 = AC_2 = \tfrac{1}{2}(AB_2 + AC_2) = \tfrac{1}{2}(AC + AB + BC_2 + BC_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(AC + AB + BC) = \tfrac{1}{2}(a + b + c), \text{ oder}$$
$$AB_2 = AC_2 = s.$$

Daher ist $BC_2 = BA_2 = s - c$ und $CB_2 = CA_2 = s - b$.

Entsprechende Gleichungen gelten selbstverständlich für die durch die Berührungspunkte der beiden anderen äusseren Berührungskreise bestimmten Abschnitte der Seiten.

Aus den vorstehenden Resultaten folgt unmittelbar $BA_2 = CA_1$ nnd $BA_1 = CA_2$; die beiden auf derselben Seite liegenden inneren Berührungspunkte sind also vom Halbirungspunkt dieser Seite gleichweit entfernt. Ferner ist $A_1A_2 = BC - BA_2 - CA_1 = a - 2(s - c) = a - (a + b - c) = c - b$, d. h. der Abstand der genannten beiden Berührungspunkte von einander ist gleich der Differenz der beiden anderen Seiten.

Ferner ist $B_1B_2 = AB_2 - AB_1 = s - (s - a) = a$, und ebenso ist $C_1C_2 = a$, mithin auch $B_1B_2 = C_1C_2$. Die auf derselben Seite und deren Verlängerung liegenden Berührungspunkte des inneren und eines äusseren Berührungskreises haben also von einander einen Abstand, welcher gleich derjenigen Seite des Dreiecks ist, die von jenem äusseren Kreise in einem inneren Punkte berührt wird.

Sind also A_3, A_4 bezüglich die Berührungspunkte der den Seiten AC, AB

anbeschriebenen äusseren Berührungskreise auf den Verlängerungen von BC, so ist

$$BA_3 = CA_4 = s;\ BA_4 = CA_3 = s - a;\ A_1A_3 = A_2A_4 = b;\ A_1A_4 = A_2A_3 = c$$

und $A_3A_4 = c + b$, entsprechend $A_1A_2 = c - b$.

Zieht man die Berührungsradien OC_1, O_aC_2 und die Winkelhalbirende AOO_a, sowie die Parallele durch O zu C_2C_1 bis zu O_aC_2, so ist

$$OO_a^2 = (O_aC_2 - OC_1)^2 + C_2C_1^2 = (\rho_a - \rho)^2 + a^2.$$

Zieht man die Radien O_aA_2 und OA_1 und durch O die Parallele zu BC bis zur Verlängerung von O_aA_2, so erhält man

$$OO_a^2 = (O_aA_2 + A_1O)^2 + A_1A_2^2 = (\rho_a + \rho)^2 + (c - b)^2$$

Daher ist auch $(\rho_a - \rho)^2 + a^2 = (\rho_a + \rho)^2 + (c - b)^2$, woraus man durch Entwicklung

$$4\rho\rho_a = a^2 - (c - b)^2 = (a + b - c) \cdot (a - b + c) = 2(s - c) \cdot 2(s - b),$$

$$\text{also } \rho \cdot \rho_a = (s - b) \cdot (s - c) \quad (1)$$

erhält. Dieselbe Beziehung folgt als Proportion $\rho_a : (s - c) = (s - b) : \rho$ ohne Weiteres aus der Aehnlichkeit der Dreiecke O_aC_2B und OC_1B.

Aus dem Dreieck O_aC_2A mit der zu O_aC_2 parallelen Transversale OC_1 erhält man

$$O_aC_2 : OC_1 = AC_2 : AC_1 \text{ oder } \rho_a : \rho = s : (s - a), \text{ oder}$$

$$\rho s = \rho_a(s - a) = \rho_b(s - b) = \rho_c(s - c), \quad (2)$$

eine bereits bekannte Gleichung, deren Seiten den Flächeninhalt des Dreiecks ausdrücken.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Auflösung auf ρ und ρ_a die Werthe dieser Radien in Uebereinstimmung mit § 48 durch die drei Seiten ausgedrückt und dann mittelst derselben aus $\rho s = F$ wieder den bereits eben daselbst gefundenen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks.

Die vorstehenden Entwicklungen, welche sich noch weiter vermehren lassen, finden u. A. Anwendung zur Lösung vieler Constructions- und Rechnungs-Aufgaben.

Kapitel 7.

Einige Abschnitte aus der neueren (synthetischen) Geometrie.

§ 78. Harmonische Punkte und Strahlenbüschel.

1. Die Gesammtheit aller Punkte, welche in einer und derselben Geraden liegen, wird eine Punktreihe genannt, und diese Gerade heisst der Träger derselben. Die Gesammtheit aller Geraden einer Ebene, welche durch einen und denselben Punkt gehen, wird ein ebenes Strahlenbüschel genannt, und dieser Punkt heisst der Scheitel desselben. Jede einzelne Gerade eines Strahlenbüschels heisst ein Strahl; sie wird durch den Scheitel in zwei Halbstrahlen getheilt.

Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heissen nach § 37 insbesondere harmonische Punkte, und zwar A und B, sowie C und D einander zugeordnet, wenn die Strecke AB durch C und D in (entgegengesetzt) gleichem Verhältniss getheilt wird.

Vier Strahlen eines Strahlenbüschels heissen insbesondere „harmonische Strahlen", wenn sie eine Gerade in vier harmonischen Punkten derselben schneiden. Dabei heissen je zwei Strahlen, welche durch zwei einander zugeordnete dieser vier Punkte gehen, einander „zugeordnete" Strahlen.

Aus § 37 ist bekannt, dass wenn AB durch C und D harmonisch getheilt

wird, auch CD durch A und B harmonisch getheilt ist. Ebenso sind daselbst bereits folgende Sätze nachgewiesen worden: Zu jeder Strecke AB giebt es unzählig einander zugeordnete harmonische Theilpunkte C, D. Der äussere derselben D liegt auf der Verlängerung von AB über denjenigen Endpunkt, welcher dem inneren näher liegt als der andere, oder beide Theilpunkte liegen vom Halbirungspunkte M der Strecke AB aus nach derselben Richtung. Diesem Halbirungspunkte selbst ist der unendlich entfernte Punkt der Geraden zugeordnet. In jedem Endpunkt der Strecke AB fallen zwei einander zugeordnete harmonische Theilpunkte derselben zusammen. Bewegt sich der innere Theilpunkt C vom Halbirungspunkte M aus stetig bis nach B, so bewegt sich der äussere Theilpunkt D stetig aus dem Unendlichen bis nach B; die beiden Punkte bewegen sich also einander entgegen. — Endlich ist in § 37 eine Lösung der Aufgabe gegeben, eine gegebene Strecke nach einem gegebenen Verhältniss harmonisch zu theilen, bezw. zu einem gegebenen Theilpunkt einer Strecke den zugehörigen harmonischen Theilpunkt zu finden.

Die harmonische Theilung kann in noch anderer Weise aufgefasst werden. Ist nämlich $AC:BC = AD:BD$ und zieht man die drei von demselben Anfangspunkte A ausgehenden Strecken AC, AB, AD in Betracht, so ergiebt sich, indem man die Glieder jener Proportion durch diese letzteren Strecken ausdrückt,

$$AC:(AB - AC) = AD:(AD - AB)$$
$$\text{oder } AC:AD = (AB - AC):(AD - AB).$$

Es verhält sich also die erste dieser drei Strecken zur dritten, wie die Differenz der zweiten und ersten zur Differenz der dritten und zweiten.

Noch allgemeiner sagt man, dass vier Grössen a, b, c, d in harmonischer Proportion stehen, wenn sich die erste zur vierten verhält, wie die Differenz der beiden ersten zur Differenz der beiden anderen, wenn also

$$a:d = (b - a):(d - c),$$

wie dies beispielsweise bei den Zahlen 6, 8, 10, 15 der Fall ist. Sind dabei die zwei mittleren Grössen einander gleich, ist also

$$a:d = (b - a):(d - b),$$

so heisst die Proportion eine stetig harmonische und die mittlere Grösse b das harmonische Mittel zwischen den beiden anderen a, d. Durch Auflösung der Proportion auf b ergiebt sich leicht, dass dieses harmonische Mittel

$$b = \frac{2ad}{a + d}, \quad \text{oder dass} \quad \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d}$$

ist. So ist beispielsweise die Zahl 12 das harmonische Mittel zwischen 9 und 18.

Nach dieser Erklärung stehen also die obigen drei Strecken AC, AB, AD zu einander in stetiger harmonischer Proportion. Der Name der letzteren erklärt sich dadurch, dass die Verhältnisse der Schwingungszahlen dreier musikalischer Töne, deren Intervalle die Quarte, Quinte und Octave sind, nämlich 3 : 4 : 6, eine solche Proportion liefern.

Im Nachfolgenden wird von der vorstehenden Auffassung weiter kein Gebrauch gemacht, sondern die für geometrische Untersuchungen geeignetere vorher angegebene zu Grunde gelegt bleiben.

Sind A,B und C,D zwei Paare zugeordneter harmonischer Punkte, ist also

$$AC:BC = AD:BD,$$

so folgt unmittelbar

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD,$$

d. h. das Rechteck aus den beiden äusseren Abschnitten ist gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Abschnitt.

Ist umgekehrt, wenn vier Punkte, der Reihe nach A, C, B, D, auf einer Strecke liegen,

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD,$$

so sind A, B und C, D zugeordnete harmonische Punkte.

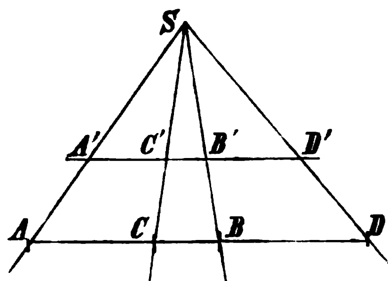
Ist ferner AB in M halbirt, und setzt man $AC = AM + CM$, $BC = AM - CM$, $AD = AM + MD$, $BD = MD - AM$, so ergiebt sich nach einigen leichten Umformungen

$$AM^2 = MC \cdot MD,$$

d. h. das Rechteck aus den Abständen des Halbirungspunktes einer Strecke von zwei einander zugeordneten harmonischen Theilpunkten derselben ist gleich dem Quadrat der Hälfte der Strecke.

Ist umgekehrt für den Halbirungspunkt M einer Strecke AB und zwei von M aus nach derselben Richtung der Geraden liegende Punkte C, D die Gleichung $AM^2 = MC \cdot MD$ richtig, so wird AB durch C und D harmonisch getheilt, denn in diesem Falle muss, wenn nicht ausnahmsweise $MC = MD = AM$ ist, eine der Strecken MC kleiner, die andere MD grösser als AM sein, und man kann aus der vorausgesetzten Gleichung in umgekehrtem Gang wie bei der vorhergehenden Entwicklung die andere $AC \cdot BD = BC \cdot AD$ ableiten.

Liegen dagegen C und D nicht nach derselben Richtung von M aus, so kann AB durch sie nicht harmonisch getheilt werden.



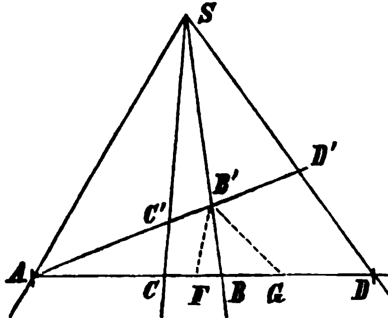
2. Es sei ferner S der Scheitel von vier Strahlen, welche durch je einen von vier harmonischen Punkten AB, CD gehen, und es werden dieselben Strahlen durch eine zweite Transversale bezüglich in den Punkten $A'B'$, $C'D'$ geschnitten, so sind folgende Fälle zu unterscheiden: a) $A'D'$ sei parallel zu AD. Dann ist, weil $A'C' : B'C' = AC : BC$ (denn $A'C' : AC = B'C' : BC$, weil beide Verhältnisse gleich $SC' : SC$ nach § 36,$_2$) und ebenso $A'D' : B'D' = AD : BD$, auch

$$A'C' : B'C' = A'D' : B'D'$$

Es falle ferner b) A' mit A zusammen. Zieht man dann die Linien $B'F \parallel C'C$ und $B'G \parallel D'D$ bis zum Durchschnitt mit AD, so ist

$CF : BC = SB' : SB$ und $GD : BD = SB' : SB$, daher auch $CF : BC = GD : BD$, oder

$$CF : GD = BC : BD.$$



Nun ist zufolge der Voraussetzung $BC : BD = AC : AD$, also auch $CF : AC = GD : AD$.

Ferner ist nach § 36,$_2$ $CF : AC = B'C' : AC'$ und $GD : AD = B'D' : AD'$,

woraus endlich wieder

$$AC' : B'C' = AD' : B'D'$$

folgt.

Ist endlich c) weder $A'D' \parallel AD$, noch A' mit A identisch, so ziehe man durch A' die Parallele zu AD und wende die vorstehenden Entwicklungen nach einander an. Man gelangt so zu dem allgemein gültigen Satz:

Vier harmonische Strahlen schneiden jede Transversale in vier

harmonischen Punkten, und zwar sind die auf zugeordneten Strahlen liegenden Punkte einander zugeordnet.

Zieht man insbesondere eine Transversale so, dass sie einem von vier harmonischen Strahlen parallel ist, liegt also der zugehörige Durchschnittspunkt im Unendlichen, so muss hiernach der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen Strahlen liegende Stück der Transversale halbiren, und wenn umgekehrt das zwischen zwei einander zugeordneten harmonischen Strahlen liegende Stück einer Transversale durch einen der übrigen Strahlen halbirt wird, so muss der vierte Strahl der Transversale parallel sein.

Hiernach ist es sehr leicht, vier harmonische Strahlen zu construiren, denn man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, die Endpunkte und den Halbirungspunkt einer Strecke mit einem ausserhalb der letzteren liegenden Punkte zu verbinden und durch diesen Punkt die Parallele zu der Strecke zu ziehen.

Im § 38 ist gezeigt worden, dass jede Winkelhalbirende eines Dreiecks und ebenso jede Halbirungslinie eines Aussenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der beiden anliegenden Seiten theilt. Hieraus geht hervor, dass jede zwei einander schneidenden Geraden mit den beiden Halbirungslinien der von ihnen gebildeten Winkel vier harmonische Strahlen bilden. Von diesen stehen zwei einander zugeordnete, nämlich die beiden Winkelhalbirenden, zu einander senkrecht. Umgekehrt muss, wie sich leicht auf indirektem Wege beweisen lässt, wenn ein Winkel zweier zugeordneten von vier harmonischen Strahlen durch den dritten Strahl halbirt wird, der vierte zu diesem senkrecht stehen, und wenn zwei zugeordnete von vier harmonischen Strahlen zu einander senkrecht stehen, so halbiren sie die von den beiden anderen gebildeten Nebenwinkel. Um letzteres zu beweisen, ziehe man eine Transversale parallel zu dem einen und also senkrecht zu dem anderen von jenen beiden ersteren Strahlen, dann muss ein Dreieck entstehen, dessen Grundlinie durch die Höhe halbirt wird, u. s. w.

3. Durch Umkehrung des vorstehend in 2. bewiesenen Hauptsatzes gewinnt man den folgenden: Liegen auf zwei Geraden je vier harmonische Punkte AB, CD und $A'B'$, $C'D'$ so, dass drei der Geraden AA', BB', CC', DD' einander in einem und demselben Punkte S schneiden, so geht auch die vierte durch diesen Punkt. Der Beweis geschieht leicht indirekt, indem man S mit dem vierten Punkte D verbindet und zeigt, dass die Linie SD die Gerade $A'D'$ in keinem von D' verschiedenen Punkte treffen kann.

Der Punkt S kann selbstverständlich hierbei auch im Unendlichen liegen, d. h. jene vier Geraden sind dann sämmtlich einander parallel.

Gehen insbesondere zwei harmonisch getheilte Strecken AB, AB' von demselben Endpunkt A aus, so müssen sich die drei Geraden, welche je zwei entsprechende der übrigen Punkte verbinden, stets in einem und demselben (endlich oder unendlich entfernten) Punkte schneiden.

Sind ferner von zwei verschiedenen Punkten S, S' aus durch drei beliebige in gerader Linie liegende Punkte A, B, C Strahlen gezogen, so schneiden die zu je zwei durch denselben Punkt gehenden Strahlen zugeordneten harmonischen Strahlen einander ebenfalls in einem Punkte dieser Geraden (welcher selbstverständlich auch im Unendlichen liegen kann, d. h. die beiden zugeordneten Strahlen können auch der Geraden parallel sein).

Der Beweis dieses Satzes wird ebenfalls leicht indirekt geführt.

Die im Vorhergehenden entwickelten Sätze über harmonische Strahlen führen zu leichten Auflösungen folgender Aufgaben:

1) Zu einem gegebenen Theilpunkt einer Strecke AB den zugeordneten harmonischen Theilpunkt zu finden.

Man ziehe von einem beliebigen Punkte S ausserhalb der Geraden AB die Strahlen durch die Endpunkte A, B und den gegebenen Theilpunkt. Ist letzterer der innere C, so ziehe man zwischen SA und SB eine Strecke so, dass sie durch SC halbirt wird, und dann zu dieser Strecke durch S den parallelen Strahl. Letzterer trifft die Verlängerung von AB im gesuchten Theilpunkte D. Oder man ziehe zwischen SC und SB eine Parallele EF zu AS, verlängere EF um $FG = EF$ und ziehe durch G den Strahl SD. Ist dagegen der gegebene Theilpunkt der äussere D, so ziehe man zwischen SD und SB eine Parallele GF zu SA, verlängere dieselbe um $FE = GF$ und ziehe durch E den Strahl SC. Noch andere Abänderungen dieser Construction sind hiernach leicht zu finden.

2) Zu einem von drei gegebenen Strahlen den zugeordneten harmonischen Strahl zu construiren. — Man ziehe durch einen beliebigen Punkt jenes Strahls die Parallele zu einem der beiden anderen, verlängere sie über ihren Durchschnittspunkt mit dem zweiten um ihre eigene Länge und ziehe durch den Endpunkt der Verlängerung den verlangten Strahl. — Man kann auch hierbei verschiedene Fälle unterscheiden.

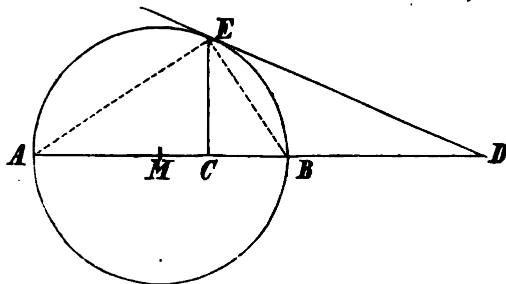
3) Den Scheitel von vier harmonischen Strahlen zu construiren, wenn ein Strahl und für jeden der drei übrigen ein Punkt gegeben ist, durch welchen derselbe gehen soll. — Man ziehe durch zwei der gegebenen Punkte die Gerade, suche zum Durchschnittspunkt dieser Geraden mit dem gegebenen Strahl einen vierten harmonischen Punkt, verbinde diesen mit dem vierten gegebenen Punkt und bestimme den Durchschnittspunkt der Verbindungslinie mit dem gegebenen Strahl. — Liegen die gegebenen Punkte in einer Geraden, und bilden sie mit dem Durchschnittspunkt dieser Geraden und des gegebenen Strahls vier harmonische Punkte, so ist die Aufgabe unbestimmt; ist Letzteres nicht der Fall, so fallen drei Strahlen in die Verbindungsgerade zusammen.

4) Von vier harmonischen Punkten sei einer, und für jeden der übrigen sei eine Gerade gegeben, auf welcher er liegen soll; man construire die übrigen Punkte. — Man suche zu zwei der gegebenen Geraden und der Verbindungslinie ihres Durchschnittspunkts mit dem gegebenen Punkte A einen vierten harmonischen Strahl, der die dritte gegebene Gerade in einem Punkte D schneide, ziehe AD und bestimme die Durchschnittspunkte B, C dieser Linie mit den beiden anderen gegebenen Geraden. — Wenn die drei gegebenen Linien durch denselben Punkt S gehen, so müssen sie mit SA vier harmonische Strahlen bilden, und die Aufgabe ist dann unbestimmt, oder es fallen die drei gesuchten Punkte in S zusammen.

4. Die bisher entwickelten Sätze über harmonische Punkte und Strahlenbüschel bieten ein bemerkenswerthes Hülfsmittel zur Auffindung weiterer Lehrsätze, wovon im Folgenden einige Beispiele gegeben werden sollen.

Zieht man von einem beliebigen Punkte D auf der Verlängerung eines Durchmessers AB eines Kreises eine Tangente DE an letzteren und fällt vom Berührungspunkt E die Senkrechte EC auf den Durchmesser, so wird letzterer durch den Fusspunkt C dieser Senkrechten und durch jenen Punkt D harmonisch getheilt, denn zieht man noch

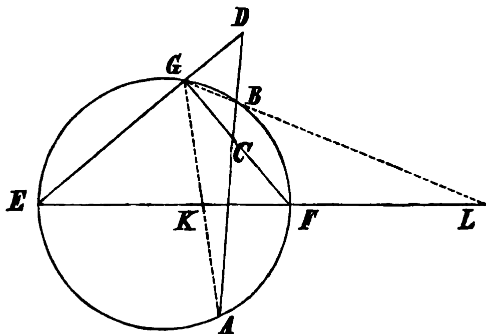
EA und *EB*, so ist $\angle BED = \angle EAB$ (§ 29 (1)), sowie $\angle EAB = \angle CEB$ (denn $AEB = R$). Da also *FB* den Winkel *CED* halbirt, *EA* aber auf *EB* senkrecht steht, so bilden *EA*, *EB*, *EC*, *ED* vier harmonische Strahlen, die somit die Transversale *AD* in vier harmonischen Punkten schneiden müssen. Derselbe Satz kann auch dadurch bewiesen werden, dass im rechtwinkeligen Dreieck *MED*, wenn *M* den Mittelpunkt des Kreises bedeutet, $ME^2 = MC \cdot MD$, also auch $AM^2 = MC \cdot MD$ ist.



Zieht man von *D* die beiden Tangenten an den Kreis *M*, so ist *EC* die Hälfte derjenigen Sehne, welche die beiden Berührungspunkte verbindet. Man kann daher auch sagen, dass jeder Durchmesser eines Kreises durch einen beliebigen Punkt auf seiner Verlängerung und durch seinen Durchschnittspunkt mit der zu diesem Punkte gehörigen Berührungssehne harmonisch getheilt werde.

Dieser Satz bietet ein weiteres Mittel zur Lösung der Aufgabe, zu einem gegebenen Punkt einer Strecke den zugehörigen harmonischen Theilpunkt zu finden. Die Ausführung für die beiden Fälle, je nachdem *C* oder *D* der gegebene Punkt ist, kann dem Leser überlassen bleiben.

Es sei ferner *AB* eine beliebige Sehne eines Kreises *M* und *EF* der zu *AB* senkrechte Durchmesser. Es wird behauptet, dass je zwei Gerade, welche durch einen beliebigen Punkt *G* des Kreises und je einen der Punkte *E*, *F* gezogen werden, die Sehne *AB* harmonisch theilen. Sind nämlich *C*, *D* die betreffenden Durchschnittspunkte und zieht man noch *GB* und *GA*, so sind die Strahlen *GF* und *GE* zu einander senkrecht und *GF* halbirt den Winkel der Strahlen *GB* und *GA*, denn die zu den Peripheriewinkeln *BGF*, *FGA* gehörigen Bogen *BF*, *FA* sind gleich, weil *EF* senkrecht zu *AB* steht. *GA*, *GB*, *GC* und *GD* sind also vier harmonische Strahlen, woraus die Behauptung folgt.



Entsprechend theilen die Verbindungslinien eines Punktes eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne (resp. die Verlängerung der einen) den zu dieser Sehne senkrechten Durchmesser harmonisch, denn dasselbe harmonische Strahlenbüschel wie vorher muss auch auf dem Durchmesser *EF* zu *E* und *F* zwei zugeordnete harmonische Theilpunkte bestimmen.

§ 79. Von den Transversalen, dem vollständigen Viereck und dem vollständigen Vierseit.

1. Wir gehen im Folgenden von den bereits in § 38 und § 39 entwickelten Sätzen des Ceva und des Menelaos und deren Umkehrungen aus, welche letzter

wie folgt zusammengefasst werden können: Ist auf jeder Seite BC, AC, AB, eines Dreiecks ABC, bez. der Verlängerung derselben ein Punkt A', B', C' so angenommen, dass das Produkt aus drei nicht aneinander liegenden Seitenabschnitten gleich dem Produkt der drei anderen, dass also $AB' \cdot CA' \cdot BC' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$ ist, so liegen entweder die drei Theilpunkte in gerader Linie oder es schneiden die durch diese Punkte gehenden drei Ecktransversalen einander in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte. Das Erstere findet statt, wenn die Anzahl der auf Verlängerungen liegenden Theilpunkte eine ungerade, das letztere wenn diese Anzahl eine gerade ist.

Zieht man nun durch irgend einen Punkt O innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks ABC die drei Ecktransversalen AA', BB', CC' und legt durch zwei Fusspunkte A', B' derselben die Transversale, welche die dritte Seite AB oder deren Verlängerung in D schneide, so ist sowol nach § 38 (4):

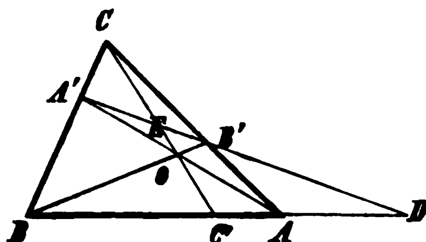
$$AB' \cdot CA' \cdot BC' = AC' \cdot BA' \cdot CB',$$

als nach § 39, (1): $$AB' \cdot CA' \cdot BD = AD \cdot BA' \cdot CB'.$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen, am einfachsten mittelst Division, erhält man

$$BC' : BD = AC' : AD,$$

d. h. A, B und C', D sind zwei Paare einander zugeordneter harmonischer Punkte.



Selbstverständlich gilt derselbe Satz, wenn man zuerst die beliebige Transversale $A'B'D$ durch die drei Seiten, darauf die Ecktransversalen AA', BB', die einander in O schneiden, und zuletzt die Ecktransversale CC' durch O zieht.

Als ein besonderer Fall dieses Satzes kann der folgende aufgestellt werden: Zieht man zu einer Seite AB eines Dreiecks eine parallele Transversale $B'A'$ und sodann die durch B' und A' gehenden Ecktransversalen, so schneiden sich die letzteren in einem Punkte O der zur Seite AB gehörigen Mittellinie CC_1.

Bestimmt man umgekehrt zu dem Fusspunkt einer von drei durch denselben Punkt gehenden Ecktransversalen den zugeordneten harmonischen Theilpunkt der betreffenden Seite des Dreiecks, so liegt letzterer mit den Fusspunkten der beiden anderen Ecktransversalen in gerader Linie, und bestimmt man zu einem der Punkte, in welchen eine Transversale eines Dreiecks eine Seite schneidet, den zugeordneten harmonischen Theilpunkt dieser Seite, so schneidet die durch letzteren Punkt gehende Ecktransversale die nach den Durchschnittspunkten auf den beiden anderen Seiten gehenden Ecktransversalen in demselben Punkte. — Beweise leicht.

Der obige Satz liefert ein neues bequemes Mittel, um zu einem auf einer Strecke gegebenen Punkt den zugeordneten harmonischen Theilpunkt zu finden, und zwar ohne Anwendung des Zirkels, also bloss mit Hülfe des Lineals. Ist z. B. C' auf AB gegeben, so construire man über AB ein beliebiges Dreieck ABC, ziehe CC' und durch einen beliebigen Punkt O von CC' die Ecktransversalen BB', AA'. Die durch A' und B' gehende Gerade liefert dann auf BA den gesuchten Punkt.

Daraus, dass B, A und C', D vier harmonische Punkte sind, folgt ferner,

dass OB, OA und OC', OD vier harmonische Strahlen sind, und diese müssen somit auch auf den Transversalen $A'D$ und CC' je vier harmonische Punkte bestimmen. Es ist also, wenn E den Durchschnittspunkt dieser beiden letzteren Transversalen bezeichnet, auch

$$A'E : B'E = A'D : B'D$$

und hieraus folgt wieder, dass auch BA', BB' und BE, BD vier harmonische Strahlen sind, welche mithin auch auf CC' vier harmonische Punkte bestimmen, oder es ist

$$CE : OE = CC' : OC'.$$

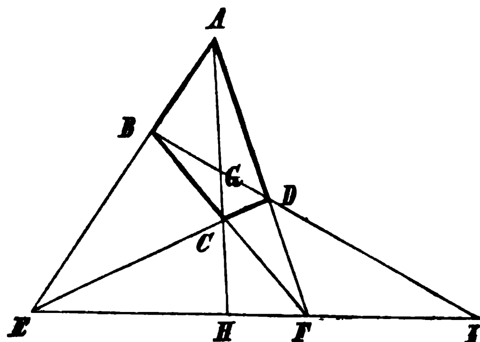
Die durch A' und B' gelegte Transversale bestimmt also nicht nur, wie vorher gezeigt, auf der dritten Seite, sondern auch auf der dritten Ecktransversale zu den vorher vorhandenen drei Punkten den vierten harmonischen Punkt und wird selbst in E und D harmonisch getheilt.

Diese Behauptung gilt selbstverständlich in entsprechender Weise für die durch A' und C' und für die durch B' und C' gehende Transversale. Jede der Verbindungslinien von A', B' und C' wird also durch die betreffende dritte Ecktransversale und die dritte Seite harmonisch getheilt.

Ist $A'B'$ parallel zu BA, also CC' eine Mittellinie des Dreiecks ABC, so werden auf dieser selbstverständlich ebenfalls durch die gedachte Construction vier harmonische Punkte bestimmt. Ist insbesondere O der Schwerpunkt des Dreiecks, so hat man den Satz: Der Schwerpunkt eines Dreiecks und der Durchschnittspunkt einer Mittellinie desselben mit der Verbindungslinie der Halbirungspunkte der zwei anliegenden Seiten bilden mit den Endpunkten jener Mittellinie vier harmonische Punkte.

2. Die vier Punkte $A'OB'C$ der vorhergehenden Figur bilden die Eckpunkte eines Vierecks, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt B oder A verlängert, und in welchem ausserdem die Diagonalen CO, $A'B'$ gezogen sind.

Man nennt ein System von vier Punkten A', O, B', C mit sämmtlichen durch je zwei derselben bestimmten Geraden: $A'C$, $A'O$, $A'B'$, CO, CB', $B'O$ ein vollständiges Viereck, diese Geraden seine Seiten, jene vier Punkte seine Eckpunkte und die drei anderen Durchschnittspunkte der Seiten A, B und E seine Diagonalpunkte. Entsprechend nennt man ein System von vier Geraden, von denen jede die folgende schneidet, mit sämmtlichen Durchschnittspunkten dieser Geraden ein vollständiges Vierseit. Die sechs Durchschnittspunkte heissen die Eckpunkte desselben, die vier Geraden seine Seiten, und die drei übrigen Verbindungsgeraden je zweier Eckpunkte seine Diagonallinien.



Die obige Figur kann hiernach sowol als ein vollständiges Viereck, wie als ein vollständiges Vierseit aufgefasst werden, und die vorher bewiesenen Eigenschaften derselben lassen sich zu Lehrsätzen über beide verwenden.

Ist also $ABCDEF$ ein vollständiges Vierseit, so hat man, indem man AEF

als ein Dreieck mit den durch C gehenden Ecktransversalen AH, ED, FB auffasst, durch die vorhergegangenen Entwicklungen den Satz: **In jedem vollständigen Vierseit theilen die Diagonalen einander harmonisch**, oder es ist

$$AG : CG = AH : CH,$$
$$BG : DG = BI : DI,$$
$$EH : FH = EI : FI.$$

Hieraus ergiebt sich ferner ohne Weiteres:

In jedem vollständigen Viereck sind die Diagonalpunkte die Scheitel harmonischer Büschel, deren zugeordnete Strahlenpaare zwei Seiten und zwei Verbindungslinien der Diagonalpunkte sind. So ist im vollständigen Viereck $ABCD$, dessen Seiten AB, BC, CD, AD, AC und BD sind, der Diagonalpunkt G Scheitel zu den vier harmonischen Strahlen GE, GC, GF, GD, ebenso E Scheitel zu den Strahlen EA, EG, EC, EF und F Scheitel zu den Strahlen FA, FG, FC, FE. Hieraus folgt weiter, dass wenn man in einem vollständigen Viereck die Diagonalpunkte E, F, G unter einander verbindet und die Verbindungslinien bis zu den Seiten verlängert, jede der so entstandenen Linien wieder vier harmonische Punkte enthält, sowie dass, wenn man in einem vollständigen Vierseit einen Eckpunkt und einen Diagonalschnittpunkt verbindet, dadurch auf jeder der gegenüberliegenden Seiten ein vierter harmonischer Punkt bestimmt wird.

Man versteht überhaupt unter einem **vollständigen** n-**Eck** ein System von n Punkten mit ihren sämmtlichen Verbindungslinien. Ein solches wird also erhalten, wenn man ein einfaches n-Eck mit seinen sämmtlichen Diagonalen construirt. — Unter einem **vollständigen** n-**Seit** versteht man ein System von n Geraden mit ihren sämmtlichen Durchschnittspunkten. Wie ein **einfaches** n-**Eck** erhalten wird, wenn man einen von n Punkten einer Ebene mit einem zweiten, diesen mit einem dritten u. s. w. und zuletzt den $n$ten wieder mit dem ersten durch je eine Gerade verbindet, so erhält man ein **einfaches** n-**Seit**, wenn man eine Gerade einer Ebene von einer zweiten, diese von einer dritten u. s. w. und zuletzt die $n$te wieder von der ersten schneiden lässt. Man erhält also ein vollständiges n-Seit, wenn man ein einfaches n-Seit mit sämmtlichen Schnittpunkten seiner Seiten construirt.

Jedes einfache n-Seit hat, wie jedes einfache n-Eck, n Seiten und n Eckpunkte. Jedes vollständige n-Seit hat n Seiten, aber $\frac{n(n-1)}{2}$ Eckpunkte (von denen einzelne im Unendlichen liegen können), denn n gerade Linien lassen sich auf so viele Arten zu je zweien verbinden. Ausserdem hat das vollständige n-Seit noch $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ Diagonalen, d. h. Verbindungslinien zweier Eckpunkte, welche keine Seiten sind. Ebenso hat jedes vollständige n-Eck n Eckpunkte, aber $\frac{n(n-1)}{2}$ Seiten und ausserdem $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ Diagonalpunkte, d. h. Durchschnittspunkte zweier Seiten, die keine Eckpunkte sind.

Bei den Dreiecken und Dreiseiten fallen diese Begriffe, sowie die Unterschiede der vollständigen und einfachen Figuren zusammen.

3. Im Nachstehenden sollen noch einige weitere bemerkenswerthe Anwendungen der Sätze des Ceva und Menelaos oder deren Umkehrungen zusammengestellt werden.

Halbirt man zwei Winkel eines Dreiecks und den am dritten Eckpunkt liegenden Aussenwinkel, so liegen die drei Durchschnittspunkte je einer Winkelhalbirenden und der gegenüberliegenden Seite in gerader Linie, denn halbiren AA', BB', CC'' bezüglich die Winkel an A, B und den Aussenwinkel an C, so ist

$$AB' : CB' = c : a,$$
$$CA' : BA' = b : c,$$
$$BC'' : AC'' = a : b.$$

Durch Multiplication erhält man hieraus

$$AB' \cdot CA' \cdot BC'' = CB' \cdot BA' \cdot AC'',$$

womit, da A' und B' auf den betreffenden Seiten selbst liegen und C'' auf der Verlängerung von AB liegen muss, die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen ist. — Kürzer geschieht dies durch Benutzung eines vorher unter 2. abgeleiteten Satzes, da bekanntlich C'' und der Fusspunkt C' der dritten inneren Winkelhalbirenden harmonische Theilpunkte der betreffenden Seite sind.

In entsprechender Weise erhält man den Satz: Die Durchschnittspunkte der Halbirungslinien der drei Aussenwinkel eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten liegen in einer geraden Linie.

Es sei P ein beliebiger Punkt des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises und PC_1, PB_1, PA_1 seien bezüglich senkrecht zu AB, AC, BC. Zieht man noch PC und PB, so ist $\angle\, PCA = PBA$, daher $\triangle\, PCB_1 \sim \triangle\, PBC_1$ folglich

$$CB_1 : PB_1 = BC_1 : PC_1.$$

In entsprechender Weise erhält man

$$BA : PA_1 = AB_1 : PB_1$$
$$\text{und } AC_1 : PC_1 = CA_1 : PA_1.$$

Daher ist auch

$$CB_1 \cdot BA_1 \cdot AC_1 : PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1 = BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1 : PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1,$$
$$\text{also } CB_1 \cdot BA_1 \cdot AC_1 = BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1.$$

Da ferner $\angle\, APC = 2\,R - \beta = \angle\, A_1PC_1$ und $\angle\, C_1PB_1 = \alpha = \angle\, BPC$, so lässt sich beweisen, dass stets einer der Punkte A_1, B_1, C_1 auf einer Verlängerung einer Seite liegen muss, während die beiden anderen auf den Seiten selbst liegen. Daher ergiebt sich der Satz: Die Fusspunkte der von einem beliebigen Punkte des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises auf die Seiten gefällten Senkrechten liegen in gerader Linie.

Gehen die drei geraden Linien AA_1, BB_1, CC_1, welche die Eckpunkte zweier Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ paarweise verbinden, durch einen und denselben Punkt O — in welchem Falle man sagt, dass diese Dreiecke perspectivisch liegen — so ergiebt, wenn man die Durchschnittspunkte A_2, B_2, C_2 je zweier einander entsprechender Seiten BC, und B_1C_1, AC und A_1C_1, AB und A_1B_1 bestimmt, das Dreieck OA_1B_1 mit der Transversale AB:

$$OB \cdot AA_1 \cdot B_1C_2 = OA \cdot BB_1 \cdot A_1C_2,$$

ebenso das Dreieck OB_1C_1 mit der Transversale BC:

$$OC \cdot BB_1 \cdot C_1A_2 = OB \cdot CC_1 \cdot B_1A_2,$$

und das Dreieck OC_1A_1 mit der Transversale CA

$$OA \cdot CC_1 \cdot A_1B_2 = OC \cdot AA_1 \cdot C_1B_2.$$

Durch die Verbindung dieser drei Gleichungen mittelst Multiplication erhält man leicht

$$B_1C_2 \cdot C_1A_2 \cdot A_1B_2 = C_1B_2 \cdot B_1A_2 \cdot A_1C_2,$$

und da die Faktoren dieser letzteren Gleichung Seitenabschnitte des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind, so folgt dass die drei Durchschnittspunkte je zweier einander entsprechender Seiten von zwei perspectivisch liegenden Dreiecken in gerader Linie liegen.

Dieser Satz bietet ein Mittel, um auf einer Geraden A_2B_2 oder deren Verlängerung einen Punkt C_2 zu bestimmen, wenn dies in Folge eines Hindernisses

nicht direkt geschehen kann, und zwar bloss mit Hülfe des Lineals (auf dem Felde also durch blosses Visiren). Die Ausführung kann als leicht ersichtlich dem Leser überlassen bleiben.

Zieht man durch die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks die Tangenten AA_1, BB_1, CC_1 an den dem Dreieck umbeschriebenen Kreis, und seien A_1, B_1, C_1 bezüglich die Durchschnittspunkte derselben mit den Verlängerungen der gegenüberliegenden Seiten, so sind die Dreiecke A_1BA und A_1CA einander ähnlich; daher ist $CA_1 : CA = AA_1 : BA$ und $BA_1 : BA = AA_1 : CA$, oder

$$CA_1 = \frac{CA \cdot AA_1}{BA}; \; BA_1 = \frac{BA \cdot AA_1}{CA}.$$

Man hat ebenso noch zwei Paare ähnlicher Dreiecke in der Figur und erhält daraus

$$AB_1 = \frac{AB \cdot BB_1}{CB}; \; CB_1 = \frac{CB \cdot BB_1}{AB}$$

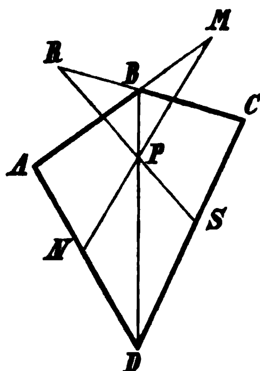
und

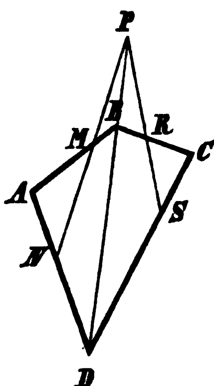
$$BC_1 = \frac{BC \cdot CC_1}{AC}; \; AC_1 = \frac{AC \cdot CC_1}{BC}$$

Verbindet man die ersten Gleichungen dieser drei Paare und ebenso die zweiten Gleichungen durch Multiplication und vergleicht die Resultate, so folgt

$$CA_1 \cdot AB_1 \cdot BC_1 = BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1$$

und daher der Satz: Die Durchschnittspunkte der durch die Eckpunkte eines Dreiecks gehenden Tangenten des umbeschriebenen Kreises mit den gegenüberliegenden Seiten liegen in gerader Linie.





Zieht man von einem Punkte P auf einer Diagonale eines Vierecks $ABCD$ (oder deren Verlängerung) eine Transversale durch jedes der beiden Dreiecke, in welche die Diagonale das Viereck theilt, so erhält man auf jeder Seite des letzteren zwei Abschnitte, und es folgt aus $BM \cdot AN \cdot DP = AM \cdot DN \cdot BP$ und $DS \cdot CR \cdot BP = BR \cdot CS \cdot DP$ mittelst Multiplication

$$BM \cdot AN \cdot DS \cdot CR = AM \cdot DN \cdot BR \cdot CS,$$

d. h. die Produkte aus je vier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten des Vierecks sind gleich gross.

Dieser Satz gilt auch für Vierecke, in denen zwei gegenüberliegende Seiten einander schneiden. Der Beweis bleibt hierbei ebenfalls derselbe.

Schneiden umgekehrt zwei Transversalen die Seiten eines Vierecks so, dass die Produkte aus je vier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten gleich gross sind, wobei die von je einer Transversale gebildeten Abschnitte auf zwei aneinanderliegenden, aber nicht in einer bestimmten Diagonale aneinanderstossenden Seiten liegen, so treffen sich die Transversalen in einem und demselben Punkte dieser Diagonale oder ihrer Verlängerung, denn ist $BM \cdot AN \cdot DS \cdot CR = AM \cdot DN \cdot BR \cdot CS$, und ginge SR nicht durch den Durchschnittspunkt P der Transversale NM und der Diagonale DB, so könnte man durch

P und R eine Transversale legen, welche CD in einem Punkte S' schneiden würde, und es wäre dann zufolge des vorigen Satzes

$$BM \cdot AN \cdot DS' \cdot CR = AM \cdot DN \cdot BR \cdot CS'.$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorausgesetzten mittelst Division erhält man

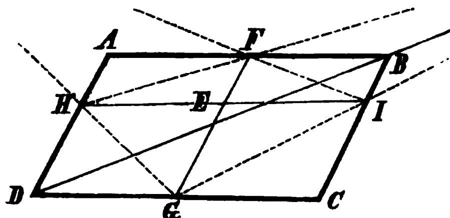
$$DS : DS' = CS : CS',$$

und hieraus geht hervor, dass S' nicht von S verschieden sein kann.

Als unmittelbare Anwendungen der vorstehenden Sätze erscheinen die folgenden:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P auf einer Diagonale BD eines Vierecks oder auf deren Verlängerung zwei Transversalen durch das Viereck, so dass die eine derselben zwei aneinanderliegende, aber nicht in einem Endpunkt jener Diagonale aneinanderstossende Seiten AB, AD bezüglich in M und N, die andere Transversale die beiden anderen Seiten bezüglich in R und S trifft, so schneiden die Verbindungslinien MR, NS der beiden anderen Paare aneinanderliegender Theilpunkte stets die andere Diagonale AC oder deren Verlängerung in einem und demselben Punkte.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt E innerhalb eines Parallelogramms die Parallelen FG, HI zu den Seiten AD, AB und in jedem der vier entstehenden kleineren Parallelogramme diejenige Diagonale, welche nicht durch E geht, so schneiden sich diese Diagonalen paarweise auf den Verlängerungen der Diagonalen des ursprünglichen Parallelogramms.



Der Beweis hierfür ergiebt sich daraus, dass $AF = DG$, $DH = CI$ u. s. w., also auch

$$AH \cdot DG \cdot CI \cdot BF = AF \cdot BI \cdot CG \cdot DH$$

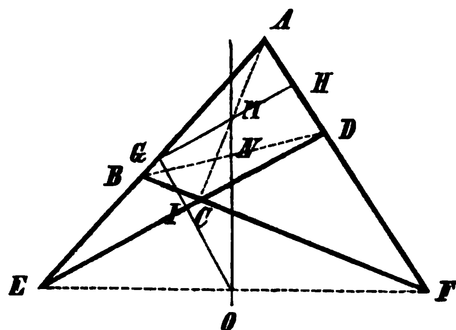
ist. — Liegt E auf einer Diagonale AC des Parallelogramms $ABCD$, in welchem Fall bekanntlich die kleineren Parallelogramme $FEIB$, $HEGD$ gleich gross sind, so sind die Diagonalen der beiden anderen, ungleichen kleineren Parallelogramme der betreffenden Diagonale des ganzen parallel.

Nimmt man auf drei Strahlen eines Büschels P beliebige Abschnitte MN, BD, RS an und verbindet die Endpunkte derselben paarweise, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Linienpaare (O, A, C) in einer geraden Linie. — Vergl. die Figur auf Seite 362.

Liegt hierbei der Punkt P im Unendlichen, so erhält man als besonderen Fall dieses Satzes den folgenden: Wenn man die Endpunkte dreier paralleler Strecken paarweise verbindet, so liegen die drei Durchschnittspunkte der Verbindungslinien stets in einer einzigen Geraden.

Wir fügen endlich den vorstehenden Sätzen noch den folgenden hinzu: Die Halbirungspunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in gerader Linie.

Ist nämlich im vollständigen Vierseit $ABCDEF$ der Punkt M die Mitte der Diagonale AC, ebenso N die Mitte von BD und O die Mitte von EF und zieht man durch M die Parallele GH zu ED, welche AE in G und AD in H halbiren muss, ferner durch G die Parallele zu AD, welche ED in I halbiren und EF in ihrem Halbirungspunkt O treffen muss, so muss IH durch N gehen,



da I, N, H die Halbirungspunkte der drei Strahlen DE, DB, DA sind. Betrachtet man nun BF als Transversale des Dreiecks AED, so ist

$$AB \cdot EC \cdot DF = AF \cdot DC \cdot EB.$$

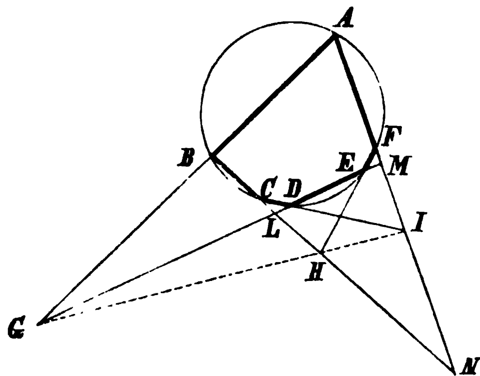
Setzt man hier $AB = 2 \cdot HN$, $EC = 2 \cdot GM$, $DF = 2 \cdot IO$ u. s. w., so erhält man

$$HN \cdot GM \cdot IO = GO \cdot HM \cdot IN,$$

und da M, N, O Theilpunkte der Seiten des Dreiecks GHI sind, so ergiebt sich hieraus, dass dieselben in gerader Linie liegen müssen.

4. In einem einfachen Sechseck $ABCDEF$ heissen A und D, B und E, C und F einander gegenüberliegende Eckpunkte und AB und DE, BC und EF, CD und AF einander gegenüberliegende Seiten..

Lässt sich um ein einfaches Sechseck ein Kreis beschreiben, so liegen die drei Durchschnittspunkte je zweier einander gegenüberliegender Seiten in gerader Linie.



Zum Beweise dieses Satzes, welcher der PASCAL'sche Satz genannt wird, verlängere man in dem Sechseck $ABCDEF$ drei nicht aneinanderstossende Seiten BC, DE, FA, so dass sie ein Dreieck LMN bilden. Dann folgt aus dem Satze von der Potenz des Kreises

$$LC \cdot LB = LD \cdot LE,$$
$$MD \cdot ME = MF \cdot MA,$$
$$NF \cdot NA = NB \cdot NC,$$

und indem man, wenn G, H, I bezw die Durchschnittspunkte von AB und DE, BC und EF, CD und AF sind, das Dreieck LMN der Reihe nach mit den Transversalen CD, EF und AB verbindet,

$$LD \cdot MI \cdot NC = LC \cdot NI \cdot MD,$$
$$LE \cdot MF \cdot NH = LH \cdot NF \cdot ME,$$
$$MA \cdot LG \cdot NB = MG \cdot LB \cdot NA.$$

Multiplicirt man die gleichstelligen Seiten dieser sechs Gleichungen mit einander und streicht in der entstehenden Gleichung die gleichen Faktoren auf beiden Seiten, so erhält man

$$LG \cdot MI \cdot NH = LH \cdot MG \cdot NI,$$

und diese Gleichung, auf das Dreieck LMN angewendet, zeigt, dass G, I und H in gerader Linie liegen.

Jedes Sehnenfünfeck kann als ein Sehnensechseck betrachtet werden, in welchem zwei Eckpunkte zusammengefallen sind, also eine Seite verschwunden ist, deren Richtung aber dann noch durch die in dem betreffenden Eckpunkt an den Kreis gelegte Tangente angegeben wird. Fallen also z. B. in der vorstehenden Figur D und E in D zusammen, so wird GM zu der durch D gehenden

Tangente des Kreises. Der PASCAL'sche Satz führt hiernach auf den folgenden als besonderen Fall:

In jedem Sehnenfünfeck liegt der Durchschnittspunkt einer Seite und der im gegenüberliegenden Eckpunkt an den Kreis gezogenen Tangente mit den Durchschnittspunkten je zweier einander gegenüberliegender übrigen Seiten in gerader Linie.

Lässt man noch zwei Eckpunkte zusammenfallen, so erhält man ein Sehnen-Viereck und den Satz:

Sind die Berührungspunkte eines Tangentenvierecks zugleich die Eckpunkte eines Sehnenvierecks desselben Kreises, so liegen die vier Durchschnittspunkte der Gegenseiten beider Vierecke in gerader Linie.

Endlich erhält man für das Dreieck auf gleiche Weise den Satz: Die Durchschnittspunkte der durch die Eckpunkte eines Dreiecks gehenden Tangenten des umbeschriebenen Kreises mit den gegenüberliegenden Seiten liegen in gerader Linie.

§ 80. Von den Potenzen bei dem Kreise.

1. Aus dem in § 49 erläuterten Begriff der Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis geht hervor, dass zwei solche Potenzen einander gleich sind, wenn für innerhalb des zugehörigen Kreises liegende Punkte die in denselben halbirten Sehnen und für ausserhalb liegende Punkte die von ihnen an den Kreis gezogenen Tangenten gleiche Längen haben. — Für verschiedene Punkte bei einem und demselben Kreis folgen hieraus leicht die nachstehenden Sätze: Zu jedem Punkte giebt es unzählig viele, welche mit ihm in Beziehung auf denselben Kreis gleiche und gleichartige (innere oder äussere) Potenzen haben. Alle diese Punkte müssen mit dem ersten gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben; ihr geometrischer Ort ist also der durch den gegebenen Punkt gehende concentrische Kreis. Dagegen ändert sich die Potenz eines Punktes, wenn die Entfernung des letzteren vom Mittelpunkt sich ändert. Die Potenz des Mittelpunktes selbst ist gleich dem Quadrate des Radius. Bewegt sich ein Punkt vom Mittelpunkt aus auf einer durch den letzteren gehenden Geraden, so wird seine Potenz, so lange er innerhalb des Kreises bleibt, mit der wachsenden Entfernung vom Mittelpunkt stetig kleiner, und sie erhält den Werth Null, wenn der Punkt auf den Kreis selbst gelangt. Bei weiter fortschreitender Bewegung, also ausserhalb des Kreises, nimmt die Potenz des Punktes mit seiner wachsenden Entfernung vom Mittelpunkt stetig zu und erhält nach einander alle Werthe von Null bis Unendlich. — Man erhält die Punkte innerhalb eines Kreises, welche in Beziehung auf diesen eine gegebene Potenz $k^2 < r^2$ haben, wenn man in den Kreis eine Sehne gleich $2k$ einträgt, dieselbe halbirt und durch den Halbirungspunkt den concentrischen Kreis beschreibt. Man erhält alle Punkte ausserhalb eines Kreises, welche in Beziehung auf diesen eine gegebene Potenz k^2 haben, wenn man an den Kreis eine Tangente gleich k legt und durch den Endpunkt derselben den concentrischen Kreis beschreibt. — Zu jedem Punkt innerhalb eines Kreises giebt es Punkte ausserhalb desselben, z. B. auf der Verlängerung des durch jenen Punkt gehenden Radius einen, welcher mit jenem gleiche Potenz hat, dagegen ist dies nicht nothwendig umgekehrt der Fall. Die Möglichkeit, dass zwei Punkte in Beziehung auf denselben Kreis gleiche aber ungleichartige Potenzen haben (so dass also der eine Punkt innerhalb, der andere ausserhalb des Kreises liegt), verschwindet überhaupt, wenn man nach § 37 die Vorzeichen der durch einen

Punkt gebildeten Abschnitte einer Sehne berücksichtigt. In diesem Falle sind die Potenzen der innerhalb des Kreises liegenden Punkte als negativ, die der ausserhalb liegenden als positiv zu betrachten, und man kann sagen, dass die Potenz eines Punktes stets mit seiner Entfernung vom Mittelpunkt wachse, und zwar stetig vom Minimalwerthe $-r^2$ bis zum Maximalwerthe ∞.

Nach dem Vorstehenden lässt sich leicht beispielsweise folgende Aufgabe lösen: Auf einer gegebenen Geraden oder auf einem gegebenen Kreis einen Punkt zu bestimmen, der in Beziehung auf einen anderen gegebenen Kreis eine gegebene Potenz hat.

2. Ist P ein Punkt innerhalb eines Kreises M, AB die in P halbirte Sehne dieses Kreises, so wird der um P mit der Hälfte der Sehne als Radius beschriebene Kreis von dem Kreise M unter einem Durchmesser geschnitten, und umgekehrt muss der Mittelpunkt P eines jeden Kreises, welcher von einem gegebenen Kreise M unter einem Durchmesser geschnitten werden soll, innerhalb des letzteren so liegen, dass er die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise halbirt.

Wird also ein Kreis P von einem Kreise M unter einem Durchmesser geschnitten, so ist das Quadrat des Radius von P die Potenz des Mittelpunktes P in Beziehung auf den Kreis M.

Ist P ein Punkt ausserhalb eines Kreises M, PA die von P an diesen Kreis gezogene Tangente, so schneidet der mit PA um P beschriebene Kreis den Kreis M in A so, dass die in A an beide Kreise gelegten Tangenten zu einander senkrecht stehen, denn ist PA Tangente des Kreises M, so ist sie senkrecht zu dem Berührungsradius MA und dieser also wiederum als Senkrechte zu dem Radius PA des Kreises P eine Tangente dieses letzteren. — Man versteht nun unter dem Winkel zweier einander schneidender krummen Linien allgemein den Winkel der in dem Durchschnittspunkt an diese Linien gelegten Tangenten. Daher kann man im vorliegenden Falle sagen, dass jeder der Kreise M und P den anderen rechtwinkelig schneide. — Da jede der in A an diese Kreise gelegten Tangenten zugleich Radius des jedesmaligen anderen Kreises ist, so kann man auch sagen, dass zwei Kreise einander rechtwinkelig schneiden, wenn die nach einem Durchschnittspunkt gehenden Radien zu einander senkrecht stehen und umgekehrt.

Schneiden zwei Kreise einander rechtwinkelig, so ist nach dem Vorstehenden das Quadrat des Radius eines jeden derselben die Potenz seines Mittelpunktes in Beziehung auf den anderen.

Jeder Durchmesser AB eines von zwei einander rechtwinkelig schneidenden Kreisen wird daher durch die Durchschnittspunkte C, D mit dem anderen harmonisch getheilt, denn ist M der Mittelpunkt des ersteren Kreises, so ist $r^2 = MA^2 = MC \cdot MD$, woraus nach § $78,_1$ die Behauptung folgt.

Es ergeben sich nun unmittelbar die Lösungen folgender Aufgaben: Den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Kreise zu bestimmen, welche einen gegebenen Radius haben und a) von einem gegebenen Kreise unter einem Durchmesser geschnitten werden oder b) einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden. — Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinkelig schneiden. — Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinkelig schneidet und a) seinen Mittelpunkt auf einer Linie oder b) einen gegebenen Radius hat. — Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Radius hat, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie liegt

und der a) einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneidet oder b) von einem gegebenen Kreis unter einem Durchmesser geschnitten wird.

3. Sind zwei Kreise gegeben, so kann die Aufgabe gestellt werden, diejenigen Punkte zu finden, welche in Beziehung auf beide Kreise gleiche (und gleichartige) Potenzen haben. Diese Aufgabe ist offenbar identisch mit derjenigen, die Punkte zu finden, von denen aus man an die beiden Kreise gleich lange Tangenten legen, oder durch welche man in die beiden Kreise gleich lange in dem betreffenden Punkt halbirte Sehnen legen kann.

Man kann beliebig viele solche Punkte construiren, indem man an jeden der beiden Kreise A, B eine Tangente zieht, beiden Tangenten beliebige aber gleiche Länge giebt und durch den Endpunkt einer jeden so begrenzten Tangente den zum zugehörigen Kreis concentrischen Kreis beschreibt. Jeder Durchschnittspunkt oder Berührungspunkt zweier solcher zusammengehöriger Kreise hat in Beziehung auf die gegebenen gleiche äussere Potenzen. Soll entsprechend ein Punkt mit gleichen inneren Potenzen gefunden werden, was offenbar nur möglich ist, wenn die gegebenen Kreise einander schneiden, so kann man in jeden der letzteren eine Sehne legen, so dass diese Sehnen beliebige aber gleiche Längen haben, dann halbire man beide und ziehe durch die Halbirungspunkte die entsprechenden concentrischen Kreise. Von den Durchschnittspunkten oder dem Berührungspunkt je zweier so construirten Kreise gilt wieder das oben im gleichen Fall gesagte. Man gelangt jedoch auf kürzerem Wege durch folgende Betrachtung zum Ziel: Schneiden sich die gegebenen Kreise A, B in C und D, so ist jeder Punkt P auf der gemeinschaftlichen Sehne CD ein Punkt mit gleichen inneren Potenzen für beide Kreise, denn jede dieser Potenzen ist gleich $PC \cdot PD$. Umgekehrt muss jeder Punkt P mit der verlangten Eigenschaft auf CD liegen, denn wäre dies nicht der Fall, so würde die durch C und P gehende Gerade die Kreise A, B in zwei verschiedenen Punkten E, F treffen und es müsste dabei $PC \cdot PF = PC \cdot PE$, also $PF = PE$ sein, was nicht möglich ist.

In ganz entsprechender Weise lässt sich zeigen, dass jeder Punkt auf einer Verlängerung der gemeinschaftlichen Sehne zweier einander schneidender Kreise in Bezug auf die letzteren gleiche äussere Potenzen hat, sowie umgekehrt, dass jeder Punkt von dieser Eigenschaft auf einer von jenen Verlängerungen liegen muss.

Man nennt den geometrischen Ort aller Punkte, welche in Beziehung auf zwei gegebene Kreise gleiche (und gleichartige) Potenzen haben, die Potenzlinie oder Chordale dieser Kreise. Man hat hiernach den Satz:

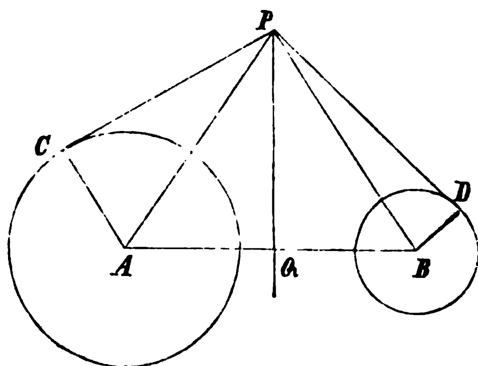
Die Potenzlinie zweier einander schneidender Kreise ist die gemeinschaftliche Secante derselben.

Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn die beiden Durchschnittspunkte der Secante zusammenfallen, d. h. wenn letztere zur Tangente wird, oder

Die Potenzlinie zweier einander berührender Kreise ist die durch den Berührungspunkt gehende gemeinschaftliche Tangente,

was sich auch sehr leicht unmittelbar beweisen lässt. Dabei macht es keinen Unterschied, ob die Kreise einander von aussen oder von innen berühren.

Um ferner allgemein für jede Lage zweier Kreise gegen einander die Potenzlinie zu bestimmen, sei P ein beliebiger zu den Kreisen A, B gehöriger Punkt, der in Beziehung auf diese gleiche Potenzen hat. Liegt P ausserhalb beider Kreise, so ziehe man eine Tangente PC an A und eine Tangente PD an B, ver-



binde P mit den Mittelpunkten A, B, ziehe ferner die Berührungsradien AC, BD und fälle endlich von P die Senkrechte PQ auf die Centrale AB. Dann ist

$$PC^2 = PA^2 - AC^2$$
$$= PQ^2 + AQ^2 - AC^2,$$
$$PD^2 = PB^2 - BD^2$$
$$= PQ^2 + BQ^2 - BD^2.$$

Da nun der Voraussetzung zufolge $PC = PD$ sein muss, so ergiebt sich hieraus, dass

$$PQ^2 + AQ^2 - AC^2 = PQ^2 + BQ^2 - BD^2$$

oder

$$AQ^2 - AC^2 = BQ^2 - BD^2$$

ist, woraus durch Umstellung, und wenn man der Kürze halber $AC = R$, $BD = r$ setzt,

$$AQ^2 - BQ^2 = R^2 - r^2$$

hervorgeht. In ganz derselben Weise erhält man wenn P innerhalb beider Kreise liegt, mit Hülfe der in P halbirten, der Voraussetzung zufolge einander gleichen Sehnen

$$R^2 - AQ^2 - PQ^2 = r^2 - BQ^2 - PQ^2,$$

woraus wieder leicht $AQ^2 - BQ^2 = R^2 - r^2$ folgt.

Diese somit für alle Punkte gleicher Potenzen in Beziehung auf die Kreise A, B geltende Gleichung führt nun zu folgenden Folgerungen:

Ist $R = r$, so ist $AQ = BQ$; bei zwei gleichen Kreisen halbirt also der Punkt Q stets die Centrallinie AB. Sind dagegen die Kreise ungleich und bezeichne R den grösseren Radius, so ist stets $AQ > BQ$. Hiernach kann Q nur auf demjenigen Theile der durch A und B gehenden Geraden liegen, welcher sich vom Halbirungspunkt von AB aus nach der über den Mittelpunkt B des kleineren Kreises gehenden Richtung erstreckt. Es lässt sich nun zeigen, dass es zu je zwei gegebenen Kreisen A, B stets einen und nur einen einzigen in dieser Weise liegenden Punkt giebt, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von A und B den constanten Werth $R^2 - r^2$ besitzt. Denkt man sich nämlich einen Punkt Q vom Halbirungspunkt von AB aus in der Richtung über B stetig auf der zugehörigen Geraden bewegt, so ist, so lange Q zwischen A und B liegt, $AQ + BQ = AB$, also $AQ^2 - BQ^2 = (AQ - BQ) \cdot (AQ + BQ) = (AQ - BQ) \cdot AB$. Da der Faktor AB hier immer denselben Werth behält, $AQ - BQ$ aber um so grösser wird, je kleiner BQ wird, so nimmt bei der Bewegung von Q der Werth jener Differenz der Quadrate stetig zu, bis er für $BQ = 0$ gleich AB^2 wird. Tritt dann Q auf die Verlängerung von AB, so wird $AQ - BQ = AB$, mithin $AQ^2 - BQ^2 = AB \cdot (AQ + BQ)$, und man sieht leicht ein, dass dieser Ausdruck mit der fortschreitenden Bewegung von Q von AB^2 an bis in's Unendliche ohne Unterbrechung wächst. Zu jeder anderen Lage des Punktes Q gehört hiernach ein anderer Werth von $AQ^2 - BQ^2$, und somit giebt es stets nur einen einzigen solchen Punkt Q, für welchen dieser Werth gleich $R^2 - r^2$ ist.

Denkt man sich nun sämmtliche Punkte P, P', P'', ..., welche in Beziehung auf die Kreise A, B gleiche und gleichartige Potenzen haben, und von jedem derselben die Senkrechte auf AB gefällt, so müssen nach dem Vorstehenden

diese Senkrechten sämmtlich die Gerade AB in demselben Punkte Q treffen, woraus folgt, dass sie zusammenfallen, d. h. dass alle jene Punkte P, P' u. s. w. auf einer und derselben, zu AB senkrechten Geraden liegen.

Umgekehrt lässt sich leicht zeigen, dass, wenn Q auf AB so gewählt ist, dass $AQ^2 - BQ^2 = R^2 - r^2$ ist, alle Punkte der in Q auf AB errichteten Senkrechten in Beziehung auf die beiden Kreise gleiche und gleichartige Potenzen haben müssen. Ist z. B. P ein ausserhalb beider Kreise liegender Punkt dieser Senkrechten, so führt die im Vorigen für den entsprechenden Fall gemachte Construction wieder auf
$$PC^2 = PQ^2 + AQ^2 - AC^2,$$
$$PD^2 = PQ^2 + BQ^2 - BD^2,$$
mithin
$$PC^2 - PD^2 = AQ^2 - BQ^2 - R^2 + r^2.$$

Da nun $AQ^2 - BQ^2 = R^2 - r^2$, so folgt $PC^2 - PD^2 = 0$, woraus $PC = PD$ hervorgeht, u. s. w.

Jene zur Centrallinie senkrechte Gerade ist also die Potenzlinie der Kreise A und B.

Da hiernach die Potenzlinie zweier Kreise in allen Fällen eine gerade Linie ist, und da dieselbe ferner stets auf der Centrallinie der Kreise senkrecht steht, so genügt, um dieselbe construiren zu können, die Kenntniss eines einzigen Punktes, welcher in Beziehung auf die beiden Kreise gleiche (gleichartige) Potenzen hat. Kennt man zwei Punkte der Potenzlinie, so hat man zur Construction dieser letzteren nur die Gerade durch die beiden Punkte zu legen. Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, wie man stets zwei solche Punkte mittelst eines Paares concentrischer Kreise finden kann.

Haben zwei Kreise einen Punkt gemeinsam, so ist derselbe auch ein Punkt ihrer Potenzlinie: haben dagegen die Kreise keinen gemeinsamen Punkt, so kann auch ihre Potenzlinie keinen Punkt mit ihnen gemein haben und muss also stets ganz ausserhalb beider liegen. Dieser Fall tritt also ein, sowol wenn jeder der beiden Kreise ganz ausserhalb des anderen, wie wenn der kleinere ganz innerhalb des grösseren liegt. Im ersteren Falle müssen die Kreise auf verschiedenen Seiten der Potenzlinie liegen, diese schneidet also die Centrallinie zwischen den Mittelpunkten; im letzteren Falle dagegen liegen die Kreise auf derselben Seite der Potenzlinie und diese schneidet die Centrallinie auf ihrer Verlängerung über den Mittelpunkt des kleineren Kreises.

Liegen die Kreise A, B ganz ausserhalb einander, so ist $AQ + BQ = AB$. Bezeichnen wir der Kürze halber die Länge der Centrallinie AB durch c, so hat man also
$$R^2 - r^2 = AQ^2 - BQ^2 = (AQ + BQ) \cdot (AQ - BQ) = c \cdot (AQ - BQ).$$

Die beiden Gleichungen
$$AQ - BQ = \frac{R^2 - r^2}{c}$$
$$AQ + BQ = c$$
führen nun zu $AQ = \frac{1}{2}\left(c + \frac{R^2 - r^2}{c}\right)$; $BQ = \frac{1}{2}\left(c - \frac{R^2 - r^2}{c}\right)$.

Liegt dagegen der Kreis B ganz innerhalb des Kreises A, so ist $AQ - BQ = c$, woraus
$$AQ + BQ = \frac{R^2 - r^2}{c}$$
und daher $AQ = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2 - r^2}{c} + c\right)$, $BQ = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2 - r^2}{c} - c\right)$ folgt. Die ersteren Formeln gelten übrigens offenbar für alle Fälle, in denen Q zwischen A und B

liegt, die letzteren für alle übrigen Fälle. Beide lassen sich in die folgenden vereinigen:

$$AQ = \tfrac{1}{2}\left(c + \frac{R^2 - r^2}{c}\right),\quad BQ = \pm \tfrac{1}{2}\left(c - \frac{R^2 - r^2}{c}\right).$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich im Einzelnen noch Folgendes:

Ist $c = 0$, so ist $AQ = \infty$, d. h. die Potenzlinie zweier concentrischen Kreise liegt im Unendlichen.

Wächst c von 0 bis $R - r$, so nimmt AQ von ∞ bis R ab. Bewegt sich also der Mittelpunkt B in gerader Linie von A bis zur Berührung der Kreise von innen, so bewegt sich die Potenzlinie in entgegengesetzter Richtung (und einander parallelen Lagen) aus dem Unendlichen bis zur Tangente A.

Wächst c weiter von $R - r$ bis $R + r$, so bewegt sich die Potenzlinie zunächst in gleicher Weise in der entgegengesetzten Richtung fort, indem sie den Kreis A schneidet, und zwar so lange bis B von A unter einem Durchmesser geschnitten wird, d. h. bis $c^2 = R^2 - r^2$ oder, was dasselbe ist, $AQ = c$ ist. Die Potenzlinie geht dann durch den Mittelpunkt B selbst. Von da an nimmt AQ wieder zu, d. h. die Potenzlinie entfernt sich wieder von A und wird, wie schon bekannt, für $R + r$ wieder zur Tangente.

Wächst c noch über $R + r$, so wächst auch AQ, und zwar von R bis ∞.

Es giebt also stets zwei Lagen desselben beweglichen Kreises B, in denen er mit dem Kreise A dieselbe Potenzlinie hat; nur in dem Fall, dass die Potenzlinie durch den Mittelpunkt B geht, fallen beide Lagen zusammen. Sind B', B'' zwei solche zusammengehörige Lagen des Mittelpunktes B, so ist $B'Q$ mit $B''Q$ von gleicher Länge und entgegengesetzter Richtung. Hiernach ergiebt sich die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen Geraden als Potenzlinie desselben mit einem zweiten Kreis diesen zweiten Kreis zu construiren, wenn ausserdem der Radius des letzteren gegeben ist, als eine im Allgemeinen zweideutig bestimmte. Ihre Auflösung bedarf für die besonderen Fälle, in denen die Potenzlinie den gegebenen Kreis schneidet oder berührt, keiner weiteren Erörterung. Im anderen Fall kann dieselbe durch Construction von BQ aus der Gleichung $AQ^2 - BQ^2 = R^2 - r^2$ (bezw. $BQ^2 - AQ^2 = R^2 - r^2$) gefunden werden, da AQ als die von A auf die Potenzlinie gefällte Senkrechte, sowie R und r bekannt sind. — Ist der Radius des gesuchten Kreises B nicht gegeben, so giebt es unzählig viele Kreise, welche mit A dieselbe gegebene Potenzlinie haben. Ihre Mittelpunkte liegen sämmtlich auf der durch A senkrecht zur Potenzlinie gelegten Geraden. Schneidet beispielsweise die Potenzlinie den gegebenen Kreis, so genügt die ganze Schaar der durch dieselben zwei Durchschnittspunkte gehenden Kreise der Forderung. Das Gleiche gilt von allen den Kreis A in demselben Punkte wie eine gegebene Potenzlinie berührenden Kreisen.

4. Sind drei Kreise A, B, C gegeben, so erhält man durch Verbindung derselben zu je zweien drei Potenzlinien. Der Durchschnittspunkt irgend einer derselben, z. B. der Potenzlinie von A und B, mit einer zweiten, z. B. der Potenzlinie von A und C, hat die Eigenschaft, dass seine Potenz in Beziehung auf A gleich seiner Potenz in Beziehung auf B und auch gleich seiner Potenz in Beziehung auf C ist. Daher muss auch seine Potenz für B gleich seiner Potenz für C, d. h. er muss auch ein Punkt der Potenzlinie von B und C sein. Daher ergiebt sich der Satz:

Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden einander in einem und demselben Punkte.

Dieser Punkt heisst der Potenzpunkt oder das Potenzcentrum der drei Kreise.

Im engeren Sinne existirt ein solcher Punkt nur dann, wenn die Mittelpunkte der drei Kreise A, B, C nicht in gerader Linie liegen, denn nur in diesem Falle schneiden die drei Potenzlinien einander in einem endlichen Punkte. Liegen dagegen die drei Mittelpunkte in einer Geraden, so sind im Allgemeinen die drei Potenzlinien einander parallel, der Potenzpunkt liegt also im Unendlichen. Im besonderen Falle können dann auch die Potenzlinien in eine und dieselbe Gerade zusammenfallen; dies ist der schon vorher erwähnte Fall, in welchem zwei (oder mehr) Kreise mit demselben dritten eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben.

Der vorstehende Satz vom Potenzpunkt enthält eine grosse Anzahl specieller Sätze als besondere Fälle in sich, von denen folgende beispielsweise Anführung verdienen:

Schneiden drei Kreise einander wechselseitig, so schneiden ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen einander in demselben Punkte. — Berührt jeder von drei Kreisen die beiden anderen, so gehen die durch die Berührungspunkte gelegten gemeinschaftlichen Tangenten durch einen und denselben Punkt. — Berührt ein Kreis jeden von zwei einander schneidenden Kreisen, so liegt der Durchschnittspunkt der durch die Berührungspunkte gehenden gemeinschaftlichen Tangenten auf der gemeinschaftlichen Secante. — Für alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise schneiden (oder berühren) liegen die Durchschnittspunkte der beiden gemeinschaftlichen Sehnen (oder der entsprechenden Tangenten) in einer einzigen Geraden, nämlich der Potenzlinie jener beiden gegebenen Kreise.

Man erhält insbesondere hierdurch auch eine sehr bequeme Methode der Construction der Potenzlinie zweier Kreise. Zeichnet man nämlich einen beliebigen, jene beiden schneidenden Kreis und bestimmt den Durchschnittspunkt der zugehörigen gemeinschaftlichen Secanten, so ist derselbe ein Punkt der Potenzlinie, wonach das Uebrige, wie früher gezeigt, leicht ist.

5. Denkt man sich den Radius eines Kreises stetig abnehmend, so kann der Mittelpunkt als die Grenze betrachtet werden, welcher sich der Kreis ohne Ende nähert. In diesem Sinne kann man sagen, dass ein Punkt als ein Kreis mit dem Radius Null angesehen werden dürfe. Man kann daher auch die vorstehenden Untersuchungen auf die Fälle ausdehnen, dass ein oder mehrere Kreise sich auf Punkte reduciren.

Hiernach hat man unter der Potenz eines Punktes P in Beziehung auf einen gegebenen Punkt A das Quadrat der Entfernung beider Punkte von einander zu verstehen. Der geometrische Ort der Punkte, welche in Beziehung auf den gegebenen Punkt A die gegebene Potenz r^2 haben, ist also der mit einem Radius gleich r um A beschriebene Kreis.

Die Potenzlinie eines Kreises A und eines Punktes B ist der geometrische Ort der Punkte, die in Beziehung auf diesen Kreis und diesen Punkt gleiche Potenzen haben. Um dieselbe zu bestimmen, hat man nur die entsprechenden vorstehenden Entwicklungen mit der Abänderung zu wiederholen, dass der Radius r des kleineren Kreises in denselben gleich Null gesetzt wird. Die gesuchte Potenzlinie ist eine Gerade und steht senkrecht zu der Verbindungslinie des Punktes B mit dem Mittelpunkt des Kreises A. Liegt B auf dem Kreise A, so ist die Potenzlinie die durch B gehende Tangente des Kreises; in allen anderen

Fällen liegt die Potenzlinie ganz ausserhalb des Kreises. Ist B insbesondere der Mittelpunkt von A, so liegt die Potenzlinie im Unendlichen.

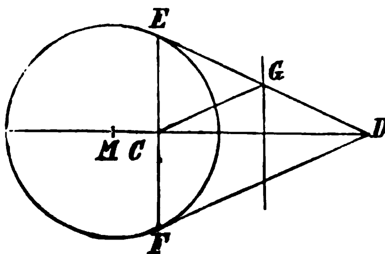
Die Potenzlinie zweier Punkte A, B ist die auf der Verbindungsstrecke AB in ihrem Halbirungspunkte senkrechte Gerade.

Die drei Potenzlinien zweier Kreise und eines Punktes oder eines Kreises und zweier Punkte oder dreier Punkte schneiden einander in einem und demselben Punkte, welcher der Potenzpunkte der Kreise oder Punkte genannt wird. Der Beweis dieses Satzes ist derselbe, wie im entsprechenden vorhergehenden Falle.

Für den Fall dass drei Punkte gegeben sind, reducirt sich der vorstehende Satz auf den bekannten, dass die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines jeden Dreiecks einander in einem und demselben von den Eckpunkten gleichweit entfernten Punkte schneiden. Ist ein Kreis nebst zwei auf demselben liegenden Punkten gegeben, so hat man den ebenfalls schon bekannten Satz: Je zwei Tangenten eines Kreises, welche einander schneiden, sind — von den Berührungspunkten bis zum Durchschnittspunkt gerechnet — gleich lang, und ihr Durchschnittspunkt liegt auf der zur Verbindungssehne der Berührungspunkte senkrechten (daher auch durch den Mittelpunkt gehenden) Geraden. Noch andere besondere Fälle sind in grosser Anzahl leicht zu entwickeln.

6. Da die Potenzlinie zweier Kreise, soweit sie ausserhalb der letzteren liegt, der geometrische Ort aller Punkte ist, von denen man an die beiden Kreise gleichlange Tangenten ziehen kann, so folgt, dass auf ihr die Halbirungspunkte sämmtlicher den beiden Kreisen gemeinschaftlicher (durch ihre Berührungspunkte begrenzter) Tangenten liegen müssen. Man hat bekanntlich, je nachdem die Kreise ganz ausserhalb einander liegen, einander von aussen berühren, einander schneiden oder einander von innen berühren, vier, drei, zwei oder eine solche Tangente und demnach die Sätze, dass im ersten Fall die vier betreffenden Halbirungspunkte der zwei äusseren und der zwei inneren Tangenten in einer zu der Centrale senkrechten Geraden liegen, im zweiten Fall die Halbirungspunkte der beiden äusseren Tangenten auf der einen inneren, im dritten die Halbirungspunkte der beiden nur noch vorhandenen äusseren Tangenten auf der gemeinschaftlichen Secante liegen.

Man könnte hierauf eine weitere Methode der Construction der Potenzlinie zweier Kreise gründen, welche jedoch weitläufiger sein würde, als die zuletzt gefundene, und ausserdem den Nachtheil hätte, dass sie auf den Fall, dass der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, keine unmittelbare Anwendung finden könnte. Wichtiger erscheint diese Art der Behandlung, wenn der eine Kreis auf einen Punkt reducirt ist. Der obige Satz geht dann in den folgenden über:



Die Potenzlinie eines Kreises und eines ausserhalb desselben gelegenen Punktes halbirt die beiden von dem Punkt an den Kreis gehenden Tangenten.

Zieht man ferner die Berührungssehne EF zu den von einem Punkte D ausserhalb eines Kreises M an diesen gehenden Tangenten DE, DF, so ist diese, weil zu der Centrale DM senkrecht, zu der Potenzlinie des Punktes D und des Kreises M parallel. Der Abstand des Punktes C, in welchem die Be-

rührungssehne die Centrale schneidet, von dem Punkte D wird daher ebenso, wie die Tangenten, von der Potenzlinie halbirt.

Da also die Potenzlinie die Mittelsenkrechte zu CD ist, so muss ihr Durchschnittspunkt G mit DE von C und D gleichweit entfernt sein. Es ist mithin auch $GE = GC$, also G ein Punkt, welcher in Beziehung auf den Kreis M und den Punkt C gleiche Potenzen hat. Hieraus geht hervor, dass die Potenzlinie von M und D zugleich die Potenzlinie von M und C ist, oder der Satz:

Die Potenzlinie eines Kreises und eines innerhalb desselben liegenden Punktes C halbirt die beiden Tangenten, deren Berührungssehne in dem Punkte C halbirt wird.

Es lässt sich dieser Satz mit dem vorhergehenden vereinigen. Aus § 78 ist bekannt, dass die Punkte C und D, welche, wie eben gezeigt, dieselbe Potenzlinie mit dem Kreise M haben, den durch C gehenden Durchmesser harmonisch theilen. Daher gilt der Satz:

Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes halbirt den Abstand dieses Punktes von dem ihm zugeordneten harmonischen Theilpunkt des durch ihn bestimmten Durchmessers.

Hiernach kann die Construction der Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes auf verschiedene Weisen ausgeführt werden. Auf die Halbirung der Tangenten führt die Anwendung des Potenzpunktes. Um mit Hülfe desselben die Potenzlinie eines Kreises M und eines Punktes D zu construiren, kann man einen Kreis zeichnen, der durch D geht und M schneidet (oder berührt). Die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise und die in D an den Hülfskreis gelegte Tangente müssen sich als betreffende Potenzlinien in dem zugehörigen Potenzpunkt schneiden, welcher also ein Punkt der gesuchten Potenzlinie ist. Noch einfacher nimmt man auf M irgend einen anderen Punkt H an und bestimmt das Potenzcentrum von M, D und H mittelst der in H an M gelegten Tangente und der Mittelsenkrechten von D und H. Da die Wahl von H willkürlich ist, so kann man für einen äusseren Punkt D den Berührungspunkt einer von D an M gelegten Tangente wählen, und man sieht, dass man dann auf den Satz zurückkommt, nach welchem der Halbirungspunkt dieser Tangente ein Punkt der gesuchten Potenzlinie ist.

7. Die Potenzlinie zweier Kreise ist ferner, soweit sie ausserhalb der letzteren liegt, der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche die beiden gegebenen zugleich rechtwinkelig schneiden. Entsprechend ist die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche den gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden und durch den gegebenen Punkt gehen. Die Potenzlinie zweier Punkte führt in dieser Weise auf den bekannten geometrischen Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise zurück, welche durch die beiden Punkte gehen.

Hiernach findet man leicht ohne Weiteres die Auflösungen folgender Aufgaben: Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneide, wenn a) sein Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie liegen soll oder b) sein Durchschnittspunkt auf einem der Kreise oder c) sein Radius gegeben ist. Die entsprechenden Aufgaben können gelöst werden für einen Kreis, der einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden und durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Die Potenzlinie zweier einander schneidenden Kreise ist ferner, soweit sie innerhalb der Kreise liegt (also die gemeinschaftliche Sehne der Kreise), der

geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche von den beiden gegebenen zugleich unter Durchmessern geschnitten werden. Hiernach lassen sich den vorstehenden analoge Aufgaben über Kreise dieser letzteren Art bilden und lösen.

Das Potenzcentrum führt endlich unmittelbar zur Auflösung folgender Aufgaben: Einen Kreis zu construiren, der a) drei gegebene Kreise zugleich rechtwinkelig schneide oder b) von jedem von drei gegebenen (einander sämmtlich schneidenden) Kreisen unter einem Durchmesser geschnitten werde, oder c) zwei gegebene Kreise rechtwinkelig schneide und durch einen gegebenen Punkt gehe oder c) einen gegebenen Kreis rechtwinkelig schneide und durch zwei gegebene Punkte gehe.

§ 81. Pole und Polaren.

1. Je zwei Punkte C, D, welche auf einer durch den Mittelpunkt M eines Kreises gehenden Geraden und auf derselben Seite von M so liegen, dass das Rechteck aus ihren Abständen von M gleich dem Quadrat des Radius, also

$$MC \cdot MD = r^2$$

ist, heissen einander zugeordnete Pole des Kreises M.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt ohne Weiteres: Ist einer der Faktoren MC, MD kleiner als der Radius r, so ist der andere grösser als r und umgekehrt; ist einer derselben gleich r, so ist auch der andere gleich r. Von zwei einander zugeordneten Polen eines Kreises liegt also der eine innerhalb, der andere ausserhalb des letzteren, oder es fallen beide in einem Punkte des Kreises zusammen. Im Folgenden soll im Allgemeinen $MC < r$ und also $MD > r$ angenommen werden.

Ist $MC = 0$, so ist $MD = \infty$; wächst MC, so muss MD abnehmen. Mit anderen Worten: Dem Mittelpunkte des Kreises ist ein unendlich entfernter Punkt zugeordnet; bewegt sich der innere Punkt vom Mittelpunkt bis zum Kreise, so bewegt sich der äussere Punkt ihm entgegengesetzt aus dem Unendlichen bis zum Kreise. Selbstverständlich gelten auch die Umkehrungen dieser Sätze.

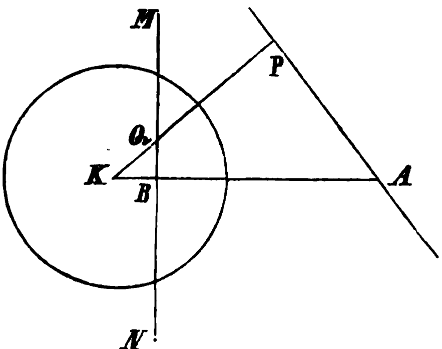
Die so eben unmittelbar aus der obigen Gleichung abgelesenen Beziehungen zwischen C und D ergeben sich auch daraus, dass nach § 78 je zwei zugeordnete Pole eines Kreises den zu ihnen gehörigen Durchmesser des letzteren harmonisch theilen.

Umgekehrt sind jede zwei einander zugeordnete harmonische Theilpunkte eines Durchmessers auch einander zugeordnete Pole des Kreises. Ferner ergiebt sich ohne Weiteres aus früheren Entwicklungen, dass je zwei einander zugeordnete Pole in Beziehung auf ihren Kreis eine gemeinschaftliche Potenzlinie haben und umgekehrt, dass die Berührungssehne der von dem äusseren Pol an den Kreis gehenden Tangenten von der zugehörigen Centrallinie in dem inneren Pol geschnitten und halbirt wird und dass jeder Kreis, welcher durch zwei einander zugeordnete Pole geht, den zu letzteren gehörigen Kreis rechtwinkelig schneidet. Endlich ergiebt sich auch die Aufgabe, zu einem gegebenen inneren oder äusseren Punkt für einen Kreis den zugeordneten Pol zu construiren, als nur eine verschiedene Form einer Aufgabe über harmonische Theilung einer gegebenen Strecke und kann daher auf mannigfache Weisen gelöst werden.

Diejenige Gerade, welche in dem einen von zwei einander zugeordneten Polen eines Kreises zu der durch diese Pole gehenden Centrallinie senkrecht steht, heisst die Polare zu dem anderen Pol. Umgekehrt heisst letzterer der Pol der genannten Geraden.

Die Polare eines ausserhalb des Kreises liegenden Punktes geht hiernach durch die Berührungspunkte der von dem Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten, die Polare eines auf dem Kreise liegenden Punktes ist die durch diesen Punkt gehende Tangente, die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes liegt ganz ausserhalb des Kreises und geht durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten, deren Berührungssehne in ihrem Pol halbirt wird. Die Polare des Mittelpunkts ist eine beliebige in unendlicher Entfernung gedachte Gerade. Jeder Durchmesser des Kreises ist die Polare des auf der zu ihm senkrechten Centrale in unendlicher Entfernung gedachten Punktes. — Nähert sich ein Punkt dem Kreise, so rückt auch seine Polare demselben näher und umgekehrt. — Die Aufgaben, zu einem Kreis und einem Punkt die Polare des letzteren und umgekehrt zu der gegebenen Polare und dem Kreis den Pol zu construiren, bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

2. Es sei A ein beliebiger Punkt und MN seine Polare in Beziehung auf den Kreis K. Zieht man nun durch A eine beliebige Gerade und fällt auf dieselbe vom Mittelpunkt K die Senkrechte KP, welche MN in Q schneide, so ist, wenn B der zu A zugeordnete Pol, also KB senkrecht zu MN ist, $\angle KBQ = \angle KPA = R$ und daher $\triangle KBQ \sim \triangle KPA$. Hieraus folgt:

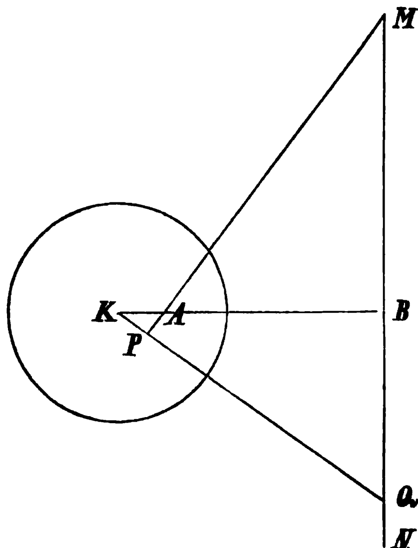


$$KB : KQ = KP : KA \text{ oder}$$
$$KA \cdot KB = KP \cdot KQ.$$

Da nun nach der Voraussetzung $KA \cdot KB = r^2$, so ist auch

$$KP \cdot KQ = r^2,$$

d. h. P und Q sind ebenfalls einander zugeordnete Pole des Kreises K und AP ist also die Polare von Q.



Hieraus folgt: Die Pole aller Geraden, die einander in einem und demselben Punkte A schneiden, liegen in einer Geraden, nämlich in der Polare dieses Punktes A, oder dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt derselben, so bewegt sich ihr Pol auf der Polare dieses Punktes.

Nimmt man umgekehrt auf der Polare eines Punktes A ausser dem zugeordneten Pol B des letzteren einen zweiten Punkt Q an, so folgt in gleicher Weise, dass die Polare von Q durch A gehen muss, oder bewegt sich ein Punkt auf der Polare eines andern, so dreht sich seine Polare um diesen letzteren Punkt.

Sind also Q und Q' zwei beliebige Punkte und construirt man zu jedem derselben den zugehörigen Pol P, P' in Beziehung auf den Kreis K und die zugehörige Polare, und sei A der Durchschnittspunkt dieser Polaren, so muss

sowol Q als auch Q' auf der Polare des Punktes A liegen, also muss die Gerade QQ' diese Polare sein.

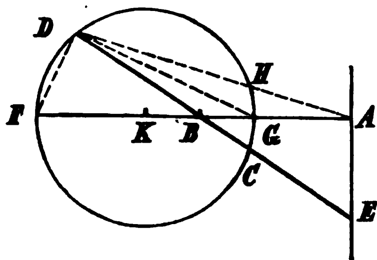
Die Verbindungslinie zweier Punkte ist hiernach die Polare des Durchschnittspunktes der Polaren jener Punkte, und der Durchschnittspunkt zweier Geraden ist der Pol der Verbindungslinie der zu jenen Geraden gehörigen Pole. — Umgekehrt, ist der Durchschnittspunkt zweier Geraden der Pol einer dritten Geraden, so geht diese dritte durch die Pole der beiden ersten.

Als besondere Fälle ergeben sich aus dem Vorstehenden ohne Weiteres folgende Sätze:

Liegen die Scheitel mehrerer Winkel, deren Schenkel einen Kreis berühren, in gerader Linie, so schneiden die zugehörigen Berührungssehnen einander in einem einzigen Punkt.

Zieht man umgekehrt durch einen und denselben Punkt beliebig viele Sehnen und durch die Endpunkte einer jeden der letzteren die Tangenten an den Kreis, so liegen die Durchschnittspunkte aller solcher Tangentenpaare in gerader Linie.

3. Zieht man durch einen Punkt B eine Sehne CD in einen Kreis K, welche (nöthigenfalls verlängert) von der Polare des Punktes B in E geschnitten werde, so sind, wenn A der zugeordnete Pol und FG der zugehörige Durchmesser des Punktes B ist, die Linien DF, DG und DB, DA vier harmonische Strahlen. Da nun DG auf dem zugeordneten Strahl DF senkrecht steht, so muss DG den Winkel BDA der beiden anderen Strahlen halbiren. Aus der Gleichheit der Peripheriewinkel CDG, GDH folgt aber die Gleichheit der zugehörigen Bogen, bezw. Sehnen CG und GH, und die dann leicht zu beweisende Congruenz der Dreiecke CGA und GHA führt zu der Folgerung, dass auch die Winkel CAG, HAG einander gleich sind.



Da ausserdem die Polare AE zu dem Strahl AG senkrecht ist, so sind AE, AB und AC, AH ebenfalls vier harmonische Strahlen und müssen daher die Secante DE in vier harmonischen Punkten schneiden. Somit ergiebt sich der Satz:

Jede durch einen Pol gezogene Sehne eines Kreises wird durch diesen Pol und seine Polare harmonisch getheilt.

In der Figur zu dem vorstehenden Beweis ist der Fall vorausgesetzt, dass B innerhalb des Kreises liegt. Für den entgegengesetzten Fall wird der Leser hier, wie bei anderen Sätzen dieses Kapitels, leicht die entsprechende Figur construiren, sodass derselbe Beweis ohne Aenderung des Wortlauts seine Gültigkeit behält.

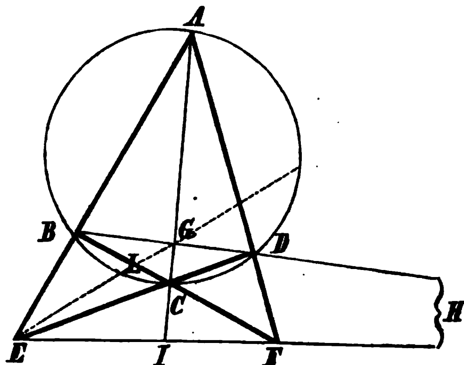
Umgekehrt muss jeder von zwei harmonischen Theilpunkten einer beliebigen Sehne CD eines Kreises auf der zu dem anderen Theilpunkt als Pol gehörigen Polare liegen, wie nun leicht indirekt bewiesen werden kann.

Man versteht unter einander zugeordneten harmonischen Polen in Beziehung auf einen Kreis K im weiteren Sinne jede zwei Punkte B, E, welche eine Sehne DC des Kreises harmonisch theilen. Hiernach hat jeder Punkt B unendlich viele ihm zugeordnete Pole in Beziehung auf denselben Kreis, da durch B unendlich viele Sehnen gelegt werden können. Aus dem vorstehenden Satz geht hervor, dass alle diese einem und demselben Punkte B zugeordneten Pole auf

einer Geraden liegen, nämlich auf der Polare von B, oder dass diese Polare (bezw., wenn B ausserhalb des Kreises liegt, der innerhalb des letzteren liegende Theil derselben) der geometrische Ort aller dem Pole B zugeordneten Pole im weiteren Sinne ist.

Zieht man demnach durch einen Punkt zwei beliebige Sehnen und bestimmt zu jeder derselben den jenem Punkt zugeordneten harmonischen Theilpunkt, so ist die Verbindungslinie dieser beiden Theilpunkte die Polare des ersten Punktes.

Durch Verbindung der Endpunkte zweier durch einen und denselben Punkt in den Kreis gezogenen Sehnen entsteht ein dem Kreise einbeschriebenes Viereck. Es sei zunächst jener Punkt G ein innerhalb des Kreises K liegender, AC und BD seien die durch ihn gezogenen Sehnen, und das Viereck $ABCD$ werde zum vollständigen Vierseit ergänzt. Dann trifft, wie früher gezeigt, die Verlängerung der inneren Diagonale AC die äussere Diagonale EF in dem zu G zugeordneten harmonischen Theilpunkte I; die Polare von G muss also durch I gehen. Ebenso trifft die Verlängerung der inneren Diagonale BD die äussere EF in dem zu G zugeordneten Theilpunkte H von EF; die Polare von G muss also auch durch H gehen. Diese Polare ist also die durch I und H gehende Gerade EF, und man hat den Satz:



Der Durchschnittspunkt der inneren Diagonalen jedes einem Kreise einbeschriebenen vollständigen Vierseits ist der Pol der äusseren Diagonale.

Daher muss ferner die Polare des auf dieser Geraden liegenden Punktes F durch diesen Pol gehen, und zieht man noch EG, welche Linie BC in dem zu F zugeordneten harmonischen Theilpunkte L schneiden muss, so ergiebt sich, dass die Polare von F auch durch L gehen muss, dass also EG die Polare von F ist. Selbstverständlich kann man in gleicher Weise zeigen, dass GF die Polare von E ist.

Sind also durch einen ausserhalb des Kreises liegenden Punkt F die Sehnen CB, DA gezogen, so ergeben die übrigen Verbindungslinien der Endpunkte dieser Sehnen das überschlagene Viereck $BCAD$, welches zum vollständigen Vierseit ergänzt, die weiteren Eckpunkte G und E erhält, und es gilt wieder der Satz, dass der Durchschnittspunkt F der Diagonalen AD, BC der Pol der Diagonale EG ist. Es gilt also allgemein der Satz:

Der Durchschnittspunkt zweier beliebiger Sehnen eines Kreises ist der Pol zu derjenigen Geraden, welche die Durchschnittspunkte der beiden übrigen Paare von Verbindungslinien der Endpunkte dieser Sehnen verbindet.

Man kann diesen Satz auch wie folgt aussprechen: Verlängert man die Seiten eines einfachen Sehnenvierecks, sodass das zugehörige vollständige Vierseit entsteht, so bildet der Durchschnittspunkt der beiden inneren Diagonalen mit den beiden äusseren Eckpunkten ein Dreieck, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite ist.

Der vorstehende Satz giebt ein Mittel, um zu irgend einem gegebenen

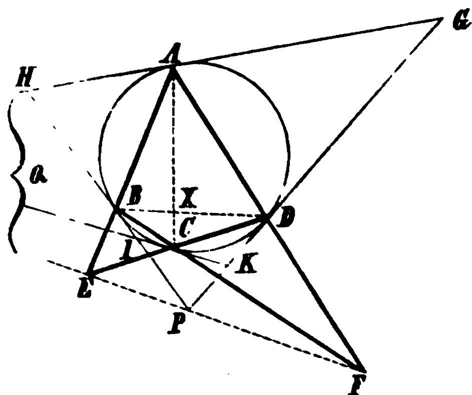
Punkte und einem gegebenen Kreise die Polare mittelst des Lineals allein zu zeichnen. Ist nämlich E der gegebene, ausserhalb des Kreises liegende Punkt, so ziehe man durch E zwei beliebige Transversalen, welche den Kreis bezw. in B, A und C, D schneiden mögen, ergänze durch die Linien BC, AD, welche einander in F schneiden, das betreffende vollständige Vierseit, ziehe die nicht durch E gehenden Diagonalen AC und BD desselben und verbinde den Durchschnittspunkt G der letzteren mit F. Die Gerade GF ist die verlangte Polare. — Dieselbe Construction gilt, wenn der gegebene Punkt ein innerhalb des Kreises liegender G ist. Man ziehe wieder durch G die beliebigen Transversalen AC, BD, ergänze das zugehörige vollständige Vierseit und bestimme die Durchschnittspunkte E von AB und CD, sowie F von AD und BC und ziehe endlich die gesuchte Polare EF.

Da die Polare EG den Kreis in den Endpunkten der zu F gehörigen Berührungssehne schneiden muss, so lässt sich mit Hülfe der vorstehenden Construction in leicht ersichtlicher Weise auch die Aufgabe lösen: Von einem ausserhalb eines Kreises gegebenen Punkt F die Tangenten an den Kreis ohne Anwendung des Zirkels zu ziehen.

4. Zieht man zu allen Eckpunkten einer geradlinigen Figur die Polaren in Beziehung auf einen festen Kreis, so bilden diese Polaren die Seiten einer zweiten Figur, welche die Polarfigur der ursprünglichen genannt wird. Da der Durchschnittspunkt der Polaren zweier Punkte A, B der Pol der Verbindungslinie dieser Punkte ist, so sind auch die Eckpunkte der Polarfigur die Pole der entsprechenden Seiten der ursprünglichen. Diese letztere ist also die Polarfigur ihrer Polarfigur.

Allgemeiner kann man sagen, dass wenn zu jedem Punkt irgend einer Figur die Polare und zu jeder Geraden derselben der Pol in Beziehung auf einen festen Kreis construirt wird, diese Polaren und Pole eine zweite Figur bilden. und dass jede dieser beiden Figuren die Polarfigur der anderen genannt wird. Man sagt auch, die zweite Figur sei aus der ersten durch Polarisation entstanden.

Unmittelbar aus dieser Erklärung in Verbindung mit früheren Sätzen folgt: Die Polarfigur einer Punktreihe ist ein Strahlenbüschel und umgekehrt. — Die Polarfigur eines Tangenten-n-Ecks des festen Kreises ist das Sehnen-n-Eck, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte des ersteren sind, und umgekehrt ist die Polarfigur eines Sehnen-n-Ecks des festen Kreises das Tangenten-n-Eck, dessen Berührungspunkte die Eckpunkte des ersteren sind.



Es sei $HGKI$ ein Tangenten-Viereck und $ABCD$ das durch Polarisation aus demselben entstandene Sehnen-Viereck, und beide Vierecke seien zu den zugehörigen vollständigen Vierseiten ergänzt. Dann ist, wie früher gezeigt, der Durchschnittspunkt X der inneren Diagonalen des Sehnen-Vierseits der Pol der äusseren Diagonale EF desselben. Ferner ist E der Durchschnittspunkt der Polare AB von H und der Polare CD von K, daher der Pol der Verbindungs-

linie dieser beiden Punkte, d. i. der Diagonale HK des Tangenten-Vierseits. Ebenso ist F als Durchschnittspunkt der Polare AD von G und der Polare BC von I der Pol der Diagonale IG. Hieraus folgt endlich, dass der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen HK und IG der Pol der Verbindungslinie EF ist, und dass derselbe folglich mit dem Punkte X zusammenfallen muss. Somit hat man den Satz: Die Diagonalen eines Tangenten-Vierecks und die Diagonalen des durch seine Berührungspunkte bestimmten Sehnen-Vierecks schneiden einander in einem und demselben Punkte,

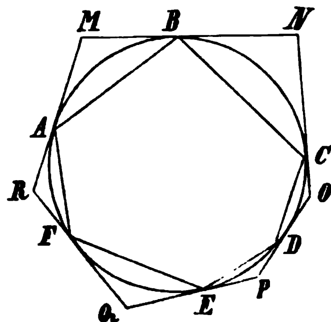
Da ferner der Durchschnittspunkt X der inneren Diagonalen des vollständigen Tangenten-Vierseits zugleich der Pol der äusseren Diagonale PQ desselben sein muss, so ergiebt sich aufs Neue der schon am Schluss des § 79 bewiesene Satz, dass die vier äusseren Eckpunkte E, F, P, Q in gerader Linie liegen.

Aus dem vorstehenden Satz erhält man noch nachstehende Folgerungen:

Da, wie bekannt, E der Pol von XF, zugleich aber, wie so eben gezeigt, E der Pol von HK ist, so geht die Diagonale HK des Tangenten-Vierecks in ihrer Verlängerung durch den äusseren Eckpunkt F des Sehnen-Vierseits, und ebenso muss die Verlängerung der Diagonale GI des ersteren durch den äusseren Eckpunkt E des letzteren gehen. — Die Punkte E, F und P, Q sind vier harmonische Punkte. — In jedem vollständigen Tangentenvierseit ist jede Diagonale die Polare des Durchschnittspunktes der beiden anderen.

Jedes vollständige Viereck $ABCD$ wird durch Polarisation zu einem vollständigen Vierseit; dabei werden die einander gegenüberliegenden Eckpunkte des Vierecks zu einander gegenüberliegenden Seiten des Vierseits und die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks zu gegenüberliegenden Eckpunkten des Vierseits, endlich die Diagonalpunkte des ersteren zu den Diagonallinien des letzteren. Ebenso wird ein vollständiges Vierseit durch Polarisation zu einem vollständigen Viereck u. s. w. — Hiernach kann man auch die vorstehenden Sätze ihrem Wortlaut nach abändern.

5. Zu einem Sehnen-Sechseck $ABCDEF$ sei die Polarfigur des ihm umbeschriebenen Kreises, also das entsprechende Tangenten-Sechseck $MNOPQR$ construirt. Nach dem Satze des Pascal liegen die drei Durchschnittspunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten des ersteren in einer Geraden. Da nun M der Pol der Seite AB und P der Pol der gegenüberliegenden Seite ED ist, so muss der Durchschnittspunkt X dieser beiden Seiten der Pol der Diagonale MP des Tangentensechsecks sein. Ebenso ist der Durchschnittspunkt Y von BC und FE der Pol der Diagonale NQ und der Durchschnittspunkt Z von CD und FA der Pol der Diagonale OR. Da nun die drei Pole X, Y, Z in gerader Linie liegen, so folgt dass die genannten drei Diagonalen einander in einem einzigen Punkte schneiden. Der so als Analogon des Pascal'schen Satzes gefundene Satz:



In jedem Tangentensechseck schneiden sich die drei Diagonalen, welche je zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, in einem einzigen Punkte

wird der Satz des Brianchon genannt.

Aus demselben folgen nachstehende Sätze durch Verkürzung des Abstandes

eines oder mehrerer Paare aufeinanderfolgender Berührungspunkte der Seiten bis zum Zusammenfallen derselben, so dass jedesmal ein Eckpunkt als solcher verschwindet, indem er mit jenen beiden Berührungspunkten zusammenfällt (ein Polygonwinkel gleich 180 Grad wird):

Verbindet man in einem Tangenten-Fünfeck einen Eckpunkt mit dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite, so geht die Verbindungslinie durch den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen, welche die Endpunkte dieser Seite mit den übrigen Eckpunkten verbinden.

Jede Diagonale eines Tangenten-Vierecks geht durch die Durchschnittspunkte der beiden Paare von Geraden, welche die beiden anderen Eckpunkte mit den Berührungspunkten je zweier aneinanderstossender Seiten verbinden.

Die drei Ecktransversalen eines Tangenten-Dreiecks, welche durch je einen Berührungspunkt der Seiten gehen, schneiden einander in einem einzigen Punkte.

§ 82. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitspolaren.

1. Im § 59 ist gezeigt worden, dass zwei Kreise zwei Aehnlichkeitspunkte haben und dass diese die Centrallinie der Kreise im Verhältniss der Radien harmonisch theilen. Die dortigen Sätze sollen durch das Nachfolgende weitergeführt werden:

Es seien A, B, C die Mittelpunkte dreier beliebiger Kreise. Zu diesen Kreisen ergeben sich drei Paare Aehnlichkeitspunkte, und zwar sei S' der äussere und Γ' der innere Aehnlichkeitspunkt für die Kreise A und B, und entsprechend seien S'' und Γ'' die betreffenden Punkte für A und C, S''' und Γ''' dieselben für B und C. Endlich seien die Radien der Kreise A, B, C bezüglich gleich r', r'' und r'''. — Betrachtet man das Dreieck ABC, so sind S', S'', S''' auf den Verlängerungen der Seiten desselben liegende Punkte, und es ist

$$MS' : BS' = r' : r'',$$
$$BS''' : CS''' = r'' : r''',$$
$$CS'' : AS'' = r''' : r'.$$

Durch Verbindung dieser drei Gleichungen mittelst Multiplication erhält man

$$MS' \cdot BS''' \cdot CS'' = BS' \cdot CS''' \cdot AS'',$$

und hieraus folgt, dass die Punkte S', S'', S''' in gerader Linie liegen.

Dasselbe lässt sich von je zwei inneren Aehnlichkeitspunkten, z. B. Γ', Γ'' und dem nicht zu ihnen gehörigen äusseren Aehnlichkeitspunkt S''' beweisen, denn von diesen drei Punkten liegen zwei auf Seiten des Dreiecks ABC, der dritte auf der Verlängerung der dritten Seite, und es ist

$$M\Gamma' : B\Gamma' = r' : r'',$$
$$BS''' : CS''' = r' : r'''$$
$$C\Gamma'' : A\Gamma'' = r''' : r',$$

und durch Multiplication ergiebt sich hieraus wieder:

$$M\Gamma' \cdot BS''' \cdot C\Gamma'' = B\Gamma' \cdot CS''' \cdot A\Gamma'',$$

woraus die Behauptung folgt. Ebenso wie Γ', Γ'' und S''' liegen selbstverständlich auch Γ', Γ''' und S'', sowie Γ'', Γ''' und S' in je einer geraden Linie. Man hat also den Satz:

Von den sechs Aehnlichkeitspunkten, welche zu drei Kreisen gehören, liegen sowol die drei äusseren als auch je zwei innere mit dem nicht zugehörigen äusseren in gerader Linie.

Dieser Satz heisst der Lehrsatz des Monge. Die vier Geraden, auf welchen je drei der sechs Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen, heissen die Aehn-

lichkeitsachsen oder Symmetralen dieser Kreise, und zwar diejenige, auf welcher die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen, die äussere, die übrigen innere Aehnlichkeitsachsen.

Aus dem Lehrsatz von MONGE folgen für bestimmte Lagen der drei Kreise bestimmte Sätze als besondere Fälle. Berührt z. B. ein Kreis jeden von zwei anderen gleichartig (d. h. beide von aussen oder beide von innen, bezw. umschliessend), so geht die durch die beiden Berührungspunkte bestimmte Secante des ersteren durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der letzteren; berührt dagegen der eine Kreis die beiden anderen ungleichartig (den einen von aussen, den anderen von innen, oder umschliessend), so geht jene Secante des ersten durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden anderen.

In ganz entsprechender Weise, wie oben der Lehrsatz von MONGE, ergiebt sich der folgende: Die drei Verbindungslinien je eines der Mittelpunkte von drei Kreisen mit dem inneren Aehnlichkeitspunkte der zwei anderen schneiden einander in einem und demselben Punkt. Dasselbe gilt, wenn nur eine der drei Verbindungslinien nach dem inneren, jede der übrigen aber nach dem äusseren Aehnlichkeitspunkt der betreffenden anderen Kreise gezogen ist.

2. Jeder Aehnlichkeitsstrahl zweier Kreise, welcher dieselben schneidet, liefert vier Durchschnittspunkte mit den Kreisen, welche bekanntlich so liegen müssen, dass die zugehörigen Radien zwei Paare paralleler Linien bilden. Je zwei solche Punkte eines Aehnlichkeitsstrahls, welche verschiedenen dieser Paare angehören, von denen also der eine auf dem einen, der andere auf dem anderen Kreise liegt und deren Radien einander nicht parallel sind, heissen potenzhaltende Punkte der beiden Kreise für den betreffenden Aehnlichkeitspunkt. Schneiden zwei Kreise einander, so fallen in jedem Durchschnittspunkt zwei potenzhaltende Punkte für jeden Aehnlichkeitspunkt zusammen.

Es seien P^2, P_1^2 die Werthe der Potenzen irgend eines Aehnlichkeitspunktes S zweier Kreise M, M_1, und ein von S ausgehender Aehnlichkeitsstrahl schneide den Kreis M in A und B, den Kreis M_1 in den bezüglich entsprechenden Punkten A_1 und B_1, sodass also A und B_1 einerseits, sowie B und A_1 andererseits potenzhaltende Punkte für jenen Aehnlichkeitspunkt sind. Dann ist bekanntlich $SA : SA_1 = SB : SB_1$, also

$$SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1.$$

Ferner ist $SA \cdot SB = P^2$ und $SA_1 \cdot SB_1 = P_1^2$, also

$$SA \cdot SB \cdot SA_1 \cdot SB_1 = P^2 \cdot P_1^2.$$

Da aber, wie so eben gezeigt, $SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1$ ist, so folgt

$$(SA \cdot SB_1)^2 = P^2 \cdot P_1^2 \text{ oder}$$

$$SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1 = P \cdot P_1.$$

Da der Werth des Produktes $P \cdot P_1$ für dieselben zwei Kreise und denselben Aehnlichkeitspunkt unveränderlich ist, so muss diese Gleichung in entsprechender Weise für jeden durch S gehenden, die Kreise schneidenden Aehnlichkeitsstrahl gelten, oder sind C, D_1 zwei andere potenzhaltende Punkte für diesen Aehnlichkeitspunkt, so ist auch $SC \cdot SD_1 = P \cdot P_1$, also

$$SA \cdot SB_1 = SC \cdot SD_1,$$

d. h. das Produkt aus den Entfernungen zweier zu demselben Aehnlichkeitspunkt gehöriger potenzhaltender Punkte von diesem Aehnlichkeitspunkt hat für alle solche Paare potenzhaltender Punkte einen und denselben Werth.

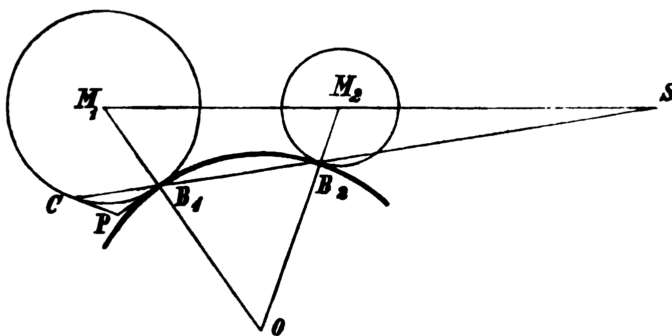
Dieser constante Werth wird die gemeinschaftliche Potenz der beiden Kreise für den betreffenden Aehnlichkeitspunkt genannt.

3. Die Polaren der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise in Beziehung auf den nennt man die **Aehnlichkeitspolaren** der letzteren, und zwar die des äusseren Aehnlichkeitspunktes die äusseren und die des inneren Aehnlichkeitspunktes die inneren Aehnlichkeitspolaren.

Aus dem Lehrsatz von Monge wurde bereits die Folgerung gezogen, dass die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen ein Kreis zwei andere Kreise berührt, durch einen Aehnlichkeitspunkt der letzteren geht. Berührt also ein Kreis O zwei andere Kreise M_1, M_2, so sind die beiden Berührungspunkte potenzhaltende Punkte in Beziehung auf einen Aehnlichkeitspunkt dieser letzteren Kreise, und zwar ist dieser Aehnlichkeitspunkt der innere oder der äussere, je nachdem O die Kreise M_1, M_2 ungleichartig oder gleichartig berührt.

Man nennt denjenigen Aehnlichkeitsstrahl zweier Kreise, welcher durch die Berührungspunkte derselben mit einem dritten Kreise geht, einen **Berührungsstrahl** derselben.

Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O gleichartig berührt, so geht jede ihrer äusseren Aehnlichkeitspolaren durch den zu demselben Kreis gehörigen Pol des Berührungsstrahls, denn berührt der Kreis O den Kreis M_1 in B_1 und M_2 in B_2 und schneidet der Aehnlichkeitsstrahl



SB_2B_1 den Kreis M_1 zum zweitenmal in C, so müssen sich die Polaren der drei in gerader Linie liegenden Punkte C, B_1, S in einem und demselben Punkte schneiden. Nun sind die in C, bezw. B_1 an M_1 gelegten Tangenten die Polaren dieser Punkte, und somit ist der Durchschnittspunkt P dieser Tangenten jener Punkt, durch welchen auch die Polare von S für den Kreis M_1 gehen muss. Dieser Punkt P ist ferner als Durchschnittspunkt der Polaren CP, B_1P der Pol von CB_1, d. h. der Pol des Berührungsstrahls SC für den Kreis M_1.

In ganz analoger Weise kann bewiesen werden, dass, wenn zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt werden, jede ihrer inneren Aehnlichkeitspolaren durch den zu demselben Kreise gehörenden Pol des Berührungsstrahls geht.

Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O gleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung des Mittelpunkts O von der Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 zu der Entfernung des Mittelpunkts irgend eines dieser letzteren Kreise von der äusseren Aehnlichkeitspolare desselben Kreises wie der Radius ρ von O zu dem Radius r des genannten anderen Kreises. — Die Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 geht nämlich, wie bekannt, durch den Durchschnittspunkt K der Potenzlinie von O und M_1 und der Potenzlinie von O und M_2, d. h. durch den Durchschnittspunkt der in den Berührungspunkten B_1 und B_2 an O gelegten Tangenten. Die durch K senkrecht zur Centrallinie M_1 M_2 gehende Gerade ist also jene Potenzlinie. Da die Aehnlichkeitspolare PQ ebenfalls senkrecht zu M_1M_2 ist

so ist PQ jener Potenzlinie parallel. Zieht man nun OL senkrecht zu letzterer sowie die Tangente KB_1P und verbindet O mit K, so ist LO parallel zu M_1Q, und da OK senkrecht zu der Berührungssehne B_1B_2 des Punktes K für den Kreis O und M_1P senkrecht zu B_1C steht, so ist M_1P parallel zu OK, also $\triangle M_1PQ \infty \triangle LOK$, folglich $OL : M_1Q = OK : M_1P$. Nun ist $OK : M_1P = OB_1 : M_1B_1 = \rho : r$, woraus sich endlich die obige Behauptung ergiebt.

In analoger Weise lässt sich der Satz beweisen: Werden zwei Kreise M_1, M_2 von einem dritten Kreise O ungleichartig berührt, so verhält sich die Entfernung des Mittelpunktes O von der Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 zu der Entfernung des Mittelpunkts eines dieser letzteren Kreise von der inneren Aehnlichkeitspolare desselben Kreises, wie der Radius von O zu dem Radius des genannten anderen Kreises.

Es mögen ferner drei Kreise M_1, M_2, M_3 von einem vierten Kreise O gleichartig berührt werden. Man construire die Potenzlinie von M_1 und M_2 sowie die äussere Aehnlichkeitspolare dieser letzteren Kreise für M_1 und ziehe OL_1 senkrecht zur ersteren, M_1Q_1 senkrecht zur letzteren Linie. In gleicher Weise construire man die Potenzlinie, die äussere Aehnlichkeitspolare und die Senkrechten OL_2 und M_1Q_2 für die Kreise M_1 und M_3. Der Durchschnittspunkt P der Potenzlinien ist dann bekanntlich der Potenzpunkt und der Durchschnittspunkt P_1 der Aehnlichkeitspolaren der Pol der äusseren Aehnlichkeitsachse der Kreise M_1, M_2, M_3. Nun sind die Seiten des Vierecks $M_1Q_1P_1Q_2$ paarweise den Seiten des Vierecks OL_1PL_2 parallel, und es ist $M_1Q_1 : OL_1 = M_1Q_2 : OL_2 = r : \rho$. Man kann ferner leicht zeigen, dass auch $M_1P_1 \parallel OP$ und $M_1P_1 : OP = r : \rho$ ist. Hieraus folgt dass P_1B_1P eine gerade Linie sein muss, oder der Satz: Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt der ersteren mit dem Pol ihrer äusseren Aehnlichkeitsachse für irgend einen derselben mit dem Berührungspunkte dieses Kreises in gerader Linie.

In analoger Weise lässt sich wieder der entsprechende Satz beweisen: Werden drei Kreise von einem vierten ungleichartig berührt, so liegt der Potenzpunkt der ersteren mit dem Pol einer ihrer inneren Aehnlichkeitsachsen für irgend einen dieser Kreise mit dem Berührungspunkt desselben Kreises in gerader Linie. Die betreffende innere Aehnlichkeitsachse ist jedesmal diejenige, welche den äusseren Aehnlichkeitspunkt derjenigen beiden Kreise enthält, welche von dem vierten Kreise gleichartig berührt werden.

Da der Potenzpunkt P der Kreise M_1, M_2, M_3, der Berührungspunkt B_1 von M_1 mit dem vierten Kreise O und der Pol P_1 der betreffenden Aehnlichkeitsachse A_1A_2 zufolge der beiden vorhergehenden Sätze stets in gerader Linie liegen, so gehen die Polaren dieser drei Punkte für den Kreis M_1 durch einen und denselben Punkt. Nun ist die Polare für B_1 die durch B_1 gehende gemeinschaftliche Tangente der Kreise M_1 und O und die Polare von P_1 die Aehnlichkeitsachse A_1A_2. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Polaren ist also zugleich der Durchschnittspunkt derselben mit der Polare von P, und man hat den Satz:

Werden drei Kreise von einem vierten berührt, und construirt man die drei Polaren des Potenzpunktes der ersteren in Beziehung auf dieselben, so schneidet jede dieser Polaren eine der vier Aehnlichkeitsachsen der drei Kreise in einem solchen Punkte, dass eine von ihm an den zugehörigen Kreis gezogene Tangente diesen in seinem Berührungspunkt mit dem vierten Kreise trifft.

4. In allen vorstehenden Untersuchungen kann jeder der Kreise M_1, M_2, M_3

durch einen Punkt ersetzt werden, indem man sich denkt, dass der stetig abnehmende Radius dieses Kreises schliesslich gleich Null geworden sei. In gleicher Weise kann man sich auch den Radius stetig zunehmend denken und schliesslich denselben unendlich gross annehmen, wodurch der Kreis in eine Gerade übergeht.

Für einen Kreis und einen Punkt ist offenbar der letztere gleichzeitig äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt, und dasselbe gilt für einen Punkt und eine Gerade. Für einen Kreis und eine Gerade sind die Endpunkte des zu letzterer senkrechten Durchmessers des ersteren die Aehnlichkeitspunkte.

Die nähere Ausführung dieser Untersuchungen wird hier der eigenen Thätigkeit des Lesers, eine vollständigere und systematische Kenntniss der Lehren der neueren Geometrie dem Studium der besonderen einschlägigen Werke überlassen, von denen wir als grundlegende STEINER, Systematische Entwicklung, v. STAUDT, Geometrie der Lage, CHASLES, Géometrie supérieure, sowie MOEBIUS, Barycentrischer Calcul namhaft machen. Im Folgenden soll nur noch die Anwendung vorstehender Lehren zur Auflösung des im § 76 erwähnten Problems des APOLLONIUS kurz angegeben werden.

5. Als der allgemeinste Fall der betreffenden Aufgabe kann für die Ebene derjenige betrachtet werden, in welchem verlangt wird, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt. Lässt man nämlich in der Auflösung desselben einen oder mehrere dieser letzteren Kreise, wie vorher unter 4 gezeigt, in Punkte oder gerade Linien übergehen, so erhält man die Auflösungen der übrigen besonderen Fälle des allgemeinen Problems. Es wird daher für den vorliegenden Zweck die Behandlung jenes einen Falles genügen. — Die Construction des gesuchten Kreises ergiebt sich für denselben ohne Weiteres aus dem letzten der in diesem Paragraph unter 3 abgeleiteten Sätze wie folgt:

Man construire den Potenzpunkt P der drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 und eine ihrer Aehnlichkeitsachsen $A_1 A_2$, ferner die Polare von P für einen der gegebenen Kreise, z. B. M_1, und ziehe von dem Durchschnittspunkt dieser Polare mit der Aehnlichkeitsachse eine Tangente an diesen Kreis M_1. Der Berührungspunkt B_1 dieser Tangente ist zugleich der Berührungspunkt zwischen dem Kreise M_1 und dem gesuchten O, und der Mittelpunkt des letzteren ist der Durchschnittspunkt der durch B_1 und den Mittelpunkt M_1 gehenden Geraden mit der von P auf $A_1 A_2$ gefällten Senkrechten. — Ist bei dieser Construction die gewählte Aehnlichkeitsachse $A_1 A_2$ die äussere, so berührt der gesuchte Kreis O die drei gegebenen gleichartig, ist dagegen $A_1 A_2$ eine innere Aehnlichkeitsachse, so berührt O diejenigen gegebenen Kreise gleichartig, deren äusserer Aehnlichkeitspunkt auf $A_1 A_2$ liegt, den dritten aber ungleichartig. — Da man jede der vier Aehnlichkeitsachsen benutzen kann und dabei jedesmal von ihrem Durchschnittspunkt mit der Polare zwei Tangenten an M_1 möglich sein können, so kann die Anzahl der Kreise O, welche der Aufgabe genügen, bis zu acht betragen. Die nähere Untersuchung dieser verschiedenen Auflösungen je nach der gegenseitigen Lage und Grösse der drei gegebenen Kreise, insbesondere auch die Angabe der Bedingungen, unter welchen sich jene Anzahl von acht Auflösungen auf eine kleinere reducirt, möge hier der Kürze halber übergangen werden, ebenso die Abänderung, welche mit der Construction vorzunehmen ist, wenn die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise in gerader Linie liegen.

Stereometrie.

Bearbeitet von

Dr. F. Reidt

in Hamm.

Einleitung.

1. Durch einen Punkt im Raume lassen sich unzählig viele Gerade gezogen denken; durch zwei Punkte ist auch im Raume die Lage einer Geraden bestimmt.

Durch einen Punkt im Raume lassen sich unzählig viele Ebenen gelegt denken. Jede Ebene, welche durch zwei gegebene Punkte gelegt ist, enthält zufolge des Begriffs der Ebene die durch diese Punkte bestimmte Gerade ihrer ganzen Länge nach in sich. Aus ihrer Ausdehnung nach zwei Dimensionen aber folgt, dass ihre Lage durch diese Gerade noch nicht bestimmt sein kann; die Ebene kann vielmehr unendlich viele Lagen annehmen, ohne dass jene Gerade aufhört, in ihr zu liegen. Der Uebergang aus einer dieser Lagen in die andere erfolgt durch Drehung um jene Gerade als Drehungsachse. Diese drehende Bewegung wird aufgehoben durch Annahme eines weiteren, ausserhalb dieser Achse liegenden festen Punktes. Somit ergiebt sich:

Eine Ebene ist ihrer Lage nach bestimmt durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte,

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder durch zwei einander schneidende Gerade, oder durch drei gerade Linien, welche einander gegenseitig in verschiedenen Punkten schneiden.

In jedem dieser Fälle lässt sich also durch die gegebenen Stücke eine Ebene und zwar nur eine einzige legen. Dass auch durch zwei parallele Gerade sich stets eine Ebene legen lässt, folgt aus der Erklärung solcher Geraden, in welcher diese Eigenschaft als Bedingung enthalten war. Dass sich aber durch zwei parallele Gerade stets nur eine einzige Ebene legen lässt, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Entsprechendes gilt von einem Kreise.

Zwei von einem und demselben Punkte ausgehende Gerade bilden auch im Raume einen ebenen Winkel. Ebenso ist jedes Dreieck eine ebene Figur. Dagegen liegen vier oder mehr Punkte, oder deren Verbindungslinien nicht nothwendig in einer und derselben Ebene.

2. Da durch zwei Punkte die Lage einer Geraden bestimmt ist, so sind für die gegenseitige Lage zweier verschiedenen Geraden auch im Raume nur die

beiden Fälle denkbar, dass sie einen Punkt gemeinsam haben, also einander in diesem Durchschnittspunkt schneiden, oder dass sie in ihrer ganzen unbegrenzten Erstreckung keinen Punkt gemeinsam haben. Im letzteren Falle sind sie jedoch nicht nothwendig einander parallel, denn legt man durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt die Ebene und zieht dann eine Gerade durch diesen Punkt und einen zweiten, ausserhalb der Ebene liegenden Punkt, so können die beiden geraden Linien einander nicht schneiden, sind aber auch nicht einander parallel, da sie nicht in derselben Ebene liegen. Solche Linien sollen windschiefe oder einander kreuzende Gerade genannt werden.

3. Ueber die möglichen Lagen einer Geraden zu einer Ebene oder einer Ebene zu einer Ebene wird in den nächsten Abschnitten gehandelt. Vorläufig kann über dieselben Folgendes angegeben werden:

Da eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinsam hat, ganz in die Ebene fällt, so sind, wenn hiervon abgesehen wird, nur noch zwei verschiedene Lagen einer Geraden gegen eine Ebene denkbar. Sie kann nämlich mit der Ebene entweder einen einzigen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam haben. Die Möglichkeit des ersteren Falles leuchtet sogleich ein, da man jeden Punkt einer Ebene mit jedem ausserhalb der letzteren liegenden Punkt durch eine Gerade verbinden kann. Man sagt dann, die Gerade und die Ebene schneiden einander in jenem Punkte, dem Durchschnittspunkt. Die Möglichkeit des zweiten Falles bedarf dagegen eines Beweises, welcher daher im Folgenden noch wird gegeben werden müssen.

Zwei Ebenen, welche einen Punkt gemeinsam haben, ohne ganz zusammenzufallen, werden einander schneidende Ebenen genannt. Zwei solche Ebenen haben immer eine Linie gemeinsam; dies folgt aus ihrer Ausdehnung nach zwei Dimensionen.

Die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist stets eine Gerade, denn wäre dies nicht der Fall, so liessen sich in der Durchschnittslinie drei nicht in gerader Linie liegende Punkte annehmen, welche also beiden Ebenen gemeinsam wären. Da aber durch drei solche Punkte die Lage einer Ebene bestimmt ist, so müssten die beiden Ebenen gegen die Voraussetzung einander decken.

Hieraus ergiebt sich ferner, dass bei zwei Ebenen nur die folgenden Lagen gegen einander zulässig sind: 1. sie haben keinen Punkt gemeinsam, 2. sie schneiden einander in einer Geraden, 3. sie fallen zusammen. — Die Möglichkeit des ersten Falles bedarf noch des Beweises.

Im Vorstehenden sind die Geraden und Ebenen, wie selbstverständlich, als unbegrenzt gedacht. Eine begrenzte Ebene könnte beispielsweise noch bewegt werden, ohne damit aufzuhören, dieselben drei, nicht in gerader Linie liegenden Punkte zu enthalten. Diese Bewegung würde eine gleitende längs der eigenen Erstreckung der Ebene sein. — Jede begrenzte Ebene lässt sich über ihre Grenzen bis in's Unendliche erweitern.

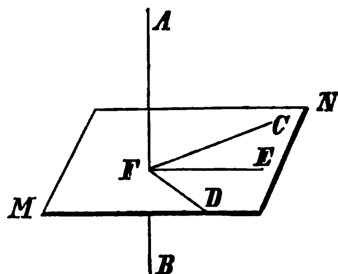
Erster Abschnitt:
Verbindungen von Geraden oder Ebenen.

Kapitel 1.
Verbindung einer Ebene mit Geraden.

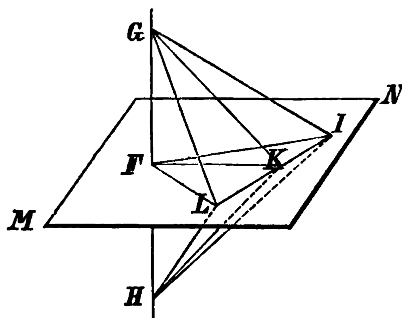
§ 1. Senkrechte Gerade.

1. Wir nehmen zunächst den Fall an, dass eine Gerade AB eine Ebene MN schneide. Durch den Durchschnittspunkt F, welcher auch der Fusspunkt der Geraden genannt wird, lassen sich unendlich viele in der Ebene MN liegende gerade Linien ziehen, und es bietet sich der Untersuchung zunächst die Frage nach der Lage der Geraden AB gegen diese verschiedenen Linien dar.

Denkt man sich durch die Schenkel eines im Raume gegebenen Winkels AFC zwei zusammenfallende Ebenen gelegt und darauf die eine derselben um einen der Schenkel, z. B. AF, gedreht und in einer zweiten Lage AFD festgehalten, so lässt sich durch die beiden Schenkel FC, FD eine Ebene legen. Die in ihrer Lage unverändert gebliebene Gerade AF bildet dann mit den zwei Geraden FC, FD dieser Ebene gleiche Winkel. War insbesondere der ursprüngliche Winkel ein rechter, so steht die Gerade AF auf zwei Geraden der Ebene DFC zugleich senkrecht.



Es ist also möglich, eine Gerade AB und eine Ebene MN so zu construiren, dass erstere mit zwei durch ihren Fusspunkt in letzterer gezogenen Geraden FC, FD zugleich rechte Winkel bildet. Zieht man in diesem Falle eine beliebige dritte Gerade FE in der Ebene durch den Fusspunkt von AB, so lässt sich beweisen, dass AB auch auf FE senkrecht stehen muss. Denn trägt man auf AB von F aus gleiche Strecken FG, FH ab, schneidet ferner die drei Geraden FC, FE, FD durch eine vierte Gerade bezüglich in I, K, L und verbindet G und H mit diesen drei Durchschnittspunkten, so ist — wie leicht aus den betreffenden planimetrischen Sätzen nachweisbar —



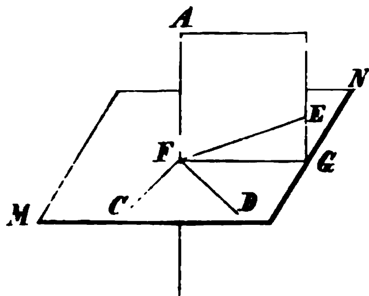
1. $\triangle GFI \cong \triangle HFI$, daher $GI = HI$,
2. $\triangle GFL \cong \triangle HFL$, daher $GL = HL$,
3. $\triangle GIL \cong \triangle HIL$, daher $\angle GLI = \angle HLI$,
4. $\triangle GLK \cong \triangle HLK$, daher $GK = HK$,
5. $\triangle GFK \cong \triangle HFK$, daher $\angle GFK = \angle HFK$.

Da nun diese letzteren Winkel zugleich in der durch GH und FK bestimmten Ebene Nebenwinkel sind, so muss jeder derselben ein rechter sein, d. h. GF muss senkrecht auf FK stehen.

Dass in dem vorstehenden Beweise die congruenten Dreiecke nicht in derselben Ebene liegen, hindert nicht die Anwendung der in der Planimetrie bewiesenen Congruenzsätze, denn die Gestalt und Grösse der Dreiecke wird durch Verlegung derselben in verschiedene Ebenen nicht beeinflusst.

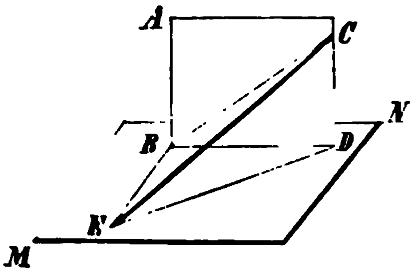
Eine Gerade, welche auf zwei Geraden einer Ebene senkrecht steht, steht somit auf allen durch ihren Fusspunkt gehenden Geraden dieser Ebene senkrecht (1). Eine solche Gerade und eine solche Ebene heissen senkrecht zu einander. Zum Nachweis, dass eine Gerade zu einer Ebene senkrecht stehe, genügt es also zu zeigen, dass sie auf zwei Geraden dieser Ebene senkrecht ist. Jede eine Ebene schneidende Gerade, welche nicht senkrecht zu derselben steht, heisst schief zu ihr.

2. Der obige Satz gestattet eine Umkehrung: Steht eine Gerade AB senkrecht zu beliebig vielen Geraden, welche sie sämmtlich in demselben Punkte schneiden, so liegen diese letzteren Geraden in einer und derselben Ebene (2). Denn construirt man durch zwei beliebige dieser Geraden, FC und FD, die Ebene, so ist nur zu zeigen, dass jede dritte dieser Geraden, z. B. FE, in diese Ebene fallen muss. Wäre dies aber nicht der Fall, so müsste die durch AF und FE bestimmte Ebene die Ebene FCD in einer von FE verschiedenen Geraden FG schneiden. Da AF nun zu FC und FD senkrecht ist, und mithin auch zu der Geraden FG derselben Ebene senkrecht stehen müsste, so gäbe es zwei Gerade FE und FG, welche gleichzeitig auf AF in demselben Punkte und in derselben Ebene AFG senkrecht wären, was bekanntlich nicht möglich ist.



Auf einer Geraden können also im Raume unzählig viele gerade Linien in demselben Punkte senkrecht stehen. Der geometrische Ort derselben ist die in diesem Punkte zu der ersten Geraden senkrechte Ebene. — Dreht man die Ebene eines rechten Winkels um einen Schenkel desselben als Achse, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene, und zwar eine, welche zu jener Achse senkrecht steht.

3. Ist AB eine zu einer Ebene MN in B senkrecht stehende Gerade, CD eine zu AB parallele Gerade, welche MN in D treffe, und C ein beliebiger Punkt dieser Parallelen, so kann man in der durch AB und CD gehenden Ebene die Geraden BC und BD ziehen, und es ist CD als Parallele zu AB wie diese zu BD senkrecht. Zieht man noch in MN die Senkrechte in B auf BD, giebt derselben die Länge $BE = CD$ und zieht DE und CE, so ist 1. $\triangle BCD \cong \triangle EBD$ und folglich $BC = DE$, daher auch 2. $\triangle EBC \cong \triangle EDC$, mithin $\angle CDE = \angle CBE$. Da nun EB zu AB und BD, mithin zu der ganzen durch AB und BD bestimmten Ebene, also auch zu der dritten Geraden BC dieser Ebene senkrecht ist, so folgt, dass auch der Winkel CDE ein rechter sein muss. CD steht somit auf zwei Geraden der Ebene MN, nämlich auf BD und ED senkrecht, also gilt der Satz:



Steht eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so steht auch jede zu ihr parallele Gerade auf dieser Ebene senkrecht (3).

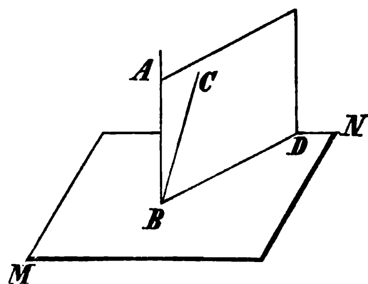
Setzt man umgekehrt voraus, dass *CD* ebenso wie *AB* zu *MN* senkrecht stehe, so ergiebt sich durch eine ganz entsprechende Beweisführung (in umgekehrter Ordnung) oder auch auf indirectem Wege:

Alle geraden Linien, welche zu derselben Ebene senkrecht stehen, sind einander parallel (4).

Im letzteren Satze ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die beiden Senkrechten die Ebene in verschiedenen Punkten treffen. Das Gegentheil hiervon ergiebt sich als unmöglich, oder

Auf derselben Ebene lässt sich in demselben Punkte nicht mehr als eine einzige Senkrechte errichten (5).

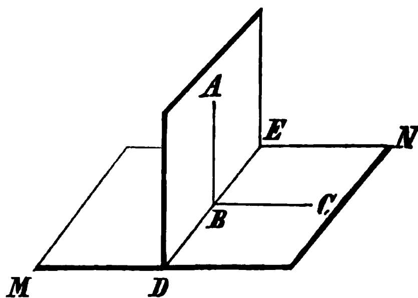
Denn ist *BA* in *B* auf *MN* senkrecht und *BC* irgend eine zweite Gerade, welche *MN* in *B* schneidet, so muss die durch *BA* und *BC* bestimmte Ebene die Ebene *MN* in einer Geraden *BD* schneiden, und da *AB* senkrecht auf *BD* stehen muss, kann die in derselben Ebene liegende *BC* nicht gleichzeitig auf *BD*, und also auch nicht auf der Ebene *MN* senkrecht stehen.



4. Hiermit ist freilich noch nicht erwiesen, dass sich überhaupt in jedem Punkte einer gegebenen Ebene eine senkrechte Gerade errichten lasse, während die entgegengesetzte Behauptung, dass sich durch jeden Punkt einer gegebenen Geraden eine zu dieser senkrechte Ebene legen lässt, leicht aus dem Früheren folgt. Indem wir uns den Beweis für die erstere Behauptung vorbehalten, wollen wir zunächst bemerken, dass sich auch durch jeden Punkt einer gegebenen Geraden nicht mehr als eine einzige zu dieser senkrechte Ebene legen lässt, denn anderenfalls müssten in jeder durch diese Gerade gelegten Ebene zwei Linien — nämlich die Durchschnittslinien der Hülfsebene mit zwei senkrechten Ebenen — gleichzeitig in demselben Punkte auf der Geraden senkrecht stehen.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass durch einen ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt stets eine und nur eine einzige senkrechte Ebene — und ebenso auch nur eine einzige senkrechte Gerade zu jener Geraden gelegt werden kann. Durch einen ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt ferner lässt sich nie mehr als eine einzige zu derselben senkrechte Linie ziehen, denn ist (Fig. S. 391) *AB* von *A* aus senkrecht auf *MN* gefällt und *AC* eine zweite Gerade, welche *MN* in *C* treffe, so schneidet die durch *AB* und *AC* bestimmte Ebene die Ebene *MN* in *BC*, und da *AB* senkrecht auf *BC* ist, so kann nicht in derselben Hülfsebene auch *AC* senkrecht auf *BC* sein.

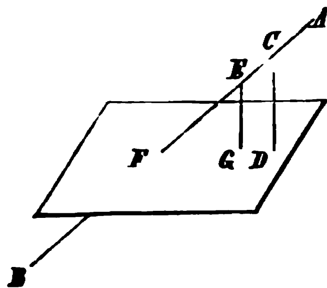
Hiermit ist aber ebenfalls noch nicht bewiesen, dass sich von jedem ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt stets eine senkrechte Gerade auf die Ebene fällen lasse. — Um diesen, sowie den oben vorbehaltenen Beweis zu liefern, seien durch einen in der Ebene *MN* gegebenen Punkt *B* in dieser Ebene zwei



beliebige Gerade unter einem rechten Winkel DBC zu einander gezogen. Dreht man nun die Ebene eines mit diesem Winkel zusammenfallenden Winkels um BC, so beschreibt der andere Schenkel eine zu BC senkrechte Ebene. In dieser letzteren lässt sich die Senkrechte BA auf BD errichten, und BA muss zugleich eine der Lagen sein, welche der die Ebene beschreibende Schenkel nacheinander einnahm; mithin steht BA zu BC und zu BD gleichzeitig, also auch zu MN senkrecht, und es ist somit bewiesen, dass sich in jedem Punkte A einer Ebene eine zu dieser senkrechte Gerade errichten lässt. Da man aber durch jeden ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt zu jeder beliebigen auf der Ebene senkrecht errichteten Geraden die Parallele ziehen kann, so folgt mit Hülfe des Früheren auch die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

§ 2. Schiefe Gerade.

1. Es sei AB eine Gerade, welche zu einer Ebene MN schief stehe, und F ihr Fusspunkt. Von zwei beliebigen Punkten C, E der Geraden seien die Senkrechten CD, EG auf MN gefällt, so ist $CD \parallel EG$, daher durch CD und EG eine Ebene möglich, welche MN in der durch D und G gehenden Geraden schneiden muss. Da in dieser Ebene die beiden Punkte C und E der schiefen Geraden liegen, also auch diese letztere selbst ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Ebene fällt, so muss auch F in letzterer, und somit in der Durchschnittslinie DG liegen. Die Punkte D, G, F liegen also stets in gerader Linie.



Hieraus folgt leicht:

Alle von Punkten einer schief stehenden Geraden auf die betreffende Ebene gefällten Senkrechten liegen in einer und derselben Ebene; ihre Fusspunkte liegen in einer einzigen, durch den Fusspunkt der schiefen Linie gehenden Geraden (1).

Die von einem Punkt auf eine Ebene gefällte Senkrechte heisst die projicirende Linie des Punktes in Beziehung auf die Ebene; der Fusspunkt der Senkrechten heisst die Projection des Punktes auf die Ebene. Der geometrische Ort der Projectionen aller Punkte einer Linie auf eine Ebene wird die Projection, der geometrische Ort der projicirenden Linien jener Punkte die projicirende Fläche dieser Linien genannt.

Die projicirende Fläche einer schiefen Linie auf die betreffende Ebene ist also selbst eine Ebene; die Projection der Linie ist eine Gerade.

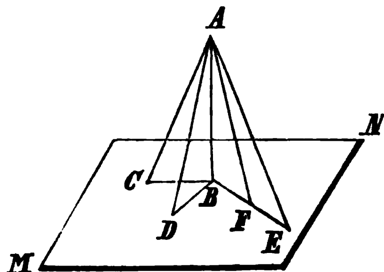
Der Winkel zwischen einer schiefen Linie und ihrer Projection heisst der Neigungswinkel jener Linie gegen die Ebene; die Projection wird auch der Neigungsschenkel genannt.

2. Werden von einem Punkte A ausserhalb einer Ebene MN die Senkrechte AB und beliebige schiefe Linien AC, AD, AE, ... gezogen, so ergiebt sich durch die mit Hülfe der Verbindungslinien BC, BD, BE, ... entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke,

1) dass die Senkrechte die kürzeste Linie zwischen A und MN ist; Daher nennt man die Länge dieser Senkrechten den Abstand oder die Entfernung des Punktes von der Ebene.

2) Alle schiefen Linien AC, AD, deren Fusspunkte gleich weit vom Fuss-

punkt der Senkrechten abstehen, sind gleich lang und haben gleiche Neigungswinkel gegen die Ebene, denn die Dreiecke ABC, ABD sind congruent. Umgekehrt haben alle von A nach Punkten von MN gehenden Geraden von gleicher Länge auch gleiche Abstände der Fusspunkte vom Fusspunkt der Senkrechten (also gleichlange Projectionen), sowie gleiche Neigungswinkel, und Gerade dieser Art, welche gleiche Neigungswinkel gegen die Ebene haben, sind gleichlang.



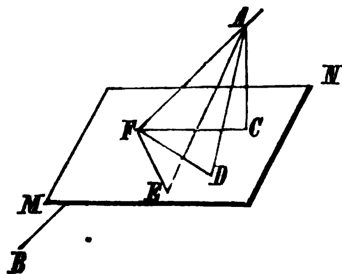
3) Je grösser der Abstand des Fusspunktes einer solchen Linie vom Fusspunkt der Senkrechten ist, desto länger ist die Linie und desto kleiner ihr Neigungswinkel gegen die Ebene. Denn ist $BE > BD$, so mache man $BF = BD$ und ziehe AF, dann ist $AF = AD$, und der Satz auf einen bekannten planimetrischen zurückgeführt. Auch hier gelten, wie leicht ersichtlich, zwei Umkehrungen.

Zwischen der Länge p der Senkrechten AB, der Länge a einer beliebigen der schiefen Linien und der Entfernung r der Fusspunkte beider besteht die Gleichung

$$a^2 = p^2 + r^2,$$

welche die Berechnung einer jeden dieser drei Grössen aus den übrigen gestattet. Mit Hülfe derselben können auch die vorhergehenden Sätze unter 2) und 3) bewiesen werden.

3. Es sei FC die Projection von AB auf MN, FD eine beliebige andere von F ausgehende Gerade in MN, AC senkrecht auf MN und $FD = FC$ gemacht. Verbindet man noch A mit D, so ist nach No. 2 dieses Paragraphen $AD > AC$, und da die Dreiecke AFC, AFD in den beiden anderen Seiten übereinstimmen, so folgt aus Planimetrie § 19. (2), dass $\angle AFD > \angle AFC$ ist.



Der Neigungswinkel ist also der kleinste Winkel, welchen eine zu einer Ebene schief stehende Gerade mit Linien dieser Ebene bildet (3).

4. Ist FE eine dritte von F ausgehende Gerade in MN, welche man sich auf der anderen Seite von FC gezeichnet denke, $\angle EFC = \angle DFC$, $FE = FD$ gemacht, AC wieder senkrecht auf MN, und sind AD und AE, sowie DC und EC gezogen, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke DFC und EFC, dass $DC = EC$ und mithin aus No. 2 dieses Paragraphen, dass $AD = AE$ ist. Daher sind auch die Dreiecke AFD, AFE congruent, also ist $\angle AFD = \angle AFE$.

Liegt dagegen FE (auf derselben Seite von FC oder auf verschiedener mit FD) so, dass wie in obiger Figur $\angle EFC > DFC$ ist, so folgt entsprechend aus der Nichtcongruenz der Dreiecke DFC und EFC [Plan. §. 19, (1)], dass $EC > DC$, und mithin aus No. 2 dieses Paragraphen, dass $AE > AD$ ist. Die Nichtcongruenz der Dreiecke AFD, AFE [Plan. § 19, (2)] führt damit weiter zu der Folgerung, dass $\angle AFE > AFD$ ist.

Zieht man auf jeder Seite des Neigungsschenkels FC von F aus in MN eine Gerade unter einem rechten Winkel gegen FC, so müssen nach dem Obigen

die entstandenen Winkel AFE', AFE einander gleich sein. Da aber jetzt die Schenkel FE', FE in eine und dieselbe Gerade fallen müssen, so sind diese Winkel in der durch AF und EE' bestimmten Ebene Nebenwinkel und somit rechte. Die schiefe Linie steht also senkrecht zu derjenigen Geraden der Ebene, welche zu ihrer Projection in ihrem Fusspunkt senkrecht steht (4).

5. Die Zusammenstellung der vorstehenden Sätze ergiebt: Denkt man sich einen von F ausgehenden Strahl in MN um F gedreht; so dass derselbe nach und nach die Lagen aller möglichen von F ausgehenden Strahlen der Ebene erhält, so hat der Winkel dieses Strahls mit der schiefen Linie AB seinen kleinsten Werth, wenn der Strahl mit dem Neigungsschenkel zusammenfällt; von da an wächst jener Winkel und bleibt dabei so lange ein spitzer, als der Winkel des Strahls und des Neigungsschenkels ein spitzer ist; er ist ein rechter, wenn auch dieser letztere ein rechter ist, und wird stumpf, wenn der letztere stumpf wird. Er erreicht ferner seinen grössten Werth, wenn der Strahl mit der Verlängerung des Neigungsschenkels über den Fusspunkt zusammenfällt, nimmt dann bei fortgesetzter Drehung des Strahls wieder ab und erhält auf der anderen Seite des Neigungsschenkels in umgekehrter Reihenfolge nach einander dieselben Werthe, wie auf der ersten, dergestalt, dass je zwei gleiche Werthe zu gleichen Winkeln des Strahls mit dem Neigungsschenkel und umgekehrt gehören.

Es kann hiernach keine Gerade geben, welche eine Ebene schneidet und nicht auf wenigstens einer durch ihren Fusspunkt gehenden Geraden dieser Ebene senkrecht steht. Es kann ferner keine Gerade geben, welche eine Ebene schneidet und mit mehr als zwei von ihrem Fusspunkt ausgehenden Strahlen der Ebene gleiche schiefe Winkel bildet, vielmehr muss jede Gerade, welche mit drei oder mehr Geraden einer Ebene gleiche Winkel bildet, zu der Ebene senkrecht stehen.

Es folgen ferner aus dem Vorhergehenden unmittelbar die nachstehenden Sätze:

Fällt man von einem Punkte A ausserhalb einer Ebene MN die senkrechte Gerade AF auf letztere und von dem Fusspunkt F dieser Geraden die Senkrechte FB auf eine beliebige in der Ebene liegende Gerade CD, so steht die Verbindungslinie des Fusspunktes B dieser letzteren Senkrechten und des ausserhalb der Ebene angenommenen Punktes A senkrecht zu der Geraden CD (5^a).

Es ist nämlich in diesem Falle CD die zu der Projection FB von AB in B senkrecht stehende Gerade.

Fällt man umgekehrt von einem Punkte A ausserhalb einer Ebene MN die senkrechte Gerade AF auf diese Ebene und ausserdem die Senkrechte AB auf eine beliebige in letzterer liegende Gerade CD, so steht die Verbindungslinie FB der Fusspunkte senkrecht zu der Geraden CD (5^b).

Fällt man endlich von einem Punkte ausserhalb einer Ebene MN die Senkrechte FB auf eine beliebige Gerade CD dieser Ebene, errichtet in letzterer auf CD die Senkrechte im Fusspunkt B der ersteren Senkrechten und fällt endlich von A auf die zweite Senkrechte wieder die Senkrechte AF, so steht dieses dritte Perpendikel AF senkrecht zu der Ebene MN (5^c).

Der letztere Satz giebt eine Auflösung für die Aufgabe: Auf eine gegebene

Ebene von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkte die senkrechte Gerade zu fällen, sowie auch der anderen, eine solche Senkrechte in einem gegebenen Punkte der Ebene auf dieser zu errichten.

§ 3. Parallele Gerade.

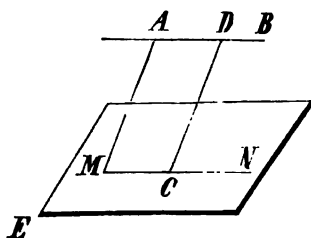
1. Legt man durch eine Gerade *AF*, welche eine Ebene *MN* schneidet, eine beliebige zweite Ebene, so muss die letztere die erstere schneiden, und die Durchschnittslinie beider Ebenen muss durch den Fusspunkt *F* jener Geraden gehen. Ist eine Gerade *AB*, durch welche eine die Ebene *MN* in *CD* schneidende zweite Ebene gelegt worden, dieser Durchschnittslinie parallel, so kann sie auch die Ebene *MN* nicht schneiden. Hiermit ist bewiesen, dass eine gerade Linie so gegen eine Ebene liegen kann, dass sie (in ihrer ganzen Erstreckung) keinen Punkt mit derselben gemeinschaftlich hat. Man sagt in diesem Falle, die Linie und die Ebene seien einander parallel.

Es gilt demnach der Satz: Ist eine ausserhalb einer Ebene liegende Gerade einer Geraden dieser Ebene parallel, so ist sie der Ebene selbst parallel (1).

2. Ist umgekehrt eine Gerade *AB* einer Ebene *MN* parallel, und schneidet eine durch *AB* gelegte zweite Ebene die erstere, so ist die Durchschnittslinie zu *AB* parallel (2). Da nämlich beide Linien in derselben Hülfsebene liegen, so können sie einander nicht kreuzen, hätten sie aber einen Punkt gemeinschaftlich, so müsste *AB* gegen die Voraussetzung diesen Punkt auch mit *MN* gemeinschaftlich haben.

Aus dem Vorigen ergiebt sich zugleich die Auflösung der Aufgabe: Zu einer gegebenen Ebene durch einen ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine parallele Gerade zu ziehen. Man sieht leicht ein, dass unzählig viele solche Parallelen möglich sind.

Umgekehrt lassen sich auch durch jeden ausserhalb einer Geraden gegebenen Punkt unzählig viele zu dieser Geraden parallele Ebenen legen, denn in der durch die Gerade *AB* und den Punkt *C* bestimmten Ebene lässt sich durch *C* die zu *AB* parallele Linie *MN* ziehen, und jede andere durch *MN* gelegte Ebene muss zu *AB* parallel sein.



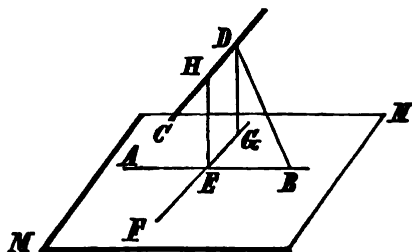
Ist eine Gerade *AB* einer Ebene *E* parallel, so fällt jede Gerade *MN*, welche durch einen Punkt *C* dieser Ebene parallel zu *AB* gelegt werden kann, ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Ebene, denn anderen Falls würde die durch *AB* und *C* bestimmte zweite Ebene *E* in einer von *MN* verschiedenen Geraden *M'N'* schneiden, die dann ebenfalls zu *AB* parallel sein müsste, so dass zu *AB* in derselben Hülfsebene zwei verschiedene parallele Gerade *MN* und *M'N'* durch denselben Punkt *C* gezogen sein würden.

3. Alle von Punkten einer Geraden *AB* nach einer ihr parallelen Ebene gezogenen und unter sich parallelen Geraden liegen in einer und derselben Ebene (3), denn legt man durch *AB* und eine dieser Geraden *DC* die Ebene, so muss jede andere dieser Geraden, z. B. *AM*, in diese Ebene fallen, da sonst die von ihr verschiedene durch die Parallelen *AM* und *DC* bestimmte Ebene gleichwol mit ihr die Gerade *AB* und den Punkt *C* gemeinschaftlich haben würde, was nicht möglich ist.

Die Fusspunkte der genannten parallelen Geraden in E liegen also in geraden Linien MN, und die zwischen AB und MN liegenden Strecken der Parallelen sind gleich lang.

Insbesondere liegen also auch alle von Punkten einer zu einer Ebene E parallelen Geraden AB auf diese Ebene gefällten Senkrechten in einer Ebene und sind gleichlang, oder eine zu einer Ebene parallele Gerade hat von der Ebene überall dieselbe Entfernung.

4. Jede zu einer Ebene parallele Gerade kreuzt sich mit jeder ihr nicht parallelen Geraden dieser Ebene. Sind umgekehrt zwei einander kreuzende Gerade AB und CD gegeben, so lässt sich durch jede derselben eine zu der anderen parallele Ebene legen, denn construirt man zunächst durch CD und einen beliebigen Punkt E von AB eine Hülfsebene, zieht in dieser durch E die Parallele FG zu CD und legt dann die Ebene MN durch AB und FG, so muss MN parallel zu CD sein, da CD parallel zu FG ist. Nimmt man statt des beliebig gewählten Punktes E auf AB irgend einen anderen Punkt an, so erhält man dieselbe Ebene MN wie vorher, da, wie oben gezeigt, jede zu CD parallele, durch einen Punkt von MN gehende Gerade ganz in MN liegen muss. Es ist also durch AB auch nur eine einzige zu CD parallele Ebene möglich; dieselbe ist der geometrische Ort aller durch je einen Punkt von AB gehenden und zu CD parallelen Geraden.



Denkt man sich ferner von allen Punkten der Geraden CD die senkrechten Linien auf MN gefällt, deren geometrischer Ort nach dem Obigen eine Ebene, die sog. projicirende Ebene von CD auf MN ist, so muss die Durchschnittslinie dieses Ortes mit MN, d. i. die Projection von CD auf MN, die kreuzende Gerade AB in einem Punkte E schneiden. Diejenige von einem Punkte H der CD auf MN gefällte senkrechte Linie, deren Fusspunkt E ist, steht zu gleicher Zeit auf beiden sich kreuzenden Geraden AB, CD senkrecht und ist die einzige Linie, welche diese Eigenschaft hat. Dieselbe ist zugleich die kürzeste Linie, welche zwischen den sich kreuzenden Geraden gezogen werden kann, denn ist BD irgend eine andere solche Verbindungslinie, so ziehe man DG parallel zu HE und kann dann leicht zeigen, dass DB grösser als DG, DG aber gleich HE ist. Die zu zwei einander kreuzenden Geraden AB, CD gleichzeitig senkrecht stehende Verbindungsstrecke von Punkten derselben wird daher der Abstand oder die Entfernung jener beiden Geraden von einander genannt. Sie ist identisch mit dem Abstand jeder dieser Geraden von der zu ihr parallelen durch die andere gehenden Ebene.

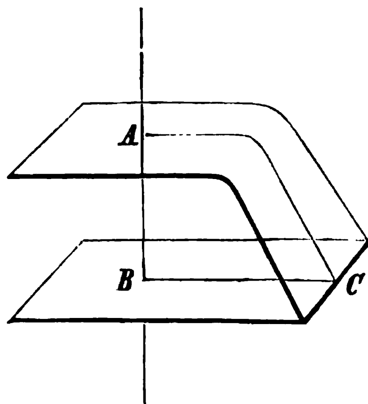
Kapitel 2.

Verbindung einer Ebene mit einer anderen Ebene.

§ 4. Parallele Ebenen.

1. Stehen zwei Ebenen zu einer und derselben Geraden senkrecht, was nach § 1 nur dann, wenn die Ebenen die Gerade in verschiedenen Punkten treffen, dann aber immer möglich ist, so würde die Annahme, dass die beiden Ebenen einen Punkt C gemeinschaftlich hatten, mit Hülfe der durch die senkrechte

Gerade *AB* und den Punkt *C* bestimmten Ebene auf die Folgerung führen, dass in letzterer zwei gerade Linien *AC*, *BC* möglich seien, welche beide zu derselben Geraden senkrecht wären und einander gleichwol in einem Punkte *C* schnitten. Da dies unmöglich ist, so können die erstgenannten Ebenen in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung keinen Punkt gemeinsam haben. Hiermit ist die Möglichkeit paralleler Ebenen erwiesen und der Satz gefunden:



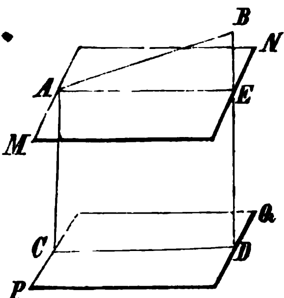
Ebenen, welche zu einer und derselben Geraden senkrecht stehen, sind parallel. (1)

2. Setzt man nun umgekehrt voraus, dass zwei gegebene Ebenen *MN* und *PQ* parallel seien, und zieht man in jeder derselben eine Gerade, so können diese letzteren nur einander parallel sein oder einander kreuzen, denn jeder gemeinschaftliche Punkt derselben müsste auch, entgegengesetzt der Voraussetzung, den Ebenen gemeinschaftlich sein. Das Erstere findet statt, wenn durch die beiden Geraden eine dritte Ebene gelegt werden kann. Man hat somit den Satz:

Parallele Ebenen werden von jeder sie durchschneidenden Ebene in parallelen Durchschnittslinien geschnitten. (2)

Dagegen kann nicht umgekehrt behauptet werden, dass Ebenen, welche von einer anderen Ebene in parallelen Geraden geschnitten werden, einander parallel sein müssten, da es offenbar möglich ist, durch jede von zwei parallelen Geraden einer Ebene und einem und demselben Punkt ausserhalb der letzteren eine Ebene zu legen.

3. Um die Lagen einer Geraden gegen zwei parallele Ebenen allgemein zu untersuchen, nehmen wir zunächst an, dass die Gerade ganz in der einen Ebene liege. Es ist klar, dass sie in diesem Falle der anderen Ebene parallel sein muss, und dass also von ihr die Sätze gelten, welche im vorigen Kapitel von den zu einer Ebene parallelen Geraden bewiesen sind. Umgekehrt muss jede Gerade, welche durch einen Punkt der einen von zwei parallelen Ebenen parallel zu der anderen gelegt wird, ganz in die erstere fallen, denn ist *A* ein Punkt der zu *PQ* parallelen Ebene *MN*, *AB* eine zu *PQ* parallele Gerade, und legt man durch *AB* eine Ebene, welche *PQ* in *CD* schneide, so ist *AB* parallel zu *CD*, gleichzeitig aber auch die Durchschnittslinie *AE* der Hülfsebene und der Ebene *MN* parallel zu *CD*. Da aber in dieser Hülfsebene durch *A* nur eine einzige parallele Gerade zu *CD* gelegt werden kann, so muss *AB* mit *AE* zusammenfallen.



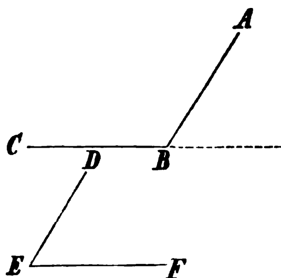
Da sich ferner durch jeden Punkt *A* ausserhalb einer Ebene *PQ* eine zu der von *A* auf *PQ* gefällten senkrechten Geraden senkrechte, also eine zu *PQ* parallele Ebene legen lässt, so folgt:

der geometrische Ort aller Geraden, welche sich durch einen Punkt ausserhalb einer Ebene zu dieser parallel ziehen lassen, ist eine zu ihr parallele Ebene (3a).

Daher muss auch die Ebene jeder zwei einander schneidenden, einer und derselben zweiten Ebene parallelen Geraden dieser letzteren parallel sein.

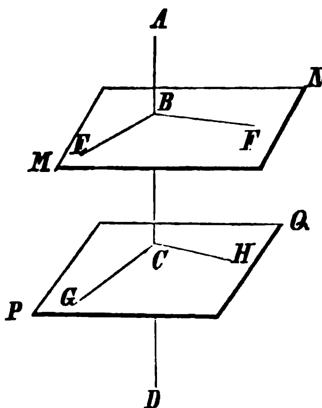
I n s b e s o n d e r e s i n d a l s o a u c h d i e E b e n e n z w e i e r W i n k e l, d e r e n S c h e n k e l p a a r w e i s e p a r a l l e l l a u f e n, e i n a n d e r p a r a l l e l (3b).

Sind dabei die homologen Schenkel dieser Winkel einander gleichgerichtet und trägt man auf jedem Paar derselben vom Scheitelpunkt aus gleiche Strecken $BA = ED$, $BC = EF$ ab, so kann man durch Verbindung von A mit C und von D mit F zwei Dreiecke ABC, DEF erhalten, ferner durch BC und EF einerseits und durch BA und ED andererseits je eine Ebene legen und in diesen bezüglich die Verbindungsstrecken CF und AD, so wie die ihnen gemeinsame Strecke BE ziehen. Dann sind $BCFE$ und $BADE$ Vierecke, in denen bezüglich zwei Seiten parallel und gleich sind, also Parallelogramme, daher ist auch CF parallel und gleich BE, und AD parallel und gleich BE. Hieraus folgt weiter, dass auch CF und AD unter einander parallel und gleich sind, dass also $ACFD$ ebenfalls ein Parallelogramm ist. Die Seiten AC und DF des letzteren sind mithin auch einander gleich, also die in den drei Seiten übereinstimmenden Dreiecke ABC, DEF congruent, also endlich die homologen Winkel ABC und DEF derselben einander gleich. Man hat also den Satz:



W i n k e l i m R a u m e, d e r e n S c h e n k e l p a a r w e i s e p a r a l l e l u n d g l e i c h g e r i c h t e t s i n d, s i n d e i n a n d e r g l e i c h (3c).

Sind beide Schenkelpaare entgegengesetzt gerichtet, so ist jeder dieser Winkel Scheitelwinkel zu einem solchen, dessen Schenkel paarweise denen des anderen parallel und gleichgerichtet sind, also gilt in diesem Falle derselbe Satz. Sind aber die Schenkel BA, ED des einen Paares gleichgerichtet, die des anderen Paares BC, EF entgegengesetzt gerichtet, so ist ABC Nebenwinkel eines dem Winkel DEF gleichen, beide ergänzen also einander zu zwei Rechten.



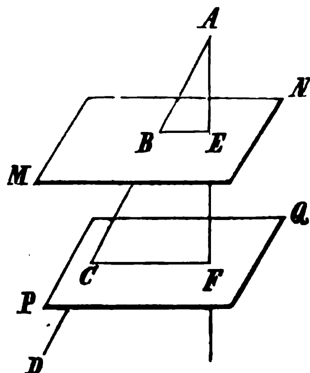
4. Es sei ferner eine Gerade angenommen, welche die eine von zwei parallelen Ebenen MN, PQ schneide. Dieselbe muss dann auch die andere Ebene schneiden, denn wäre sie derselben parallel, so müsste sie, wie gezeigt, ganz in der ersteren liegen. Es sei nun zunächst die Gerade AB senkrecht zu MN in B und treffe PQ in C. Man ziehe in MN durch B zwei beliebige Gerade BE, BF, lege durch AD und BE, sowie durch AD und BF je eine Ebene, bestimme die Durchschnittslinien CG, CH dieser Ebenen mit PQ, so ist CG parallel zu BE, CH parallel zu BF.

Da nun BE und BF beide zu AB senkrecht stehen, da AB senkrecht auf MN ist, so müssen auch CG und CH beide zu AC senkrecht sein, und hieraus folgt wieder, dass AC auch senkrecht zu der Ebene PQ ist. Der so gefundene Satz:

Steht eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so steht dieselbe auch senkrecht zu jeder der letzteren parallelen Ebene (4a)

ist die Umkehrung des an der Spitze dieses Paragraphen stehenden Satzes (1).

Ist ferner AD schief zu MN in B und trifft die zu MN parallele Ebene in C, so kann man von einem beliebigen Punkte A dieser Geraden die Senkrechte AE auf MN fällen, welche dann nach dem vorigen Satze (in ihrer Verlängerung) auch senkrecht zu PQ stehen muss. Legt man nun durch AD und AE die Ebene, so sind die einander parallelen Durchschnittslinien BE, CF derselben mit MN und PQ die Neigungsschenkel von AC gegen diese Ebenen, und die Neigungswinkel ABE, ACF sind als correspondirende an parallelen Linien einander gleich.



Jede Gerade, welche parallele Ebenen schneidet, bildet also mit letzteren gleiche Neigungswinkel (4b).

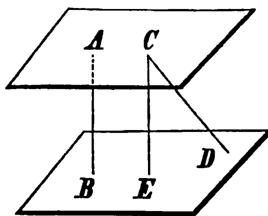
5. Zieht man mehrere zwei parallele Ebenen schneidende Gerade und betrachtet man die zwischen den Ebenen liegenden Abschnitte derselben, so findet man zunächst, dass

parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen gleich lang sind (5a),

denn durch je zwei solche Gerade lässt sich eine Ebene legen, welche die parallelen Ebenen in parallelen Linien schneiden muss, so dass ein Parallelogramm entsteht, in welchem jene ersteren Geraden Gegenseiten sind. Da nun alle auf einer Ebene senkrechten Geraden einander parallel sind, so erhält man insbesondere den Satz: Senkrechte Gerade zwischen parallelen Ebenen sind gleich lang, oder

parallele Ebenen haben überall denselben Abstand von einander (5b).

Die senkrechten Geraden zwischen parallelen Ebenen sind zugleich die kürzesten Strecken, welche man zwischen diesen ziehen kann, denn ist AB eine solche senkrechte, CD eine beliebige schiefe Strecke zwischen zwei parallelen Ebenen, wobei AB und CD in einer Ebene liegen oder auch einander kreuzen können, so fälle man von C die Senkrechte CE auf die andere Ebene, dann ist $CD > CE$, $CE = AB$, also $CD > AB$.



Bezeichnet a die Länge von AB oder den Abstand der parallelen Ebenen, b die Länge und α den Neigungswinkel (CDE) von CD gegen diese Ebenen, so ist

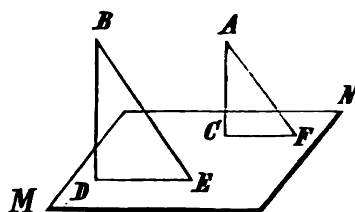
$$b \cdot \sin \alpha = a.$$

6. Damit Strecken zwischen parallelen Ebenen gleich lang sind, ist umgekehrt nicht nöthig, dass dieselben parallel seien, sondern nur, dass dieselben gleiche Neigungswinkel mit den Ebenen bilden, wie sich leicht durch Congruenz von Dreiecken beweisen lässt. Beide Forderungen sind nicht identisch. Zwar gilt der Satz:

Parallele Linien haben gegen eine und dieselbe sie schneidende Ebene gleiche Neigungswinkel (6),

denn fällt man von beliebigen Punkten A, B der parallelen Geraden die Senk-

rechten AC, BD auf die Ebene MN, so sind die Winkel DBE, CAF als Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln einander gleich, und mithin gilt dasselbe von ihren Complementen, den anderen spitzen Winkeln der rechtwinkeligen Dreiecke ACF, BDE, d. i. den Neigungswinkeln AFC, BED. Aber auch jede Gerade, welche von A nach einem Punkte des mit CF um C in der Ebene MN beschriebenen Kreises gezogen wird, bildet nach § 2 mit dieser Ebene einen gleichen Neigungswinkel wie AF, ohne mit BE parallel sein zu können.



7. Es sei endlich eine Gerade AB einer von zwei parallelen Ebenen MN, PQ parallel. Da bereits gezeigt worden, dass dieselbe, wenn sie in diesem Falle mit der anderen Ebene einen Punkt gemeinsam hat, ganz in dieser liegen muss, so bleibt ausserdem nur noch die Möglichkeit, dass sie auch der anderen parallel ist.

Eine Gerade, welche einer von zwei parallelen Ebenen parallel ist, und nicht in der anderen liegt, ist also dieser letzteren ebenfalls parallel (7).

§ 5. Sich schneidende Ebenen.

1. Schneiden zwei Ebenen einander, so ist bereits bekannt, dass ihre Durchschnittslinie eine gerade sein muss. Man kann in diesem Falle jede der beiden Ebenen durch Drehung um diese Durchschnittslinie in die Lage der anderen gebracht denken, und die Grösse dieser Drehung ist nach der Verschiedenheit dieser gegenseitigen Lage eine verschiedene. Es liegt hier also ein ähnlicher Fall vor, wie in der Planimetrie bei zwei einander schneidenden Geraden, deren Richtungsunterschied durch die Grösse der entsprechenden Drehung gemessen und ein Winkel genannt wurde. In gleicher Weise kann man hier von einem Winkel der beiden Ebenen reden, und man unterscheidet einen solchen Winkel zweier Flächen von einem Winkel zweier Geraden in der Ebene, indem man jenen einen Flächenwinkel, diesen einen ebenen Winkel nennt. Der Flächenwinkel wird von manchen Schriftstellern auch ein Keil genannt. Die Durchschnittslinie der beiden Flächen heisst die Kante desselben. Errichtet man auf der Kante eines Flächenwinkels in einem beliebigen Punkte derselben in jeder der beiden Ebenen die Senkrechte, so bilden diese Senkrechten einen ebenen Winkel, welcher der Neigungswinkel des Flächenwinkels (oder der Neigungswinkel der einen Ebene gegen die andere) genannt wird und dessen Grösse zu derjenigen des Flächenwinkels in enger Beziehung steht. Zunächst ist klar, dass dieser Neigungswinkel für denselben Flächenwinkel immer dieselbe Grösse haben muss, an welchem Punkte der Kante er auch construirt gedacht sein mag, denn die Schenkel zweier so construirten Winkel sind immer paarweise einander parallel und gleichgerichtet. Ferner gilt der Satz, dass zu gleichen Flächenwinkeln stets gleiche Neigungswinkel gehören, und umgekehrt, denn denkt man sich zwei Flächenwinkel so zusammengestellt, dass eine Ebene des einen eine Ebene des anderen deckt, dass ferner die beiden Kanten zusammenfallen und endlich beide Flächenwinkel auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Ebene liegen, und denkt man sich dann in demselben Punkte der Kante zu jedem Flächenwinkel den Neigungswinkel construirt, so lässt sich leicht zeigen, dass

bei gleichen Flächenwinkeln auch die beiden anderen Ebenen und ebenso die homologen Schenkel der Neigungswinkel einander decken. Werden umgekehrt die Neigungswinkel als gleich vorausgesetzt, so zeige man zuerst, dass ihre Schenkel, und dann dass auch die zweiten Ebenen der Flächenwinkel einander decken müssen.

Denkt man sich nun die Neigungswinkel zweier beliebigen Flächenwinkel durch ein gemeinsames Maass getheilt und durch jede Theilungslinie und die zugehörige Kante die Ebene gelegt, so werden die beiden Flächenwinkel in eben so viele Theile getheilt, wie bezüglich ihre Neigungswinkel, und die Theile der letzteren sind die Neigungswinkel der Theile der Flächenwinkel. Mithin sind die letzteren ebenfalls unter einander gleich, und man kann die gegebenen ganzen Flächenwinkel ebenfalls als durch ein gemeinsames Maass gemessen betrachten. Somit ergiebt sich, da sich dieser Beweis in bekannter Weise auch auf irrationale Verhältnisse erweitern lässt, der allgemeinere Satz:

Flächenwinkel verhalten sich zu einander wie ihre Neigungswinkel (1).

2. Die Neigungswinkel von Flächenwinkeln können daher statt letzterer zum Vergleichen und Messen derselben benutzt werden, und zahlreiche Sätze der Planimetrie über ebene Winkel lassen sich mittelst der Neigungswinkel ohne Weiteres auf Flächenwinkel übertragen. Auch die Eintheilung der Flächenwinkel kann entsprechend derjenigen der ebenen Winkel geschehen. Hiernach heissen Flächenwinkel gestreckte, hohle, überstumpfe, rechte, stumpfe oder spitze, je nachdem ihre Neigungswinkel gestreckte, hohle u. s. w. sind; alle gestreckten Flächenwinkel, und ebenso alle rechten sind einander gleich, und jeder rechte Flächenwinkel wird in 90 Grad u. s. w. eingetheilt Zwei Flächenwinkel heissen Nebenwinkel, wenn ihre Neigungswinkel Nebenwinkel sind, und die Summe derselben ist dann gleich zwei Rechten. Zwei Flächenwinkel heissen Scheitelwinkel, wenn ihre Neigungswinkel Scheitelwinkel sind, und dieselben sind dann gleich. — Selbstverständlich lassen sich alle diese Erklärungen und Sätze über Flächenwinkel auch unmittelbar, ohne die Anwendung der Neigungswinkel, in ähnlicher Weise, wie es bei den ebenen Winkeln seinerzeit geschehen, aufstellen und beweisen.

Aus der Construction des Neigungswinkels folgt unmittelbar, dass die Ebene desselben senkrecht zur Kante des Flächenwinkels steht (2), und umgekehrt kann man den Neigungswinkel durch eine solche Ebene construiren.

3. Ist der Neigungswinkel insbesondere ein rechter, so sagt man, dass beide Ebenen senkrecht zu einander stehen. Für diesen Fall sind noch folgende Sätze von Wichtigkeit:

Errichtet man auf der Kante eines rechten Flächenwinkels in einer der Schenkelebenen des letzteren eine senkrechte Gerade, so steht diese senkrecht zu der anderen Schenkelebene (3a). Dieselbe ist nämlich der eine Schenkel des an dem betreffenden Punkte der Kante zu construirenden Neigungswinkels und als solcher senkrecht zu dem anderen Schenkel dieses Winkels. Da sie ausser auf dem letzteren auch auf der Kante also auf zwei Geraden der zweiten Schenkelebene senkrecht steht, so ist sie senkrecht zu dieser Ebene.

Umgekehrt muss jede auf der einen Schenkelebene eines rechten Flächenwinkels in einem Punkte der Kante senkrecht stehende Gerade ganz in die andere Schenkelebene fallen (3b), denn wäre dies nicht der Fall, so liesse sich nach Anleitung des vorigen Satzes durch denselben Punkt

der Kante eine zweite Gerade construiren, welche ebenfalls auf der ersteren Ebene senkrecht stehen müsste.

Ebenso muss jede von einem Punkte in der einen Schenkelebene eines rechten Winkels auf die andere Ebene gefällte senkrechte Gerade ganz in die erstere fallen (3c), ihren Fusspunkt also in der Kante haben.

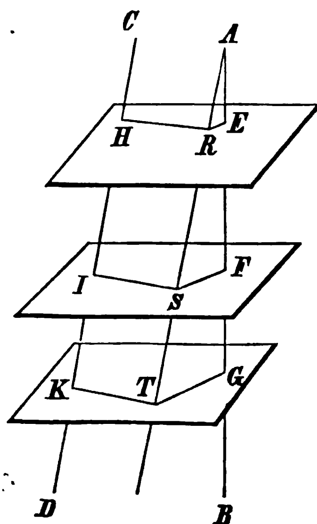
Endlich ist jede Ebene, welche durch eine auf einer anderen Ebene senkrecht stehende Gerade gelegt wird, auch senkrecht zu dieser Ebene (3d), denn jene Gerade ist als Senkrechte zur Ebene auch senkrecht zu der Kante beider Flächen, mithin der eine Schenkel eines Neigungswinkels, und da sie auch auf dem anderen Schenkel desselben, weil auf der ganzen betreffenden Ebene, senkrecht steht, so ist dieser Neigungswinkel ein rechter.

§ 6. Verbindung dreier Ebenen mit einander.

1. In Betreff der Lagen dreier Ebenen gegen einander können zunächst die folgenden Fälle als möglich unterschieden werden: a) alle drei Ebenen sind einander parallel, b) zwei Ebenen sind parallel, die dritte schneidet eine derselben, c) keine Ebenen sind parallel.

In Betreff dreier parallelen Ebenen findet man leicht, dass wenn zwei Ebenen E_1, E_2 derselben dritten Ebene E_3 parallel sind, sie auch unter einander parallel sein müssen, denn construirt man eine zu E_3 senkrechte Gerade, so ist diese auch auf der zu E_3 parallelen Ebene E_1, und ebenso auch auf E_2 senkrecht; die zu einer und derselben Geraden senkrechten Ebenen E_1, E_2 müssen also einander parallel sein.

Es folgt hieraus, dass nicht zwei einander schneidende Ebenen gleichzeitig einer und derselben dritten parallel sein können, oder dass eine Ebene, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, auch die andere schneiden muss. Es ist früher gezeigt worden, dass sich durch jeden ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkt und durch jede dieser Ebenen parallele Gerade eine zu derselben parallele Ebene legen lässt; aus dem vorstehenden Satze geht hervor, dass es jedesmal auch nur eine einzige solche Ebene giebt.



Zieht man zwischen drei beliebigen parallelen Ebenen zwei Gerade, so stehen die einander entsprechenden, durch ihre Durchschnittspunkte mit den Ebenen gebildeten Abschnitte zu einander in gleichen Verhältnissen (1). Sind nämlich AB, CD die beiden Geraden, E, F, G und H, I, K bezüglich deren Durchschnittspunkte mit den parallelen Ebenen, und zieht man durch einen beliebigen Punkt A der einen Geraden die Parallele zu CD, welche diese Ebenen bezüglich in R, S, T schneiden möge, so muss die durch AB und AT bestimmte Ebene die parallelen Ebenen in den parallelen Durchschnittslinien RE, SF, TG schneiden, und nach einem Satz von den parallelen Transversalen ist

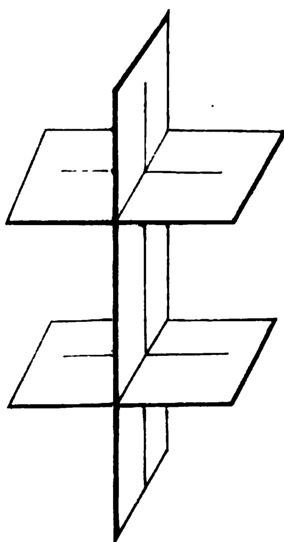
$$RS : EF = ST : FG = RT : EG.$$

Nun ist aber $RS = HI$ als Parallele zwischen parallelen Ebenen und ebenso $ST = IK$, $RT = HK$, also ist auch

$$HI : EF = IK : FG = HK : EG.$$

Die Hülfslinie AT würde bei diesem Beweise überflüssig sein, wenn man voraussetzen dürfte, dass sich durch AB und CD unmittelbar eine Ebene legen lasse; dieselbe ist also nur durch die Möglichkeit, dass AB und CD einander kreuzen, bedingt.

2. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so ist bereits früher gezeigt worden, dass die Durchschnittslinien einander parallel sind. Die drei Ebenen bilden in diesem Falle acht hohle Flächenwinkel, deren gegenseitige Lagen denjenigen der Winkel an zwei von einer dritten geschnittenen Geraden in der Ebene entsprechen, und welche daher auch in gleicher Weise wie jene benannt werden. Da die Durchschnittslinien der Ebenen einander parallel sind, so kann man eine vierte Ebene construirt denken, welche gleichzeitig auf beiden Kanten senkrecht steht und daher durch ihre Durchschnittslinien mit den drei ersteren Ebenen die Neigungswinkel sämmtlicher acht Flächenwinkel in einer einzigen ebenen Figur liefert. Diese Figur muss ferner diejenige zweier von einer dritten Geraden geschnittener Parallelen sein, und hieraus folgt unmittelbar, dass auch bei parallelen Ebenen je zwei correspondirende und je zwei Wechselwinkel gleich sind und je zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte betragen.

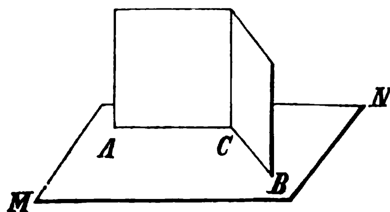


Die Umkehrung dieser Sätze kann jedoch nicht unmittelbar in der Weise behauptet werden, dass die Gleichheit zweier correspondirenden Winkel u. s. w. den Parallelismus der geschnittenen Flächen zur Folge habe; vielmehr ist hierfür der Voraussetzung noch die weitere Bedingung hinzuzufügen, dass die beiden von der dritten geschnittenen Flächen mit dieser einander parallele Durchschnittslinien haben, denn nur in diesem Falle können wieder die Neigungswinkel der acht Flächenwinkel mittelst einer auf beiden Kanten senkrechten Ebene in derselben ebenen Figur construirt werden, so dass also auch nur in diesem Falle die entsprechenden planimetrischen Umkehrungssätze angewendet werden können.

Entsprechend lässt sich zeigen, dass bei nicht parallelen Ebenen, welche von einer dritten Ebene geschnitten werden, in dem Falle, dass die Durchschnittslinien parallel sind, je zwei correspondirende Winkel und je zwei Wechselwinkel ungleich sind und die Summe je zweier Gegenwinkel nicht zwei Rechte beträgt. Besteht umgekehrt eine der letzteren Ungleichheiten, so sind die geschnittenen Ebenen in allen Fällen nicht parallel. In dem besonderen Fall, dass die acht Flächenwinkel rechte sind, hat man zwei zu einer dritten senkrechte Ebenen. Man kann hiernach mittelst des Vorstehenden leicht beweisen, dass wenn von parallelen Ebenen eine zu einer anderen Ebene senkrecht steht, auch alle anderen zu dieser senkrecht sein müssen, dagegen kann nicht behauptet werden, dass Ebenen, die zu derselben Ebene senkrecht stehen, parallel sein müssen; dieses ist vielmehr nur dann der Fall, wenn auch die Durchschnittslinien der senkrechten Ebenen mit der dritten einander parallel sind; ist letzteres nicht der Fall, so

müssen die senkrechten Ebenen einander schneiden, und für diesen Fall gilt der Satz:

Schneiden zwei zu einer dritten senkrechte Ebenen einander, so ist ihre Durchschnittslinie ebenfalls zu der dritten Ebene senkrecht (2). Zum Beweise dieses Satzes hat man nur nöthig, auf der dritten Ebene MN in dem Durchschnittspunkte C der beiden Kanten AC, BC die senkrechte Gerade zu errichten; es folgt dann aus § 5 (3^b), dass diese Gerade in jeder der beiden senkrechten Ebenen liegen, mithin die Durchschnittslinie derselben sein muss.



3. Ist von den drei Ebenen keine einer der anderen parallel, so muss jeder Punkt, welchen die Durchschnittslinien einer derselben mit den beiden anderen unter sich gemeinschaftlich haben, auch ein Punkt der Durchschnittslinie dieser letzteren sein, denn ist P ein Punkt, welcher sowol auf der Durchschnittslinie der Ebenen A und B, als auch auf derjenigen der Ebenen A und C liegt, so ist er einerseits ein gemeinsamer Punkt von A und B, andererseits ein solcher von A und C und mithin gleichzeitig ein Punkt von B und C.

Hieraus folgt, dass drei einander schneidende Ebenen nur folgende verschiedene Arten von Lagen gegen einander haben können: Entweder fallen ihre Durchschnittslinien in eine einzige zusammen, oder dieselben schneiden einander in einem und demselben Punkte, oder dieselben sind einander sämmtlich parallel.

Drei Ebenen, welche einander in einer gemeinsamen Durchschnittslinie schneiden, bilden zwei aneinander liegende Flächenwinkel und bieten keinen besonderen Anlass zu weiteren Untersuchungen.

Drei Ebenen, deren drei Durchschnittslinien einander parallel sind, kann man erhalten, wenn man durch je zwei von drei einander parallelen, nicht in einer Ebene liegenden Geraden die durch sie bestimmte Ebene legt. Das entstehende Gebilde heisst ein offener dreiseitiger prismatischer Raum.

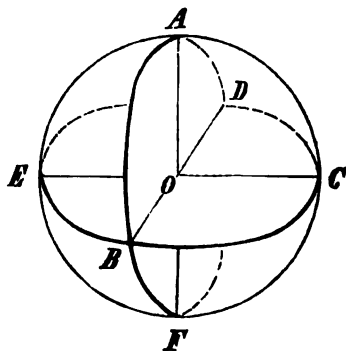
Drei Ebenen, deren drei Durchschnittslinien durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen, können ebenfalls erhalten werden, indem man zuerst drei in dieser Weise liegende gerade Linien und dann durch je zwei derselben die Ebene construirt. Das entstehende Gebilde heisst ein offener dreiseitiger pyramidaler Raum oder eine dreiseitige Ecke.

4. Die drei vorstehenden Fälle können auf mehr als drei einander schneidende Ebenen ausgedehnt werden; es können also beliebig viele Ebenen einander so schneiden, dass alle Durchschnittslinien zusammenfallen, oder dass sie alle parallel sind, oder dass sie alle durch einen und denselben Punkt gehen. Im zweiten Falle entsteht ein mehrseitiger offener prismatischer Raum, im dritten eine mehrseitige Ecke. Bei mehr als drei Ebenen erschöpfen jedoch diese drei Lagen nicht alle möglichen Fälle, und die Untersuchung noch anderweiter Lagen derselben zu einander muss also vorbehalten bleiben.

Von den prismatischen Räumen soll aus Zweckmässigkeitsgründen an einer späteren Stelle gehandelt werden. Zunächst sei die Aufgabe gestellt, die für die weitere Entwicklung der Stereometrie besonders wichtigen Eigenschaften der Ecken zu untersuchen.

§ 7. Fortsetzung: Die dreiseitige Ecke.

1. Drei Ebenen, deren Durchschnittslinien einander in einem Punkte schneiden, theilen den Raum im Ganzen in acht Theile. Sie bilden also acht dreiseitige Ecken im engeren Sinne, denn unter einer solchen versteht man dasjenige Raumgebilde, welches entsteht, wenn man von einem Punkte aus drei beliebige nicht in einer Ebene liegende Strahlen und zwischen je zweien derselben das durch sie bestimmte Ebenenstück legt. Im Folgenden soll der Begriff der Ecke stets in diesem engeren Sinne benutzt werden.



Jede dreiseitige Ecke hat drei Ebenen, deren Durchschnittslinien die Kanten der Ecke heissen; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der letzteren wird der Scheitel oder die Spitze der Ecke genannt. Je zwei Kanten bilden mit einander einen ebenen Winkel und je zwei Flächen einen Flächenwinkel. Die dreiseitige Ecke hat hiernach drei ebene Winkel und drei Flächenwinkel, welche insbesondere häufig auch die sechs Stücke der Ecke genannt werden. Jedem ebenen Winkel liegen zwei Flächenwinkel an und einer gegenüber, und umgekehrt.

In gleicher Weise hat jede n-seitige Ecke einen Scheitel, n Kanten, n ebene Winkel und n Flächenwinkel.

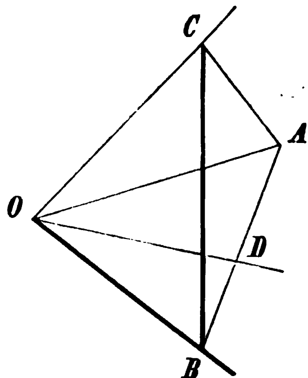
Beschreibt man um den Scheitel einer Ecke in jeder der Ebenen derselben mit einem und demselben Radius je einen Kreisbogen zwischen den betreffenden Kanten, so entsteht eine von Kreisbogen gebildete n-eckige Figur im Raume. Die ebenen Winkel der Ecke werden durch die Seiten dieser Figur, d. h. durch jene Kreisbogen, deren Centriwinkel sie sind, gemessen; die Winkel dieser Figur, d. h. die Winkel der in jedem Eckpunkt an die Seiten gelegten Tangenten, sind die Neigungswinkel der Flächenwinkel der Ecke. Diese Beziehung zwischen der Ecke und der zugehörigen krummlinigen Figur wird dazu verhelfen, die Analogie zu verdeutlichen, welche im Folgenden zwischen Eigenschaften von Ecken und solchen ebener, geradliniger Figuren, insbesondere zwischen denjenigen der dreiseitigen Ecke und des geradlinigen Dreiecks bestehen, und bei welchen die ebenen Winkel der ersteren den Seiten, die Flächenwinkel der ersteren den Winkeln des Dreiecks entsprechen.

Die ebenen Winkel einer Ecke und ebenso die Flächenwinkel einer solchen können hohle und überstumpfe sein. So gehört z. B. zu jeder Ecke eine zweite, welche denselben Scheitel und dieselben Kanten wie diese hat, und deren Raum denjenigen der ersteren zum gesammten Raum ergänzt. Jeder ebene Winkel einer dieser Ecken beträgt mit dem entsprechenden ebenen Winkel der anderen, und jeder Flächenwinkel der ersteren beträgt mit dem entsprechenden Flächenwinkel der letzteren zusammen vier Rechte und ist also überstumpf, wenn jener hohl ist. Erweitert man aber jede Seitenfläche einer Ecke zur vollständigen Ebene, so wird dieselbe, falls nicht alle ihre Stücke hohle Winkel waren, in zwei bis sieben einzelne Ecken zerlegt, deren ebene Winkel und deren Flächenwinkel sämmtlich kleiner als 180° sind. Die so überhaupt entstehenden acht Ecken stehen zu einander in einfachen Beziehungen: Jeder derselben liegen drei andere so an, dass sie mit ihr eine Seitenfläche und also einen ebenen Winkel gemeinsam haben, so z. B. der Ecke $O(ABC)$ die Ecken $O(ACD)$, $O(BCF)$, $O(ABE)$. Dieselben mögen Nebenecken der ursprünglichen heissen. Sie stimmen mit

der letzteren auch in einem Flächenwinkel überein, nämlich in demjenigen, welcher dem gemeinsamen ebenen Winkel gegenüberliegt. Die anderen Flächenwinkel und die anderen ebenen Winkel beider Ecken sind paarweise Nebenwinkel zu einander. Drei andere Ecken $O(ADE)$, $O(BEF)$, $O(DCF)$ liegen so gegen die ursprüngliche, dass jede derselben einen Flächenwinkel hat, welcher Scheitelwinkel eines Flächenwinkels der letzteren ist. Auch die diesen Flächenwinkeln gegenüberliegenden ebenen Winkel sind Scheitelwinkel zu einander, während die anderen Stücke wieder paarweise supplementär sind. Diese Ecken mögen Scheitelecken der ursprünglichen genannt werden. Endlich ist noch eine Ecke $O(DEF)$ vorhanden, deren ebene Winkel und Flächenwinkel sämmtlich Scheitelwinkel eines entsprechenden Stücks der ursprünglichen sind. Dieselbe liegt der letzteren so gegenüber, dass ihre Kanten die Verlängerungen der homologen Kanten derselben sind; sie heisse die Gegenecke dieser ursprünglichen Ecke.

Wegen dieser Theilbarkeit jeder Ecke mit überstumpfen Winkeln und dieser Beziehungen der Theil-Ecken zu einander ist es gestattet, im Folgenden der Einfachheit wegen nur solche Ecken vorauszusetzen, deren sechs Stücke sämmtlich kleiner als 180° sind.

2. Um zunächst die Summe zweier ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke O mit dem dritten zu vergleichen, seien auf zwei Kanten der Ecke beliebige Strecken OA, OB abgeschnitten und A mit B verbunden. Ferner sei von dem Winkel AOB ein Winkel AOD abgetragen, welcher dem anderen an der Kante OA liegenden und kleiner als AOB vorausgesetzten ebenen Winkel der Ecke gleich sei; der Punkt D liege auf AB. Endlich sei auf der dritten Kante die Strecke OC gleich OD abgetragen und C mit A und B verbunden. Dann stimmen die Dreiecke AOC, AOD in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, und es sind also AC und AD gleich gross als homologe Stücke congruenter Dreiecke. Da nun im Dreieck ABC die Seite BC grösser sein muss als die Differenz $AB - AC$ der anderen Seiten, also auch grösser als BD, so sind OBC, OBD zwei Dreiecke, welche in zwei Seitenpaaren, aber nicht in dem dritten übereinstimmen. Daher ist auch der Winkel COB, welcher der gröseren Seite gegenüberliegt, grösser als der der kleineren gegenüberliegende BOD, oder da letzterer gleich der Differenz von AOB und AOC ist, so ist der Satz bewiesen:



Die Differenz zweier ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke ist stets kleiner als der dritte ebene Winkel. (1)

Die Annahme, dass AOC kleiner als AOB sei, hindert nicht die Allgemeinheit dieses Satzes, denn sind diese Winkel gleich gross, so ist ihre Differenz gleich Null; der Satz bedarf also in diesem Falle keines Beweises. Derselbe Satz ergiebt, dass

$$\angle BOC + \angle COA > \angle BOD + \angle DOA, \text{ d. i. } > \angle AOB$$

ist und kann demnach auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Die Summe je zweier ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke ist grösser als der dritte (2).

3. Schneidet man die Kanten einer dreiseitigen Ecke O durch eine beliebige Ebene, welche nicht durch den Scheitel geht, so entsteht an jedem Durchschnittspunkte A, B, C, eine neue dreiseitige Ecke. Nach dem vorigen Satze ist dann

$$\angle OCA + \angle OCB > \angle ACB,$$
$$\angle OBC + \angle OBA > \angle CBA,$$
$$\angle OAB + \angle OAC > \angle BAC,$$

mithin auch $\angle OCA + \angle OCB + \angle O'BC + \angle OBA + \angle OAB + \angle OAC > \angle ACB + \angle CBA + \angle BAC.$

Die drei Winkel auf der rechten Seite dieser Ungleichung sind die Winkel des ebenen Dreiecks ABC, also ist die Summe der sechs Winkel auf der linken Seite grösser als zwei Rechte. Von diesen sechs Winkeln liegen aber je zwei mit einem ebenen Winkel der Ecke O in demselben Dreieck und betragen also mit letzterem zusammen. z. B. OCB und OBC mit COB, zwei Rechte. Die Summe der sechs Winkel und der drei ebenen Winkel der Ecke beträgt mithin sechs Rechte, und da die Summe der ersteren grösser als vier Rechte ist, mithin für die Summe der letzteren nach Abzug der ersteren weniger als vier Rechte übrig bleiben müssen, so ist der Satz bewiesen:

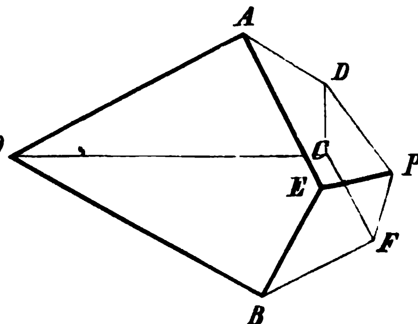
Die Summe der drei ebenen Winkel einer jeden dreiseitigen Ecke ist kleiner als vier Rechte (3).

Dieser Satz lässt sich in ganz entsprechender Weise auch für die Summe der ebenen Winkel einer jeden mehrseitigen Ecke beweisen. Schneidet man allgemein die Kanten einer $n$seitigen Ecke durch eine Ebene, so dass ein ebenes n-Eck entsteht, so beträgt die Summe der $n$ebenen Winkel der Ecke und der $2n$ Winkel, welche mit denselben in den Seitendreiecken liegen, $2n$ Rechte, die Summe der letzteren ist grösser als die der Winkel des n-Ecks, mithin die Summe der ersteren kleiner als

$$2n - (2n - 4) \text{ oder } 4 \text{ Rechte.}$$

Man kann die Richtigkeit dieses Satzes auch populär dadurch veranschaulichen, dass man die Flächen von n Winkeln, deren Summe 360° beträgt, an demselben Scheitelpunkt neben einander legt; die Flächen fallen dann in eine einzige Ebene, indem sie den um den gemeinschaftlichen Punkt herumliegenden Winkelraum von vier Rechten gerade ausfüllen. Ist die Summe der Winkel grösser als vier Rechte, so bleibt nicht Raum genug, dieselben vollständig zusammenzubringen, und nur bei einer Winkelsumme von weniger als vier Rechten legen sich die Winkelebenen zu einer Ecke aneinander.

4. Um ferner auch die Summen von Flächenwinkeln einer Ecke zu untersuchen, sei auf jeder Kante der letzteren in einem beliebigen Punkt, jedoch nicht im Scheitel, eine senkrechte Ebene errichtet. Die auf der Kante OA in A senkrechte Ebene liefert durch ihre Durchschnittslinien mit den anliegenden Flächen der Ecke O den Neigungswinkel EAD des Flächenwinkels an OA, und entsprechend erhält man die Neigungswinkel EBF, DCF an OB und OC.



Da nun OA senkrecht zur Ebene EAD, so sind auch die durch OA gehen-

den Flächen AOB, AOC senkrecht zu ADE; ebenso sind AOB und BOC senkrecht zu EBF, BOC und COA senkrecht zu DCF. Umgekehrt stehen also auch je zwei der neu errichteten Ebenen senkrecht zu einer und derselben Ebene der Ecke O, z. B. EAD und EBF gleichzeitig senkrecht zu AOB, woraus endlich folgt, dass auch die Durchschnittslinie PE dieser beiden Ebenen senkrecht zu AOB steht. Ebenso ist PF senkrecht zu BOC, PD senkrecht zu AOC.

Die drei auf je einer Kante der Ecke O senkrecht errichteten Ebenen bilden also eine neue Ecke P, so dass zwischen beiden Ecken folgende Beziehungen bestehen:

Jede Kante irgend einer der beiden Ecken steht senkrecht zu einer Ebene der anderen, jede Ebene einer derselben senkrecht zu zwei Ebenen der anderen, und jede Ebene einer derselben schneidet die zu ihr senkrechten Ebenen der anderen in den Schenkeln eines Neigungswinkels an der zu ihr senkrechten Kante.

Zwei Ecken, welche in diesen Beziehungen zu einander stehen, heissen Supplementar-Ecken.

Dass die zu OA, OB, OC senkrechten Ebenen einander schneiden und eine Ecke bilden müssen, lässt sich dadurch zeigen, dass man zunächst beweist, dass Ebenen, die auf nicht parallelen Geraden senkrecht stehen, nicht parallel sein können, und dann, dass auch die drei Durchschnittslinien nicht zusammenfallen und nicht parallel sein können. Da nämlich die Durchschnittslinien AE, BE als Senkrechte auf convergirenden Geraden OA, OB in derselben Ebene einander in einem Punkte E schneiden müssen, so müssen auch die zugehörigen Ebenen DAE, FBE einander in einer durch E gehenden, und da sie beide zu OAB senkrecht sind, in der zu OAB senkrechten Geraden EP schneiden, u. s. w.

Man kann umgekehrt zu jeder gegebenen Ecke O eine Supplementar-Ecke dadurch construiren, dass man im Innern der ersteren einen beliebigen Punkt P annimmt, von diesem auf jede der Seitenflächen von O eine senkrechte Gerade fällt und durch je zwei dieser Geraden eine Ebene legt. Es ist dann leicht, in entsprechender Weise wie vorher zu beweisen, dass auch die übrigen der aufgestellten Beziehungen beider Ecken zu einander bestehen.

Im Viereck $PEAD$ ist DPE ein ebener Winkel der Ecke P, DAE der zugehörige (d. i. an der zur Ebene von DPE senkrechten Kante liegende) Neigungswinkel eines Flächenwinkels der Ecke O, während die beiden anderen Winkel dieses Vierecks Rechte sind. Da nun die Summe der Winkel eines jeden ebenen Vierecks vier Rechte beträgt, so ist

$$\angle DPE + \angle DAE = 2R.$$

Ebenso ist AEB Neigungswinkel an der Kante PE der Ecke P, AOB der zugehörige ebene Winkel der Ecke O, und die beiden anderen Winkel des Vierecks $AOBE$ sind rechte, also ist die Summe der beiden ersteren Winkel gleich zwei Rechten. Es gilt hiernach der Satz:

Sind zwei Ecken Supplementar-Ecken zu einander, so beträgt die Maasszahl jedes ebenen Winkels irgend einer derselben mit der Maasszahl des zugehörigen Flächenwinkels der anderen immer 180 Grad. (4)

Durch diesen Satz erklärt sich die Wahl des Namens Supplementar-Ecke

Die Willkür, welche bei der Construction einer Supplementar-Ecke P zu einer gegebenen Ecke O darin besteht, dass man für P jeden beliebigen Punkt innerhalb des Raumes der letzteren wählen kann, hat demnach nur auf die Lage

der construirten Supplementar-Ecke, nicht aber auf die Grössen ihrer sechs Stücke Einfluss, denn sind a, b, c, α, β, γ bezüglich die Maasszahlen der ebenen und der Flächenwinkel der Ecke O, so sind entsprechend $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$ die Maasszahlen der Flächen- und der ebenen Winkel der Ecke P; diese haben also für jede Lage von P dieselben fest bestimmten Werthe.

Die durch verschiedene Annahmen des Punktes P entstehenden Supplementar-Ecken der Ecke O können daher als verschiedene Lagen einer und derselben Ecke angesehen werden, in welche dieselbe nach einander durch geeignete Verschiebung gebracht werden kann. Denkt man sich bei einer solchen Verschiebung den Punkt P fortwährend dem Scheitel O genähert, so kann man schliesslich auch P mit O zusammenfallen lassen. Es ändert sich dann nichts, als dass die Kanten von P nicht mehr als vom Punkte P senkrecht auf die Ebenen von O gefällt, sondern als auf diesen senkrecht errichtet erscheinen. Die so gewonnene Lage beider Ecken zu einander ist dadurch bemerkenswerth, dass diese dabei einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben. In dieser Lage heisst jede der beiden Ecken die Polar-Ecke der anderen.

Die vorstehenden Sätze und Beweise über Supplementar- und Polar-Ecken gelten für mehrseitige Ecken in gleicher Weise wie für dreiseitige. Jede Ecke hat eine und nur eine Polar-Ecke.

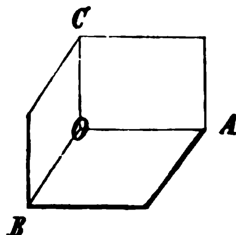
5. Die Summe der Maasszahlen der drei Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke muss nach dem obigen Satze mit der Summe der Maasszahlen der drei ebenen Winkel ihrer Polar-Ecke zusammen sechs Rechte betragen. Da nun die letztere jedenfalls grösser als Null und nach (3) dieses Paragraphen kleiner als vier Rechte ist, so folgt der Satz:

Die Summe der Flächenwinkel einer jeden dreiseitigen Ecke beträgt weniger als sechs Rechte und mehr als zwei Rechte. (5)

Aus diesem Satze geht hervor, dass in einer dreiseitigen Ecke alle drei Flächenwinkel stumpfe sein können; es können ferner zwei derselben stumpf, der dritte ein rechter, oder alle drei rechte, oder zwei rechte und der dritte stumpf oder spitz sein, u. s. w.

Man nennt insbesondere eine dreiseitige Ecke eine rechtwinkelige, wenn dieselbe einen oder mehrere rechte Flächenwinkel hat.

Eine Ecke mit drei rechten Flächenwinkeln, d. i. eine sogenannte dreifach rechtwinkelige Ecke erhält man, wenn man zu zwei auf einander senkrechten Ebenen eine dritte construirt, welche zu der Kante der ersteren senkrecht ist. Da in derselben jede Kante als Durchschnittslinie zweier zur dritten senkrechten Ebenen auf dieser dritten und also auch auf den beiden anderen Kanten senkrecht stehen muss, so folgt der Satz:

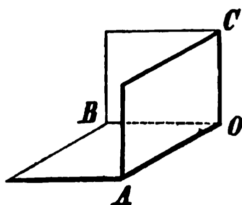


Sind in einer Ecke alle drei Flächenwinkel rechte, so sind auch alle drei ebenen Winkel rechte.

Ebenso ergiebt sich leicht, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gelten muss: Sind in einer Ecke alle drei ebenen Winkel rechte, so sind auch alle drei Flächenwinkel rechte.

Hat eine Ecke zwei rechte Flächenwinkel, z. B. diejenigen an den Kanten OA, OB, so steht die dritte Kante CO zu der Ebene BOA, und also auch zu den Kanten OA, OB senkrecht. Hieraus folgt, dass in jeder zweifach recht-

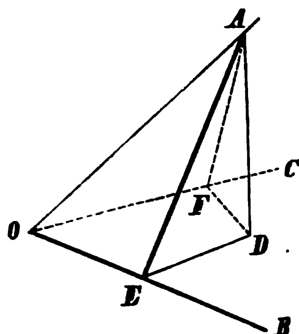
winkeligen Ecke auch die den rechten Flächenwinkeln gegenüberliegenden ebenen Winkel rechte sind, und dass der dritte ebene Winkel der Neigungswinkel des dritten Flächenwinkels ist. Auch dieser Satz lässt sich umkehren. Die früheren Sätze über dreifach rechtwinkelige Ecken sind besondere Fälle der vorstehenden.



In jeder einfach rechtwinkeligen Ecke wird der dem rechten Winkel gegenüberliegende ebene Winkel auch die Hypotenuse der Ecke genannt; die beiden anderen ebenen Winkel heissen dann die Katheten. In einer mehrfach rechtwinkeligen Ecke können dieselben Benennungen mit Beziehung auf irgend einen der rechten Flächenwinkel gebraucht werden.

6. Zur Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den ebenen und den Flächen-Winkeln einer und derselben Ecke findet zunächst die folgende Construction zweier Neigungswinkel Anwendung:

Fällt man von einem beliebigen Punkte A einer Kante einer dreiseitigen Ecke $O(ABC)$ die senkrechte Gerade AD auf die gegenüberliegende Seitenfläche, dann vom Fusspunkt D dieser Linie die senkrechten Geraden DE, DF auf die beiden anderen Kanten und verbindet man schliesslich die Fusspunkte E, F der letzteren Perpendikel mit A, so müssen die Verbindungslinien AE, AF nach § 2, (5) bezüglich auf OB und OC senkrecht stehen. Sind nun die beiden Flächenwinkel an OB und OC spitz, so liegt D innerhalb des Winkels BOC, und die Winkel AED, AFD sind bezüglich die Neigungswinkel jener Flächenwinkel. Ist der Flächenwinkel an OC ein rechter, so fällt D in die Kante OC, und AF fällt mit AD zusammen; man hat auch dann in dem rechtwinkeligen Dreieck AED die beiden Neigungswinkel. Sind beide Flächenwinkel rechte, so fallen AD, AF und AE unter einander und mit AO zusammen; die Kante AO steht dann senkrecht zur Ebene COB. Ist ferner der Flächenwinkel an OC ein stumpfer, so fällt D ausserhalb des Winkels BOC, und der Winkel AFD ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels jenes Flächenwinkels. Dasselbe findet für den Flächenwinkel an OB statt, wenn dieser ein stumpfer ist; bei zwei stumpfen Flächenwinkeln liegt D innerhalb des Scheitelwinkels von BOC, bei nur einem stumpfen und einem spitzen innerhalb eines Nebenwinkels von BOC, bei einem stumpfen und einem rechten auf der Verlängerung eines der Schenkel von BOC über O. In allen diesen Fällen lässt sich die angegebene Construction zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Flächenwinkeln, bezw. den Neigungswinkeln und den ebenen Winkeln benutzen. Diese Untersuchung führt zu den folgenden allgemein gültigen Sätzen:



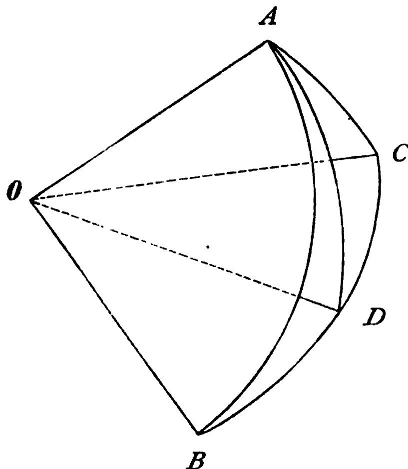
Sind zwei ebene Winkel AOB, AOC gleich gross, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke OAF, OAE congruent, daher ist AF gleich AE, und hierdurch ergiebt sich die Congruenz der Dreiecke AFD, AED, aus welcher endlich die Gleichheit der Winkel AFD, AED folgt. Somit erhält man den Satz:

Gleichen ebenen Winkeln einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Flächenwinkel gegenüber (6a).

Umgekehrt kann man aus der vorausgesetzten Gleichheit der Flächenwinkel an *OB* und *OC* und also auch der Winkel *AFD*, *AED* zuerst die Congruenz der Dreiecke *AFD*, *AED*, aus dieser dann die Gleichheit der Seiten *AF*, *AE*, mittelst letzterer ferner die Congruenz der Dreiecke *AOF*, *AOE* folgern, so dass also auch der Satz gilt:

Gleichen Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche ebene Winkel gegenüber (6b).

Setzt man dagegen voraus, dass der Flächenwinkel an *OA* grösser sei als der Flächenwinkel an *OB*, so kann man von ersterem einen Theil *O*, *BAD* abschneiden, welcher dem letzteren gleich ist; die theilende Ebene *AOD* treffe *BOC* in *OD*. Dann liegen in der Ecke *O* (*ABD*) den gleichen Flächenwinkeln an *OA* und *OB* gleiche ebene Winkel *BOD*, *AOD* gegenüber. Da ferner in der Ecke *O* (*ACD*) die Summe der ebenen Winkel *COD* und *AOD* grösser als der dritte *AOC* sein muss, so ist auch



$$COD + DOB > AOC, \text{ oder}$$
$$COB > AOC,$$

d. h. in jeder dreiseitigen Ecke liegt dem grösseren von zwei Flächenwinkeln ein grösserer ebener Winkel gegenüber (6c).

Endlich beweist man noch mit Hülfe der beiden letzten Sätze auf indirektem Wege leicht den folgenden:

In jeder dreiseitigen Ecke liegt dem grösseren von zwei ebenen Winkeln ein grösserer Flächenwinkel gegenüber (6d).

Man kann die beiden vorstehenden Sätze über ungleiche Stücke einer Ecke auch mittelst der zum Beweis der beiden entsprechenden über gleiche Stücke benutzten Construction und in analoger Weise wie diese beweisen, indem man statt der Congruenzen der Dreieckspaare die Nicht-Congruenzen derselben benutzt. Diese Beweise haben jedoch das Missliche, dass sie je nach der Annahme spitzer oder stumpfer Winkel in Folge der verschiedenen Lagen des Fusspunktes *D* zu weitläufigeren Erörterungen nöthigen, wenn sie allgemein gültig sein sollen.

Als Zusätze der vier obigen Sätze über die Beziehungen zwischen ebenen und Flächen-Winkeln einer dreiseitigen Ecke ergeben sich aus denselben ohne Weiteres die folgenden:

Sind die drei ebenen Winkel einer Ecke gleich gross, so sind auch die drei Flächenwinkel einander gleich.

Sind die drei Flächenwinkel einer Ecke gleich gross, so sind auch die drei ebenen Winkel einander gleich.

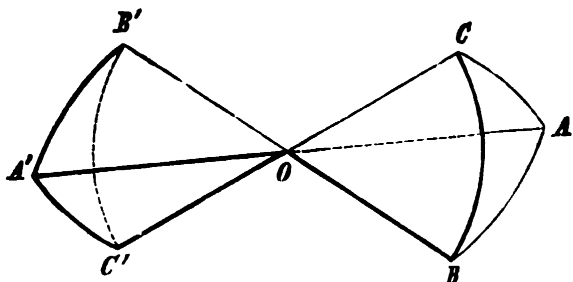
Dem grössten ebenen Winkel einer Ecke liegt der grösste Flächenwinkel gegenüber.

Dem grössten Flächenwinkel einer Ecke liegt der grösste ebene Winkel gegenüber.

§ 8. Fortsetzung: Von der Congruenz der Ecken.

1. Vergleicht man die sechs Stücke einer Ecke mit denjenigen ihrer Gegenecke, so findet man, dass je zwei entsprechende ebene Winkel und ebenso je

zwei entsprechende Flächenwinkel beider Ecken als Scheitelwinkel gleich gross sind, und dass auch die gleichen Stücke in gleicher Reihenfolge aneinander liegen. Trotz dieser Uebereinstimmung in allen homologen Stücken können jedoch die beiden Ecken im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden, denn würde man z. B. OA' in die Richtung von OA, OB' in die von OB bringen, so würden die Ecken auf verschiedene Seiten der gemeinschaftlichen Flächen AOB fallen; legt man aber die eine Ecke so auf die andere, dass die gleichen Winkel $A'OB'$ und AOB einander decken und beide Ecken auf derselben Seite von AOB liegen, so fällt OA' in die Richtung von OB, OB' in die Richtung von OA, und die homologen Flächenwinkel fallen also nicht zusammen. Der Unterschied beider Ecken, welcher diese Unmöglichkeit, dieselben zur Deckung zu bringen, zur Folge hat, besteht darin, dass die homologen Stücke in beiden in umgekehrter Ordnung auf einander folgen und ist also demjenigen entsprechend, welcher zwischen rechter Hand und linker Hand oder zwischen der Gestalt eines Körpers und derjenigen seines Bildes im Spiegel besteht. Könnte man die eine der beiden Ecken so umstülpen, dass die inneren Flächenseiten derselben die äusseren würden, so würde sich die Ordnung der Stücke umkehren und beide Ecken würden congruent werden.



Man nennt zwei Raumgebilde überhaupt, und also auch insbesondere zwei Ecken, die in allen homologen Stücken übereinstimmen und bei denen die homologen Stücke zwar in gleicher Reihenfolge aber in umgekehrter Ordnung aneinanderliegen, symmetrisch.

Jede Ecke ist also ihrer Gegenecke symmetrisch. Sind zwei Ecken symmetrisch, so ist jede derselben der Gegenecke der anderen congruent, und überhaupt zwei Ecken, die derselben dritten symmetrisch sind, müssen unter einander congruent sein.

Stimmen zwei dreiseitige Ecken in den drei ebenen Winkeln paarweise überein, so sind auch je zwei homologe Flächenwinkel derselben einander gleich, und die Ecken sind also congruent oder symmetrisch, (1)
denn construirt man in jeder dieser beiden Ecken O, O' zwei Neigungswinkel nach § 7, Nr. 6, indem man $OA = O'A'$ macht, die Senkrechten AD, $A'D'$ auf die gegenüberliegenden Flächen fällt und in dieser Weise, wie dort gezeigt, fortfährt, so folgt aus der Gleichheit der ebenen Winkel AOE, $A'O'E'$ die Congruenz der in den Hypotenusen übereinstimmenden rechtwinkeligen Dreiecke AOE, $A'O'E'$ und aus dieser, dass $AE = A'E'$, $OE = O'E'$ ist. In gleicher Weise ist $\triangle AOF \cong \triangle A'O'F'$, also $AF = A'F'$, $OF = O'F'$. Nun kann man die Vierecke $FOED$, $F'O'E'D'$ mit den gleichen Winkeln FOE, $F'O'E'$ aufeinander gelegt denken, sodass die gleichen Schenkel OF, $O'F'$ und ebenso OE, $O'E'$ einander decken, mithin auch die auf denselben stehenden Senkrechten FD, $F'D'$ und ebenso ED, $E'D'$, also die ganzen Vierecke zusammenfallen. Da hiernach diese Vierecke congruent sind, also $FD = F'D'$, $ED = E'D'$ ist, so folgt weiter die Congruenz der Dreiecke AFD, $A'F'D'$, sowie die der Drei-

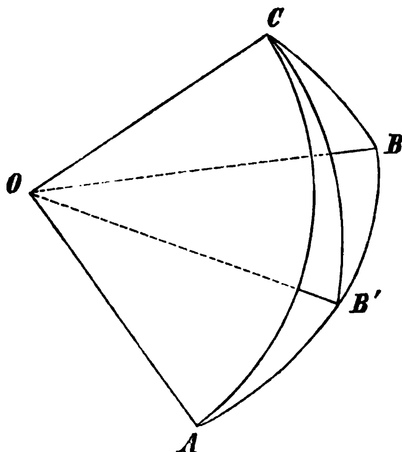
ecke AED, $A'E'D'$ und hieraus die Gleichheit der Neigungswinkel AFD, $A'F'D'$, sowie die von AED und $A'E'D'$. Da auch für die Winkel an OA und $O'A'$ derselbe Beweis geführt werden kann — denn die Senkrechte AD kann auch statt von A von einem Punkte einer anderen Kante aus auf die dieser gegenüberliegende Fläche gefällt werden — so ist bewiesen, dass alle homologen Flächenwinkel der beiden Ecken gleich gross sind.

2. Stimmen zwei dreiseitige Ecken in zwei ebenen Winkeln und in dem von diesen eingeschlossenen Flächenwinkel überein, so sind auch je zwei andere homologe Stücke derselben einander gleich, und die Ecken sind also congruent oder symmetrisch. (2)

Der Beweis dieses Satzes kann in ähnlicher Weise wie der des vorigen, also durch Construction von Neigungswinkeln und die Congruenz entstehender Dreiecke geführt werden. Man kann ausserdem zeigen, dass irgend eine der beiden Ecken sich mit der anderen oder mit der Gegenecke derselben zur Deckung bringen lässt. Denkt man sich nämlich diese betreffenden Ecken so zusammengestellt, dass der Scheitel O' auf den Scheitel O, die Kante $O'A'$ in die Richtung der Kante OA fällt, wobei angenommen wird, dass an diesen Kanten die als gleich vorausgesetzten Flächenwinkel liegen, so muss ferner in Folge dieser Gleichheit die eine Ecke so zur anderen gelegt werden können, dass die Schenkelebenen $A'O'B'$ und AOB einerseits und die Schenkelebenen $A'O'C'$ und AOC andererseits zusammenfallen. In Folge der Gleichheit der homologen einschliessenden ebenen Winkel fällt dann $O'B'$ in die Richtung von OB, $O'C'$ in die Richtung von OC, und es muss also auch die Ebene $O'B'C'$ die Ebene OBC decken.

3. Stimmen zwei dreiseitige Ecken in zwei ebenen Winkeln und in dem einem der letzteren gegenüberliegenden Flächenwinkel überein, so kann noch nicht behauptet werden, dass die Ecken congruent oder symmetrisch seien.

Legt man nämlich die eine Ecke mit der anderen (oder mit der Gegenecke der letzteren) so zusammen, dass wie vorhin die Scheitel und die gleichen Flächenwinkel einander decken, so müssen auch die den letzteren anliegenden als gleich vorausgesetzten ebenen Winkel in AOC einander decken, da aber nicht bekannt ist, ob die Flächenwinkel an OC gleich seien, so kann auch nicht gefolgert werden, dass die Fläche $O'C'B'$ auf OCB falle, vielmehr muss die Möglichkeit gelten gelassen werden, dass eine derselben, z. B. OCB' innerhalb des Flächenwinkels der anderen an OC, und also auch die Kante OB' nicht auf OB, sondern innerhalb des ebenen Winkels AOB falle. Findet dies nun statt, so entsteht eine Ecke $O(BB'C)$, in welcher der Voraussetzung zufolge die ebenen Winkel BOC, $B'OC$ und mithin auch die ihnen gegenüberliegenden Flächenwinkel an OB' und OB gleich gross sind. Da nun der Flächenwinkel der Ecke $O(AB'C)$ an der Kante OB' der Nebenwinkel des einen der



vorigen ist, so ergiebt sich, dass derselbe in diesem Falle zu dem homologen Flächenwinkel der Ecke $O(ABC)$ an OB supplementär sein muss.

Sind also zwei dreiseitige Ecken, welche in den vorher genannten Stücken übereinstimmen, nicht congruent oder symmetrisch, so müssen die nicht als gleich vorausgesetzten der den ebenen gegenüberliegenden Flächenwinkel zusammen zwei Rechte betragen, und die Congruenz oder Symmetrie der beiden Ecken kann also behauptet werden, falls die weitere Bedingung erfüllt ist, dass die Summe der anderen gegenüberliegenden Flächenwinkel nicht gleich zwei Rechten sei (3).

Insbesondere kann man also die Uebereinstimmung der beiden Ecken in je zwei homologen der noch übrigen Stücke schon dann behaupten, wenn die im Allgemeinen leicht zu erkennende Bedingung erfüllt ist, dass die anderen gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. dass sie gleichzeitig spitze oder gleichzeitig stumpfe, bezw. rechte sind.

4. Stimmen zwei dreiseitige Ecken in zwei Flächenwinkeln und in dem einen der letzteren gegenüberliegenden ebenen Winkel überein, so kann ebenfalls die Congruenz oder Symmetrie der Ecken nur unter der ferneren Bedingung behauptet werden, dass die anderen gegenüberliegenden ebenen Winkel nicht zusammen zwei Rechte betragen (4).

Es müssen nämlich in diesem Falle die Polarecken der beiden Ecken in zwei ebenen Winkeln und einem der gegenüberliegenden Flächenwinkel übereinstimmen; diese Polarecken sind also nach dem vorigen Satze congruent oder symmetrisch, wenn ihre anderen gegenüberliegenden Flächenwinkel nicht zusammen zwei Rechte betragen, und dieses letztere muss wieder der Fall sein, wenn diese Bedingung in den ursprünglichen Ecken für die entsprechenden ebenen Winkel erfüllt ist. Da nun in diesem Falle die Polarecken auch in ihren übrigen homologen Stücken übereinstimmen, so folgt aus der Gleichheit der letzteren wieder rückwärts die Gleichheit ihrer Supplemente, also der noch übrigen homologen Stücke der ursprünglichen Ecke.

5. Stimmen zwei dreiseitige Ecken in zwei Flächenwinkeln und dem von ihnen eingeschlossenen ebenen Winkel überein, so sind dieselben congruent oder symmetrisch (5).

Der Beweis dieses Satzes kann in ähnlicher Weise wie der des vorhergehenden mittelst der Polarecken geführt werden. Bezeichnen wir der Kürze halber die ebenen Winkel einer Ecke durch bez. a, b, c und die ihnen gegenüberliegenden Flächenwinkel der Reihe nach durch α, β, γ, sowie entsprechend die Stücke einer zweiten Ecke durch a', b', u. s. w., so folgt aus der Voraussetzung,

$$a = a',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',$$

dass auch $180^\circ - a = 180^\circ - a'$, $180^\circ - \beta = 180^\circ - \beta'$, $180^\circ - \gamma = 180^\circ - \gamma'$ ist, dass somit die beiden Polarecken in einem Flächenwinkel und den ihn einschliessenden ebenen Winkeln übereinstimmen und also congruent oder symmetrisch sind. Aus der somit folgenden Gleichheit je zweier homologen übrigen Stücke der Polarecken, oder aus

$$180^\circ - a = 180^\circ - \alpha',\ 180^\circ - b = 180^\circ - b',\ 180^\circ - c = 180^\circ - c'$$

aber folgt $\alpha = \alpha'$, $b = b'$, $c = c'$,

die ursprünglichen Ecken stimmen also in allen homologen Stücken überein.

6. **Stimmen zwei dreiseitige Ecken in den drei Flächenwinkeln überein, so sind dieselben congruent oder symmetrisch** (6).

Der Beweis dieses Satzes kann wieder mittelst der Polarecken geführt werden. Letztere müssen in den ebenen Winkeln übereinstimmen, daher sind auch je zwei homologe Flächenwinkel derselben gleich gross, und hieraus folgt wieder rückwärts die Gleichheit auch je zweier homologen ebenen Winkel der ursprünglichen Ecken.

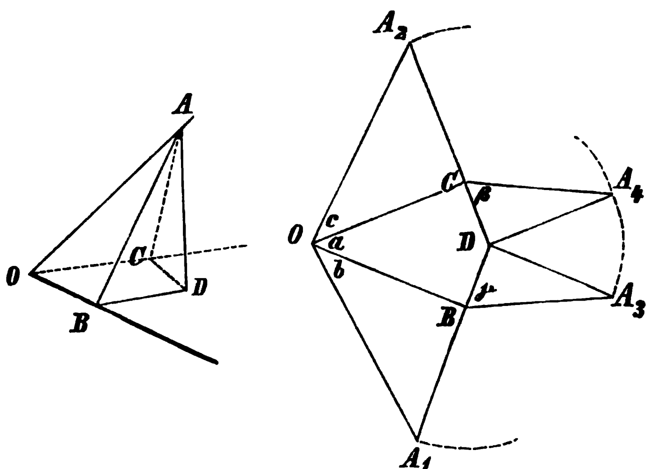
Durch die sechs nunmehr aufgestellten Congruenzsätze für dreiseitige Ecken sind alle hierbei möglichen Fälle erschöpft. Dieselben sind einander paarweise zugeordnet, so dass der Beweis eines jeden mit Hülfe des ihm zugeordneten Satzes und der Polarecke geführt werden kann, sobald dieser letztere Satz als vorher bewiesen gelten kann. So kann man beispielsweise den fünften der vorstehenden Sätze auch leicht unmittelbar durch Deckung beweisen und dann aus ihm den zweiten mittelst der Polarecken ableiten.

7. Die Congruenzsätze der Ecken zeigen eine grosse Analogie mit den Congruenzsätzen für Dreiecke in der Planimetrie, ebenso wie mehrere der anderen im Vorigen bewiesenen Eigenschaften der Ecken solchen des Dreiecks entsprechen. Daneben zeigen sich aber auch erhebliche Unterschiede, unter denen derjenige besonders hervorragt, dass die Summe der Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke nicht, wie diejenige der Winkel eines Dreiecks, zwei Rechte beträgt, überhaupt keinen bestimmten, sich gleich bleibenden Werth hat, sondern zwischen den Grenzen von zwei Rechten und sechs Rechten schwankt. Daher fallen bei der Ecke auch alle Folgerungen weg, welche denjenigen entsprechen würden, die bei den Dreiecken aus der constanten Winkelsumme hervorgehen. So beruht es hierauf, dass bei den Ecken auch der Congruenzsatz von den drei Flächenwinkeln aufzustellen war, da nicht durch je zwei der letzteren der dritte bestimmt ist. Ebenso zog der Congruenzsatz von einem ebenen Winkel und den beiden anliegenden Flächenwinkeln (der fünfte obige) nicht denjenigen von einem ebenen Winkel, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Flächenwinkel (d. i. den vierten obigen) als Folge nach sich, und es konnte bei letzterem sogar die Erfüllung einer weiteren Bedingung nothwendig werden.

Die Congruenzsätze für dreiseitige Ecken zeigen, entsprechend denen für Dreiecke, dass durch drei der sechs Stücke einer Ecke im Allgemeinen die drei übrigen bestimmt sind. Man kann daher die Aufgabe stellen, aus drei gegebenen solchen Bestimmungsstücken die übrigen zu ermitteln, und zwar entweder, wenn jene durch Zeichnung gegeben sind, mittelst Construction oder, wenn jene durch ihre Maasszahlen gegeben wurden, mittelst Rechnung. Die Aufgabe im letzteren Falle löst die sphärische Trigonometrie; für den ersteren Fall soll dieselbe hier noch kurz behandelt werden.

Denkt man sich zu einer Ecke O die in § 7 No. 6 angegebene Construction zweier Neigungswinkel ausgeführt, und seien (Fig. S. 414) ABD, ACD diese Neigungswinkel, so kann man sich jedes der Dreiecke OAB, OAC, ABD, ACD um seine in der Ebene $OCDB$ liegende Seite so gedreht denken, dass es in diese Ebene fällt. Es mögen dann OA_1B, OA_2C, BDA_3, CDA_4 der Reihe nach die neuen Lagen dieser Dreiecke bezeichnen. Dann müssen A_1B und BD, und ebenso A_2C und CD in je eine Gerade fallen, ferner muss OA_1 gleich OA_2 und DA_3 gleich DA_4, BA_3 gleich BA_1, CA_4 gleich CA_2, DA_3 senkrecht auf DB und DA_4 senkrecht auf CD sein, und A_3BD, A_4CD sind den Neigungswinkeln der Ecke an den Kanten OB, OC bezüglich gleich. Sind nun die drei ebenen

Winkel a, b, c, gegeben, so sind bei beliebiger Annahme der Länge von $OA_1 = OA_2$ die rechtwinkeligen Dreiecke OA_1B, OA_2C nebst dem zwischen ihnen liegenden Winkel COB bestimmt; durch Verlängerung von A_1B und A_2C erhält man den Punkt D, durch die in D auf DB und DC errichteten Senkrechten und die mit CA_2 um C und mit BA_1 um B beschriebenen Kreisbogen ergeben sich die Punkte A_3, A_4 und somit die den zwei gesuchten Neigungswinkeln β, γ bezüglich gleichen Winkel A_4CD, A_3BD. In entsprechender Weise kann auch der dritte Neigungswinkel gefunden werden.



Sind zwei ebene Winkel a, b und der eingeschlossene Flächenwinkel γ gegeben, so kann man nach derselben Figur wie vorher zunächst das rechtwinkelige Dreieck OBA_1 mit beliebig gewählter Hypotenuse beschreiben, dann mittelst des an die Verlängerung von A_1B in B angelegten, dem gegebenen Winkel γ gleichen Winkels, dem Schenkel $BA_3 = BA_1$ und der Senkrechten A_3D den Punkt D bestimmen, ferner an OB den Winkel $BOC = a$ anlegen, von D auf OC die Senkrechte fällen, dieselbe über ihren Fusspunkt C verlängern und mittelst eines um O mit OA_1 beschriebenen Kreisbogens den Punkt A_2 finden. Hierdurch erhält man den Winkel A_2OC gleich dem gesuchten dritten ebenen Winkel c und kann weiterhin wie in der vorigen Aufgabe verfahren.

Sind zwei ebene Winkel b, c und einer der gegenüberliegenden Flächenwinkel γ gegeben, so kann man wie vorher zunächst das Dreieck OA_1B, dann das Dreieck BA_3D und ausserdem ein dem Dreieck OA_2C congruentes zeichnen. Durch letzteres erhält man die Länge von OC, und zieht man OD, beschreibt über OD als Durchmesser den Kreis, so findet man mittelst eines um O mit jener Länge beschriebenen Kreisbogens den Punkt C, worauf alles Uebrige sich entsprechend den vorigen Fällen leicht ergiebt. Die Möglichkeit zweier brauchbaren Durchschnittspunkte des über OD beschriebenen Kreises und des um O beschriebenen Kreisbogens, wobei der dritte ebene Winkel a das einemal als Summe, das anderemal als Differenz zweier Winkel entsteht, zeigt auch hier die Unbestimmtheit des Falles und erläutert dieselbe näher dahin, dass derselbe, falls die oben angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, zweideutig ist.

Die drei noch übrigen Fälle können mit Hülfe der vorstehenden und der Polarecken in leicht ersichtlicher Weise gelöst werden.

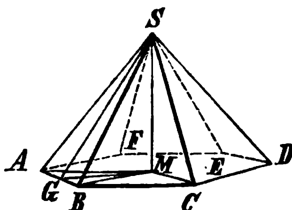
8. In den beiden zweideutigen Fällen sind die Bedingungen, unter welchen die Ecken vollständig bestimmt sind, von der Kenntniss solcher Stücke abhängig gewesen, welche nicht zu den gegebenen gehören. Um auch solche zu finden, welche die Entscheidung der Frage bloss aus der Kenntniss der drei gegebenen Bestimmungsstücke gestatten, denke man sich, dass eine Ecke aus zwei ebenen

Winkeln b, c und einem gegenüberliegenden Flächenwinkel γ im Raume construirt werden solle. Man kann dann zeigen, dass nur eine einzige Ecke erhalten wird, wenn c zwischen b und $180^\circ - b$ liegt, während es im anderen Falle im Allgemeinen zweierlei der Aufgabe genügende Ecken giebt. In entsprechender Weise, bezw. durch die Polarecke findet man für den anderen Fall, dass β, γ und c gegeben sind, die Bedingung, dass γ zwischen β und $180^\circ - \beta$ liege. Eine nähere Ausführung der Begründung dieser Sätze möge hier, ebenso wie eine weitere Untersuchung der Eigenschaften dreiseitiger Ecken, unterbleiben, da das bisherige für die Folge genügt, und die Behandlung sphärischer Dreiecke Gelegenheit geben wird, auf die Ecken zurückzukommen. Nur der Begriff und die wichtigsten Eigenschaften regelmässiger n-seitiger Ecken finden zweckmässig noch hier Erörterung.

§ 9. Regelmässige Ecken.

1. Unter einer **regelmässigen Ecke** versteht man eine solche Ecke, welche lauter gleiche ebene Winkel und lauter gleiche Flächenwinkel hat. Jede dreiseitige Ecke, deren drei ebene Winkel gleich gross sind, ist also beispielsweise eine regelmässige, dagegen kann bei mehrseitigen Ecken nicht aus der blossen Gleichheit aller ebenen Winkel auf die der Flächenwinkel oder umgekehrt geschlossen werden.

Es sei S eine regelmässige n-seitige Ecke, und man habe die an zwei benachbarten Kanten SA, SB liegenden Flächenwinkel halbirt, so müssen die Halbirungsebenen einander in einer durch S gehenden Geraden SM schneiden. Es ist hierdurch eine dreiseitige Ecke $S(ABM)$ entstanden, deren an SA und SB liegende Flächenwinkel als Hälften zweier nach Voraussetzung gleicher Winkel einander gleich sind. Hieraus folgt, dass auch die ebenen Winkel ASM, BSM gleich gross sein müssen. Construirt man nun die durch SM und die auf SB folgende Kante SC bestimmte Ebene, so sind in den beiden dreiseitigen Ecken $S(ABM)$, $S(BCM)$ der Voraussetzung zufolge die ebenen Winkel ASB, BSC, ferner die Flächenwinkel an SB gleich gross, und der ebene Winkel BSM ist beiden gemeinschaftlich. Demnach muss auch der Flächenwinkel der Ebenen MSC, BSC dem Flächenwinkel von MSB, ASB gleich sein, woraus hervorgeht, dass ersterer ebenfalls die Hälfte des Flächenwinkels von BSC und DSC ist. Nunmehr ergiebt sich in gleicher Weise wie vorher, dass in der Ecke $S(BMC)$ der ebene Winkel MSC gleich dem ebenen Winkel MSB ist. Man lege nun eine neue Ebene durch SM und SD, beweise wie vorher, dass die Ecken $S(MCD)$ und $S(MBC)$ in zwei ebenen Winkeln und dem eingeschlossenen Flächenwinkel übereinstimmen und beweise daraus durch ganz entsprechende Schlussfolgerungen wie vorher, dass der ebene Winkel MSD gleich MSC ist. Da sich diese Beweisführung für jede etwa noch folgende durch SM und eine Kante der Ecke S gehende Ebene wiederholen lässt, so ergiebt sich, dass die Gerade SM mit allen Kanten der Ecke gleiche Winkel bildet. Gleichzeitig ist gefunden worden, dass die durch SM und je eine Kante gehenden Ebenen die Flächenwinkel der Ecke halbiren, und es müssen daher auch umgekehrt die Halbirungsebenen der sämmtlichen Flächenwinkel durch SM gehen. Somit hat man den Satz:



Die Halbirungsebenen der Flächenwinkel einer regelmässigen Ecke schneiden einander sämmtlich in einer einzigen, durch den Scheitel der Ecke gehenden Geraden; diese Gerade bildet mit allen Kanten der Ecke gleiche Winkel. Dieselbe heisst die Achse der Ecke.

2. Legt man durch einen beliebigen Punkt M von SM die zu SM senkrechte Ebene, welche die Kanten der Ecke bezüglich in $A, B, C, D, \ldots$ schneide, so sind die Dreiecke SMA, SMB, SMC u. s. w. sämmtlich congruent, daher ist $MA = MB = MC \ldots.$ und $SA = SB = SC \ldots.$ Fällt man ferner von M auf irgend eine der Seiten des Polygons $ABCD \ldots$, z. B. auf AB, die senkrechte Gerade MG, so muss G die Seite AB halbiren und zu ihr senkrecht stehen. Zieht man noch SG, so halbirt SG den Winkel ASB und steht senkrecht auf AB. Die Ebene SGM steht senkrecht zur Kante AB und somit auch senkrecht zu der durch dieselbe gehenden Ebene ASB. Da man die gleichen Constructionen und Folgerungen auf jede der Ebenen der Ecke S anwenden und da man ferner die letzteren umkehren kann (weil jede Ebene, wie SGM, die einzige sein muss, welche die betreffenden Eigenschaften in Beziehung auf die zugehörigen Linien und Flächen hat), so ergeben sich folgende Sätze:

Die durch die Achse und je eine der Halbirungslinien der ebenen Winkel einer regelmässigen Ecke gehenden Ebenen stehen senkrecht zu der Ebene des zugehörigen ebenen Winkels, und umgekehrt schneiden sich die auf den Flächen in den Halbirungslinien der ebenen Winkel errichteten senkrechten Ebenen in einer einzigen Geraden, nämlich in der Achse der Ecke.

Aus der Congruenz der Dreiecke SGM u. s. w. folgt dann noch, dass die Achse auch mit allen Halbirungslinien der ebenen Winkel der Ecke gleiche Winkel bildet.

Zweiter Abschnitt:

Von den Körpern.

Kapitel 3.

Von den Körpern überhaupt und den Linien und Figuren an denselben.

§ 10. Die Pyramide.

1. Die Verbindung von vier oder mehr Ebenen mit einander führt neben Wiederholungen früher behandelter Raumgebilde auf ein neues, nämlich auf den ringsum durch Ebenen begrenzten Raumtheil oder den ebenflächigen Körper.

Die Untersuchung der möglichen Lagen dreier Ebenen gegen einander zeigte, dass sich mit letzteren kein Raumtheil vollständig begrenzen lässt, zugleich aber auch, dass die Hinzunahme einer vierten Ebene zu diesem Zwecke genügt; denn nimmt man auf jeder Kante einer dreiseitigen Ecke einen Punkt an (der nicht der Scheitel sein darf), so bildet die durch diese drei Punkte bestimmte Ebene mit den drei Ebenen der Ecke die Begrenzung eines Körpers.

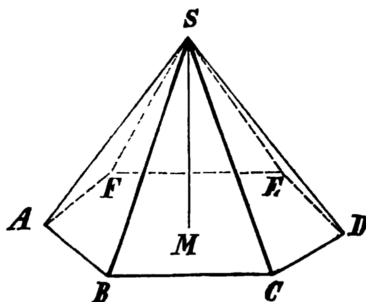
Jeder solche von vier Ebenen begrenzte Körper heisst ein Tetraeder. Dasselbe ist ein besonderer Fall einer allgemeinen Körperform, welche entsteht, wenn die sämmtlichen Kanten einer beliebig vielseitigen Ecke durch eine Ebene geschnitten werden. Jeder derartige Körper wird eine Pyramide genannt.

Eine Pyramide ist also ein Körper, welcher von drei oder mehr Ebenen,

deren Durchschnittslinien durch einen und denselben Punkt gehen, und durch eine diese Ebenen schneidende Ebene begrenzt wird. Man kann eine solche dadurch erzeugt denken, dass man einen beliebigen Punkt ausserhalb der Ebene eines Polygons mit allen Eckpunkten des letzteren verbindet und durch je zwei benachbarte dieser Verbindungslinien die zugehörige Ebene legt. Diejenigen Flächen einer Pyramide, deren Kanten durch den gemeinsamen Punkt gehen, heissen die Seitenflächen, ihre Durchschnittslinien mit einander die Seitenkanten, der gemeinschaftliche Punkt der letzteren die Spitze oder der Scheitel der Pyramide. Die Ebene, welche alle Seitenkanten schneidet, wird die Grundfläche, ihre Durchschnittslinien mit den Seitenflächen werden die Grundkanten genannt.

Jede Pyramide hat eben so viele Seitenflächen als Seitenkanten und als Grundkanten. Nach der Anzahl derselben oder, was wieder dasselbe ist, nach der Anzahl der Eckpunkte der Grundfläche unterscheidet man dreiseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w., allgemein n-seitige Pyramiden. Die Namen Tetraëder und dreiseitige Pyramide sind also gleichbedeutend.

Die von der Spitze S einer Pyramide auf die Grundfläche (oder deren Erweiterung) gefällte senkrechte Gerade SM heisst die Höhe der Pyramide. Lässt sich um die Grundfläche ein Kreis beschreiben, und ist der Fusspunkt M der Höhe der Mittelpunkt dieses Kreises, so sind nach § 2 die sämmtlichen Seitenkanten gleichlang und haben gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel, auch bilden dieselben gleiche Winkel mit der Höhe. Umgekehrt, sind alle Seitenkanten einer Pyramide gleich lang, so sind alle Eckpunkte ihrer Grundfläche gleichweit vom Fusspunkt der Höhe entfernt. Jede Pyramide, deren Seitenkanten sämmtlich gleichlang sind, heisst eine gerade, jede andere eine schiefe. Hat die Grundfläche einer Pyramide einen von allen Eckpunkten der ersteren gleichweit entfernten Punkt M, so heisst die Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit der Spitze in allen Fällen die Achse der Pyramide. Man kann daher auch sagen, eine gerade Pyramide sei eine solche, deren Achse senkrecht zur Grundfläche stehe, oder deren Höhe mit der Achse zusammenfalle.



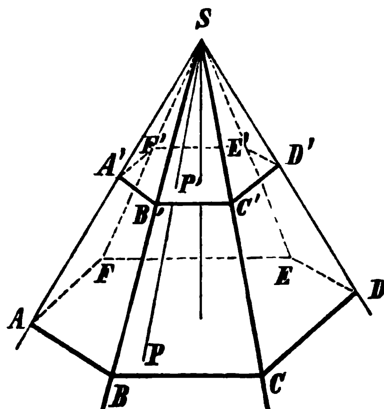
In jeder geraden Pyramide sind alle Seitenflächen gleichschenkelige Dreiecke, in der schiefen Pyramide sind entweder alle Seitenflächen ungleichseitige Dreiecke, oder es sind nur einzelne derselben 'gleichschenkelig. In jeder geraden Pyramide haben alle Seitenkanten gleiche Neigungswinkel zur Grundfläche, in einer schiefen können diese höchstens zum Theil von gleicher Grösse sein. Dagegen sind die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche auch in der geraden Pyramide im Allgemeinen nicht gleich; damit dies der Fall sei, muss der Fusspunkt der Höhe zugleich von allen Grundkanten gleichweit entfernt, also Mittelpunkt eines Kreises sein, der sich der Grundfläche einbeschreiben lässt.

Eine Pyramide heisst regelmässig, wenn ihre Grundfläche eine regelmässige Figur ist. Ist eine Pyramide gleichzeitig regelmässig und gerad, so sind alle Seitenflächen derselben einander congruent und haben gleiche Neigungswinkel zur Grundfläche. Die Ecke an der Spitze S ist dann eine regelmässige, und die Achse SM der Pyramide ist zugleich die Achse dieser Ecke.

2. Jeder ebene Schnitt durch eine Pyramide, welcher durch die Spitze S der letzteren gelegt ist, liefert als Schnittfigur ein Dreieck. Geht ein solcher Schnitt zugleich durch die Achse, so heisst er ein Achsenschnitt.

Jeder ebene Schnitt durch eine Pyramide, welcher nicht durch die Spitze S der letzteren gelegt ist, schneidet alle Seitenflächen oder deren Erweiterungen über die Grundkanten; die Schnittfigur einer n-seitigen Pyramide ist in diesem Falle ein n-Eck.

Sind $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ zwei solche Schnittfiguren einer und derselben Pyramide, deren Ebenen einander parallel sind, so sind je zwei in derselben Seitenfläche liegende Seiten AB, $A'B'$ oder BC, $B'C'$ u. s. w. nach § 4 (2) einander parallel. Hieraus folgt nach § 4 (3c weiter, dass je zwei homologe Winkel ABC und $A'B'C'$, BCD und $B'C'D'$ u. s. w. in beiden Figuren einander gleich sind, sowie nach der planimetrischen Lehre von den parallelen Transversalen eines Dreiecks, dass



$$AB : A'B' = SB : SB';$$
$$BC : B'C' = SB : SB',$$
also auch $$AB : A'B' = BC : B'C',$$
und in dieser Weise weiter, dass allgemein je zwei homologe Seiten beider Figuren zu einander in demselben Verhältniss stehen. Beide Eigenschaften der parallelen Schnittfiguren vereinigt führen zu dem Satz:

Alle nicht durch die Spitze gehenden Schnittfiguren eines pyramidalen Raumes, deren Ebenen einander parallel sind, sind einander ähnlich. (1)

Zugleich hat sich ergeben, dass von den Seitenkanten der Pyramide durch je zwei solche Schnitte Strecken abgeschnitten werden, welche für alle jene Kanten dasselbe Verhältniss zu einander haben, und dass dieses Verhältniss gleich demjenigen zweier homologen Seiten der Schnittfiguren ist. Zieht man ferner durch die Spitze S der Pyramide eine beliebige, die beiden Schnittebenen oder deren Erweiterungen bezüglich in P und P' schneidende Gerade, so ist auch das Verhältniss $SP : SP'$ der auf letzterer entstandenen Abschnitte dem eben genannten Verhältniss gleich, denn construirt man z. B. die durch SP und SA bestimmte Ebene, so sind die Durchschnittslinien AP, $A'P'$ der letzteren mit den Schnittebenen einander parallel, und es ist daher
$$SP : SP' = SA : SA' = AB : A'B'.$$

Insbesondere verhalten sich daher auch je zwei homologe Seiten der parallelen Schnittfiguren zu einander, wie die auf der Höhe gemessenen, also senkrechten Abstände ihrer Ebenen von der Spitze.

Da die Flächeninhalte ähnlicher Figuren sich zu einander wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, so folgt weiter, dass die Flächen zweier parallelen Schnittfiguren einer Pyramide sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (2), denn aus
$$AB : A'B' = SP : SP'$$
folgt $$AB^2 : A'B'^2 = SP^2 : SP'^2.$$

Als die eine der beiden Schnittfiguren kann auch die Grundfläche der Pyra-

mide dienen; die vorstehenden betreffenden Sätze gelten also insbesondere auch für die Grundfläche und jeden derselben parallelen Schnitt einer Pyramide.

3. Jeder zwischen zwei solchen parallelen Schnittebenen eines pyramidalen Raumes eingeschlossene Theil des letzteren wird eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf genannt, und man bezeichnet in der Regel die grössere der beiden Schnittflächen als die untere Grundfläche oder die Grundfläche schlechthin, die kleinere als die obere Grundfläche oder die Deckfläche. Der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen heisst die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Kann ein Pyramidenstumpf als ein Theil einer geraden Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche eine der Grundflächen des Stumpfes ist, so heisst der letztere ein gerader, und man findet mit Hülfe früherer Sätze leicht folgende Eigenschaften eines solchen. Alle Seitenkanten eines geraden Pyramidenstumpfes sind gleich lang und bilden mit beiden Grundflächen gleiche Neigungswinkel. Alle Seitenflächen eines geraden Pyramidenstumpfes sind gleichschenkelige Trapeze.

Jeder Pyramidenstumpf kann durch Erweiterung seiner Seitenflächen zu einer vollständigen Pyramide ergänzt werden. Diejenige hierbei entstehende Pyramide, welche ihn zur vollständigen ergänzt, heisst seine Ergänzungspyramide.

4. Man kann sich die Seitenflächen einer jeden Pyramide durch Bewegung einer Geraden beschrieben denken, welche beständig durch einen und denselben Punkt S und ausserdem in stetiger Aufeinanderfolge nach und nach durch alle Punkte des Umfangs eines gegebenen n-Ecks geht. Die hierbei als unendlich lang zu denkende Gerade beschreibt dann die Begrenzung des ganzen unendlichen pyramidalen Raumes, von dem die Ebene jenes n-Ecks eine Pyramide abschneidet. Da diese Gerade auch über den Punkt S hinaus in's Unendliche verlängert gedacht werden kann, so erhält man zu jenem pyramidalen Raum einen zweiten, welcher die Spitze S mit dem ersteren gemeinschaftlich hat, und dessen Seitenkanten mit je einer Seitenkante des ersteren in gerader Linie liegen. Die im Vorigen über ebene Schnitte durch einen pyramidalen Raum entwickelten Sätze gelten allgemein, auch wenn beide Schnitte in verschiedenen der zwei zusammengehörigen Räume liegen.

§ 11. Der Kegel.

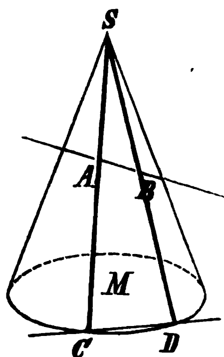
1. Wird bei der eben angegebenen Construction eines pyramidalen Raumes der als Leitlinie dienende Umfang des n-Ecks durch eine krumme Linie ersetzt, so beschreibt die bewegte Gerade eine Fläche, welche eine Kegelfläche genannt wird. Eine jede solche Kegelfläche besteht wieder aus zwei durch den festen Punkt S der beschreibenden Geraden getrennten, zu einander gehörigen Theilen.

Ist die Leitlinie ein Kreis, so erhält man eine gemeine Kegelfläche. In der Elementar-Mathematik kann nur diese letztere behandelt werden, und daher soll im Folgenden unter einer Kegelfläche schlechthin stets eine gemeine verstanden werden. Ueber eine solche ergeben sich aus ihrer Entstehungsweise leicht folgende Sätze:

Die Kegelfläche besteht aus zwei congruenten Theilen, von denen jeder einen nach einer Seite offenen unendlichen Raum umschliesst. Ein solcher offener kegelförmiger Raum kann als ein unendlich vielseitiger pyramidaler Raum betrachtet werden. — Durch jeden Punkt einer Kegelfläche lässt sich in

dieser eine Gerade legen, denn die beschreibende Gerade muss bei ihrer Bewegung einmal durch jenen Punkt gegangen sein. Diese Geraden, welche demnach alle durch einen und denselben Punkt, den festen Punkt der beschreibenden Geraden, gehen, sollen die Seitenlinien der Kegelfläche heissen; ihr Durchschnittspunkt wird auch hier die Spitze oder der Scheitel der Fläche genannt. Jede Seitenlinie des einen der beiden zusammengehörigen Theile einer vollständigen Kegelfläche, welche die Spitze gemeinschaftlich haben, ist in ihrer Verlängerung über die Spitze zugleich Seitenlinie des anderen Theils. Umgekehrt muss jede gerade Linie, welche die Spitze einer Kegelfläche mit einem anderen Punkt der letzteren verbindet, ihrer ganzen Erstreckung nach in diese Fläche fallen.

2. Jede andere gerade Linie, welche zwei Punkte einer Kegelfläche verbindet, hat mit der letzteren nur diese beiden Punkte gemein, denn sind zunächst A, B zwei solche auf verschiedenen Seitenlinien und auf demselben der beiden Theile der Kegelfläche liegende Punkte, so kann man durch jeden derselben eine Seitenlinie SA, SB legen, und die durch diese beiden Seitenlinien bestimmte Ebene muss die Gerade AB ihrer ganzen Erstreckung nach enthalten. Sie muss ferner die Ebene des als Leitlinie dienenden Kreises M in einer Geraden schneiden, welche durch die Fusspunkte C, D jener Seitenlinien in dieser Ebene geht, also eine Secante ist. Hätte nun die Gerade AB mit der Kegelfläche irgend einen dritten Punkt E gemeinsam, so müsste auch die durch S und E bestimmte Seitenlinie ganz in die Schnittebene SCD fallen, und der Fusspunkt dieser Seitenlinie in der Ebene von M müsste ein dritter Punkt sein, welchen die Secante CD mit dem Kreise M gemeinschaftlich hätte, was bekanntlich unmöglich ist. — Man erkennt gleichzeitig, dass das von A und B begrenzte Stück der durch diese Punkte gehenden Geraden ganz innerhalb des kegelförmigen Raumes fallen muss, während die Verlängerungen der Geraden über A und B ganz ausserhalb dieses Raumes liegen. — Liegen ferner A und B auf verschiedenen Hälften der Kegelfläche, so lässt sich der Beweis in ganz entsprechender Art führen; nur erkennt man hier, dass die Strecke AB ganz ausserhalb der kegelförmigen Räume und jede der Verlängerungen ganz innerhalb eines derselben liegt.



Aus dem vorigen Satze folgt, dass ausser den Seitenlinien keine geraden Linien in einer Kegelfläche gezogen werden können, durch jeden Punkt der letzteren, welcher nicht die Spitze ist, also nur eine einzige Gerade in der Fläche möglich ist. Die Kegelfläche ist also in keinem Theil derselben eben; sie ist eine in sich zurückkehrende krumme Fläche.

3. Jede durch die Spitze einer Kegelfläche gelegte Ebene muss, wenn sie mit der Kegelfläche noch einen Punkt gemeinsam hat, die ganze Seitenlinie dieses Punktes mit ihr gemeinsam haben; jede durch die Spitze gehende Schnittebene einer Kegelfläche, welche also durch irgend einen Punkt innerhalb des Kegelraums geht, schneidet die Kegelfläche in zwei Seitenlinien. Ausser diesen Seitenlinien kann sie mit der Kegelfläche keinen Punkt gemeinsam haben. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich leicht aus der vorhergegangenen

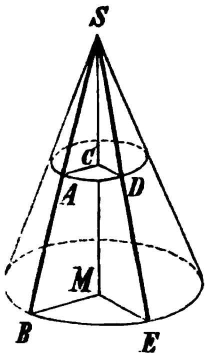
Beweisführung mittelst der Secante CD, welche die Durchschnittslinie der Schnittebenen mit der Ebene des Leitkreises M sein muss.

Die gerade Linie, welche durch die Spitze S und den Mittelpunkt M des Leitkreises geht, heisst die Achse der Kegelfläche. Jeder ebene Schnitt der letzteren, welcher durch diese Achse geht, heisst ein Achsenschnitt. Steht die Achse senkrecht zur Ebene des Leitkreises, so heisst die Kegelfläche eine gerade, im anderen Fall wird sie eine schiefe genannt.

Jede durch die Spitze S gehende Ebene, welche die Ebene des Leitkreises in einer Tangente des letzteren schneidet, hat mit der Kegelfläche nur die durch den Berührungspunkt der Tangente gehende Seitenlinie gemeinschaftlich und heisst deshalb eine Berührungs-Ebene (Tangential-Ebene) der Kegelfläche. Jene Seitenlinie wird ihre Berührungslinie genannt. Der Beweis des Satzes folgt im Wesentlichen daraus, dass ein gemeinschaftlicher Punkt beider Flächen ausserhalb jener Seitenlinie auch eine zweite gemeinschaftliche Seitenlinie zur Folge haben würde, wodurch eine Secante als Durchschnittslinie der Ebene mit derjenigen des Leitkreises bedingt sein würde.

Jede durch die Spitze S gehende Ebene, welche die Ebene des Leitkreises in einer ganz ausserhalb des letzteren liegenden Geraden, also weder in einer Secante noch in einer Tangente schneidet, hat mit der Kegelfläche ausser der Spitze keinen Punkt gemeinsam.

4. Jede eine Kegelfläche schneidende Ebene, welche nicht durch die Spitze geht, liefert eine krumme Durchschnittslinie, denn wäre irgend ein Theil derselben gerad, so müsste die durch diesen Theil und die Spitze gehende Ebene alle die durch diesen Theil gehenden Seitenlinien enthalten, was nach dem Vorigen nicht möglich ist. Die Durchschnittslinien von Ebenen mit Kegelflächen führen den Namen Kegelschnitte. Trifft der Schnitt sämmtliche Seitenlinien, so muss die Schnittlinie eine in sich selbst zurückkehrende Curve (Ellipse) sein, ist jener einer einzigen Seitenlinie parallel, so erhält man eine aus zwei in's Unendliche auseinander laufenden Aesten bestehende Curve (Parabel), ist endlich die Schnittebene zwei Seitenlinien parallel, so durchschneidet sie jeden der beiden Theile der Kegelfläche und die Schnittfigur besteht aus zwei getrennten Theilen, von denen jeder mit zwei Aesten in's Unendliche verläuft (Hyperbel). Schon hieraus geht hervor, dass es verschiedene Arten von Kegelschnitten giebt, und dass die Behandlung derselben sich im Wesentlichen der Elementar-Mathematik entzieht, da diese von allen krummen Linien nur den Kreis behandelt. Die Lehre von den Kegelschnitten bildet dagegen einen der wichtigsten Theile der höheren Geometrie.



In dem besonderen Falle jedoch, in welchem die Schnittebene der Ebene des Leitkreises parallel ist, kann eine elementar-mathematische Behandlung stattfinden, denn eine solche Schnittfigur ist ebenfalls ein Kreis. Ist nämlich C der Punkt, in welchem die Achse der Kegelfläche die Schnittebene trifft, M der Mittelpunkt des Leitkreises der letzteren und AC die Verbindungslinie des Punktes C mit einem beliebigen Punkte A der Schnittlinie, so kann man eine Ebene durch SM und CA legen, welche die Kegelfläche in einer Seitenlinie SB und die Ebene des Leitkreises in einem zu CA parallelen Radius MB desselben schneiden muss. Daher ist

$$CA : MB = SC : SM.$$

Für jede andere Verbindungslinie von C mit einem Punkte D der Schnittlinie erhält man in gleicher Weise, wenn ME der zu CD parallele Radius ist.

$$CD : ME = SC : SM.$$

Daher ist auch $CA : MB = CD : ME$, und da $MB = ME$, so ist auch $CA = CD$, d. h. jede andere derartige Verbindungslinie ist der ersten CA gleich. Hiermit ist nicht nur die obige Behauptung bewiesen, dass die Schnittlinie ein Kreis sei, sondern ausserdem auch, dass die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf der Achse liegen und dass der Radius eines solchen zum Radius des Leitkreises, oder — was in gleicher Weise sich ergiebt — dass die Radien je zweier solcher Kreise sich zu einander verhalten, wie die Abstände der zugehörigen Mittelpunkte von der Spitze. In derselben Weise wie bei den parallelen Schnitten eines pyramidalen Raumes ergiebt sich, dass man für das letztere Verhältniss auch dasjenige der betreffenden Abschnitte jeder anderen von S durch die beiden Ebenen gezogenen Geraden und insbesondere auch dasjenige der Abschnitte einer Seitenlinie $SB : SA$ sowie dasjenige der senkrechten Abstände der beiden Flächen von der Spitze setzen kann. Die Flächen je zweier Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate dieser Abstände.

5. Jede der Ebene des Leitkreises parallele Schnittlinie einer Kegelfläche kann an Stelle des ersteren als Leitlinie bei Erzeugung dieser Kegelfläche dienen. Jeder durch eine Kegelfläche und die Ebene eines solchen Kreises begrenzter Körper heisst ein Kegel (Conus), jeder durch eine Kegelfläche und die Ebenen zweier solcher einander parallelen Kreise begrenzter Körper ein abgestumpfter Kegel oder ein Kegelstumpf. Der einen Kegel oder einen Kegelstumpf begrenzende Theil einer Kegelfläche heisst auch der Mantel des Kegels oder Stumpfs, die zugehörigen Kreisflächen heissen die Grundflächen und werden bei dem Kegelstumpf als obere und untere Grundfläche oder als Grundfläche und Deckfläche unterschieden. Die Begriffe Spitze, Achse, Seitenlinie, Achsenschnitte eines Kegels oder Kegelstumpfs erklären sich durch die entsprechenden der Kegelfläche. Die Höhe eines Kegels ist der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, die Höhe eines abgestumpften Kegels der senkrechte Abstand der beiden Grundflächen. Jeder abgestumpfte Kegel hat einen Ergänzungskegel, welcher ihn zum vollständigen Kegel ergänzt.

Ein gerader Kegel oder Kegelstumpf ist ein solcher, dessen Achse senkrecht zur Grundfläche steht, also mit der Höhe zusammenfällt. Für gerade Kegel findet man leicht folgende Lehrsätze:

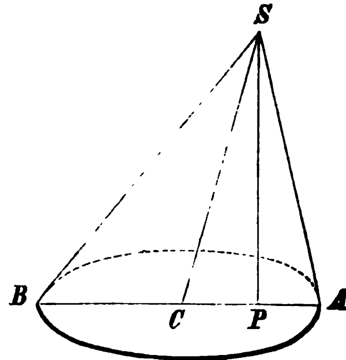
Alle Seitenlinien eines geraden Kegels sind gleich lang und haben gegen die Grundfläche gleiche Neigung. Umgekehrt ist jeder Kegel, dessen Seitenlinien gleich lang sind oder gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben, ein gerader. Alle Achsenschnitte eines geraden Kegels sind congruente gleichschenkelige Dreiecke. Jedes derselben wird durch die Höhe des Kegels, welche zugleich die Höhe des Dreiecks ist, in zwei rechtwinkelige Dreiecke getheilt; alle diese rechtwinkeligen Dreiecke sind congruent. Man kann sich daher einen geraden Kegel durch Rotation eines rechtwinkeligen Dreiecks um eine Kathete des letzteren beschrieben denken; dabei beschreibt die Hypotenuse den Kegelmantel. Denkt man sich dieselbe über beide Endpunkte bis in's Unendliche verlängert, so erhält man den Satz: Jede Gerade, welche um eine sie schneidende Gerade als Umdrehungsachse rotirt, beschreibt eine gerade Kegelfläche. Zwischen der

Länge a der Achse, derjenigen des Radius r der Grundfläche und derjenigen der Seitenlinie s eines geraden Kegels besteht die Gleichung

$$a^2 + r^2 = s^2,$$

welche die Berechnung einer jeden dieser drei Grössen aus den gegebenen anderen ermöglicht.

6. Bei einem schiefen Kegel ist die Achse SC stets grösser als die Höhe SP. Die durch die Achse und je eine Seitenlinie bestimmten Dreiecke stimmen auch hier in zwei Seiten überein, dagegen sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel zwischen der Achse und den Radien der Grundfläche nach § 2 im Allgemeinen verschieden. Die in diesem § 2 über die betreffenden Winkel entwickelten Sätze lassen sofort die folgenden Eigenschaften schiefer Kegel erkennen:



Von allen Seitenlinien eines schiefen Kegels ist diejenige die kleinste, welche durch den Endpunkt des mit dem Neigungsschenkel der Achse gegen die Grundfläche zusammenfallenden Radius geht, und diejenige die grösste, welche durch den Endpunkt des die Verlängerung des vorigen bildenden Radius geht. Der durch die Achse und die Höhe gehende ebene Schnitt des Kegels schneidet also den Mantel des letzteren in der kürzesten und in der längsten Seitenlinie. Dieser Achsenschnitt, welcher zur Grundfläche senkrecht steht und den Neigungswinkel der Achse gegen die Grundfläche enthält, ist ein Dreieck, dessen dritte Seite ein Durchmesser der Grundfläche ist; dasselbe wird das charakteristische Dreieck des Kegels genannt. Von je zwei anderen Seitenlinien ist diejenige die grössere, für welche der nach ihrem Fusspunkt in der Grundfläche gehende Radius den grösseren Winkel mit dem Neigungsschenkel der Achse bildet, und je zwei zu verschiedenen Seiten des durch die Höhe gehenden Achsenschnitts liegende Seitenlinien, für welche diese Winkel gleich gross sind, haben gleiche Längen. Zu allen diesen Sätzen lassen sich richtige Umkehrungen bilden. Kein schiefer Kegel kann drei oder mehr gleich lange Seitenlinien haben, oder ein Kegel mit drei gleichen Seitenlinien ist ein gerader. Entsprechendes gilt von Seitenlinien, welche gleiche Neigungswinkel zur Grundfläche haben.

Bei einem Kegelstumpf verbindet die Achse die Mittelpunkte der beiden Grundflächen. Ist der Kegelstumpf ein gerader, so sind alle Seitenlinien desselben gleich lang, sie haben ferner gegen die Grundflächen gleiche Neigung, und alle Achsenschnitte sind congruente gleichschenkelige Trapeze und umgekehrt. Zwischen den Längen der Achse a, der Seitenlinie s und der Radien R, r der Grundflächen besteht die Beziehungsgleichung

$$s^2 = (R - r)^2 + a^2.$$

Bei dem schiefen Kegelstumpf gelten in Betreff der Seitenlinien und Achsenschnitte entsprechende Sätze wie bei dem vollständigen schiefen Kegel. An die Stelle des charakteristischen Dreiecks tritt hier ein charakteristisches Trapez.

7. In jeden Kegel lassen sich beliebig viele Pyramiden einbeschreiben, so dass die Spitze einer solchen Pyramide mit der Spitze des Kegels zusammenfällt und die Grundfläche der Pyramide eine der Grundfläche des Kegels einbeschriebene Figur ist. Die Kanten einer solchen Pyramide sind Seitenlinien des

Kegels, die Seitenflächen der Pyramide Schnittflächen des Kegels. Die Pyramide ist gerade, wenn der Kegel ein gerader ist und umgekehrt.

Um jeden Kegel lassen sich beliebig viele Pyramiden beschreiben, so dass die Spitze einer solchen Pyramide mit der Spitze des Kegels zusammenfällt und die Grundfläche der Pyramide eine der Grundfläche des Kegels umbeschriebene Figur ist. Die Seitenflächen der Pyramide sind Berührungsebenen des Kegels.

Jeder Kegel kann als die Grenze betrachtet werden, welcher sich eine regelmässige Pyramide bei unendlicher Zunahme ihrer Seitenzahl ohne Ende nähert. In diesem Sinne kann der Kegel eine unendlich vielseitige Pyramide genannt werden.

Den ein- und umbeschriebenen Pyramiden eines Kegels entsprechen in ganz gleicher Weise ein- und umbeschriebene Pyramidenstumpfe bei einem abgestumpften Kegel.

8. Schliesslich verdient noch eine Eigenschaft der Kegelflächen als bemerkenswerth Erwähnung, welche darin besteht, dass jede solche Fläche sich in eine Ebene aufwickeln lässt. (Abwickelbare oder devellopable Flächen.) Diese Eigenschaft ist eine Folge der Entstehung der Kegelfläche durch Bewegung einer Geraden in solcher Weise, dass durch jede zwei aufeinanderfolgende Lagen dieser Geraden eine Ebene gelegt gedacht werden kann. Man kann daher auch umgekehrt eine Kegelfläche durch geeignetes Zusammenrollen einer Ebene bilden. Handelt es sich bei der Abwicklung nur um denjenigen Theil einer Kegelfläche, welcher den Mantel eines Kegels bildet, so entsteht bei einem geraden Kegel, da hier alle Seitenlinien gleichlang sind, ein Kreissector, dessen Radius den Seitenlinien und dessen Bogen dem Umfang der Grundfläche des Kegels gleich ist. Umgekehrt kann daher ein Kreissector zu einem geraden Kegelmantel zusammengerollt werden. Bei schiefen Kegeln dagegen legt sich in Folge der ungleichen Länge der Seitenlinien bei der Abwicklung des Mantels der Umfang der Grundfläche nicht in Gestalt eines Kreisbogens in die Ebene, vielmehr entsteht eine krumme Linie, deren Beschaffenheit hier nicht näher erörtert werden kann.

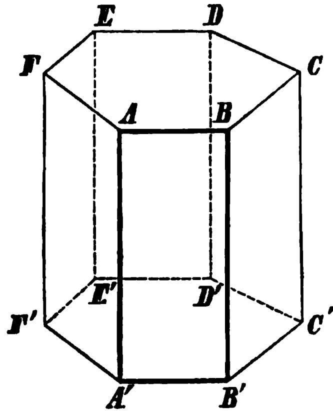
Denkt man sich die Spitze einer Pyramide oder eines Kegels bei unveränderter Lage und Grösse der Grundfläche beweglich, und lässt man dieselbe sich bis in's Unendliche entfernen, so gehen die Seitenkanten der Pyramide und die Seitenlinien des Kegels in einander parallele Linien über und man gelangt zu den neuen Körperformen des Prismas und des Cylinders, welche im Folgenden zunächst unabhängig von dieser Entstehungsweise besprochen werden sollen.

§ 12. Das Prisma.

1. Zieht man durch jeden Eckpunkt eines gegebenen n-Ecks ausserhalb der Ebene desselben eine Gerade, so dass alle diese Geraden einander parallel sind, so lässt sich durch je zwei dieser Parallelen und eine Seite des n-Ecks eine Ebene legen. Diese Ebenen, welche also einander in parallelen Geraden schneiden, schliessen einen offenen n-seitigen prismatischen Raum ein. Wird letzterer durch zwei jene Ebenen schneidende und einander parallele Ebenen geschlossen, so erhält man einen ringsum begrenzten Raum. Jeder solche Körper heisst ein **Prisma**.

Diejenigen Grenzflächen eines Prismas, welche einander in parallelen Linien AA', BB' u. s. w. schneiden, heissen die **Seitenflächen**, die einander parallelen Grenzflächen $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ die **Grundflächen** des Prismas. Die

einander parallelen Durchschnittslinien der Seitenflächen unter sich werden die Seitenkanten, die Durchschnittslinien der Seitenflächen mit den Grundflächen die Grundkanten genannt; der senkrechte Abstand der Grundflächen von einander heisst die Höhe des Prismas.



Die Anzahl der Seiten jeder Grundfläche eines Prismas ist gleich der Anzahl der Seitenkanten und gleich der Anzahl der Seitenflächen. Diese Anzahl ist mindestens drei. Nach derselben unterscheidet man dreiseitige, vierseitige u. s. w., allgemein n-seitige Prismen.

Aus früheren Lehrsätzen (§ 4) folgen unmittelbar nachstehende Eigenschaften der Prismen: Alle Seitenkanten eines Prismas sind gleich lang. Dieselben haben ferner sämmtlich gleiche Neigungswinkel gegen jede der beiden Grundflächen. Daher stehen sie entweder sämmtlich senkrecht oder sämmtlich schief zu den Grundflächen, und man kann hiernach die Prismen in gerade und schiefe eintheilen. Ferner sind je zwei in derselben Seitenfläche liegende Grundkanten eines Prismas parallel und gleich lang; alle Seitenflächen sind Parallelogramme, und an geraden Prismen insbesondere Rechtecke. Dagegen können bei einem schiefen Prisma nur einzelne der Seitenflächen Rechtecke sein; sind zwei aneinanderstossende Seitenflächen rechtwinkelig, so ist das Prisma jedenfalls ein gerades.

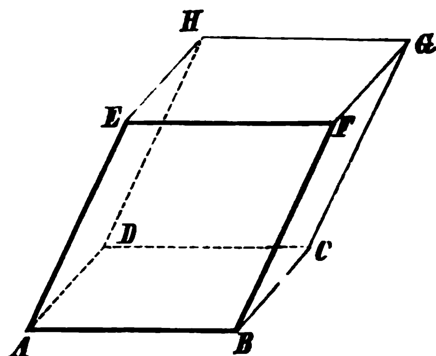
Je zwei an derselben Seitenkante liegende Winkel der beiden Grundflächen sind gleich gross, denn ihre Schenkel sind paarweise parallel und gleichgerichtet. Da auch je zwei homologe Seiten der beiden Figuren einander gleich sind, so folgt der Satz: Die beiden Grundflächen eines jeden Prismas sind congruent (1). Dieser Satz gilt allgemein von allen unter einander parallelen ebenen Schnitten eines prismatischen Raumes, also auch von einer Grundfläche und einem ihr parallelen, sowie von je zwei einander parallelen, zur Grundfläche geneigten Schnitten eines Prismas, denn es können stets zwei solche parallele Flächen als Grundflächen eines Prismas angesehen werden. Dagegen sind nicht parallele ebene Schnitte eines prismatischen Raumes im Allgemeinen nicht congruent.

Da jeder ebene Schnitt eines Prismas, welcher den Seitenkanten nicht parallel ist, die nöthigenfalls erweiterten Seitenflächen des Körpers sämmtlich schneiden muss, so bleiben von den ebenen Schnitten der Prismen ausser den vorher besprochenen nur noch diese den Seitenkanten parallelen, bezw. durch eine oder durch zwei Seitenkanten gehenden übrig. Jeder solche Schnitt ist ein Parallelogramm, wie unmittelbar aus betreffenden früheren Sätzen folgt. Ist das Prisma ein gerades, so ist jeder solche Schnitt ein Rechteck.

Sind die Grundflächen eines Prismas Figuren, um welche sich ein Kreis beschreiben lässt, so heisst die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte die Achse des Prismas. Dieselbe ist den Seitenkanten und den Seitenflächen parallel, steht also bei geraden Prismen senkrecht zu den Grundflächen und ist hier der Höhe gleich. Bei schiefen Prismen ist sie länger als die Höhe, und in allen Fällen ist sie mit den Seitenkanten von gleicher Länge. Sind insbesondere

die Grundflächen regelmässige Figuren, so heisst das Prisma ein **regelmässiges**. Ist dasselbe zugleich gerad, so sind alle Seitenflächen congruente Rechtecke.

2. Eine besondere Wichtigkeit besitzen diejenigen vierseitigen Prismen, deren Grundflächen Parallelogramme sind, und welche demnach nur von Parallelogrammen begrenzt werden. Man nennt ein solches Prisma ein **Parallelepipedon**. Es seien $ABCD$, $EFGH$ die Grundflächen eines solchen Körpers, so sind $EFBA$ und $HGCD$ zwei Seitenflächen, deren Ebenen ebenfalls einander parallel sind, da EF zu HG und FB zu GC parallel ist. Die Seitenflächen $EFBA$, $HGCD$ sind ferner einander congruent, denn es ist $EF = HG$, $\angle EFB = \angle HGC$, $FB = GC$, u. s. w. Da endlich die nicht in diesen beiden Flächen liegenden Kanten EH, FG, BC, AD einander parallel sind, so kann man den Körper auch als ein Prisma ansehen, das jene beiden Flächen zu Grundflächen hat. Entsprechendes gilt von den Flächen $FGBC$ und $EHDA$. Somit ergeben sich folgende Eigenschaften der Parallelepipeda:



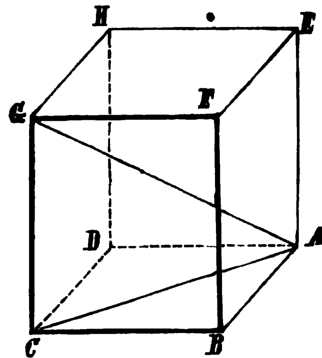
Die sechs Grenzflächen eines jeden Parallelepipedons bilden drei Paare, so dass die Flächen eines jeden Paares einander gegenüberliegen, der Lage nach parallel, und einander congruente Figuren sind. Jedes dieser Paare kann als die Grundfläche des Parallelepipedons angenommen werden. Die zwölf Kanten des Körpers bilden entsprechend drei Gruppen, so dass die vier Kanten einer jeden Gruppe unter sich parallel und gleich sind; mittelst eines beliebigen ebenen Schnitts durch das Parallelepipedon, welcher zu vier solchen Kanten senkrecht steht und als Schnittfigur ein Parallelogramm liefern muss, dessen Winkel bezüglich die Neigungswinkel der an den betreffenden Kanten liegenden Flächenwinkel sind, erkennt man, dass je zwei von den zwölf Flächenwinkeln des Parallelepipedons, welche an einander gegenüberliegenden parallelen Kanten liegen, gleich gross, und je zwei an benachbarten parallelen Kanten liegende zu einander supplementär sein müssen. Die acht Ecken eines Parallelepipedons endlich bilden vier Paare A und G, B und H, C und E, D und F einander diametral gegenüberliegender Ecken, und je zwei solche stimmen in den ebenen Winkeln und in den homologen Flächenwinkeln überein. Dabei folgen die einander entsprechenden Stücke in umgekehrten Ordnungen auf einander; die beiden Ecken sind also symmetrisch.

Je zwei gegenüberliegende Eckpunkte, z. B. A, G, eines Parallelepipedon lassen sich durch eine ganz innerhalb des Körpers fallende Gerade verbinden. Die vier so entstehenden Geraden sollen die **Diagonalachsen** des Parallelepipedon genannt werden. Durch je zwei einander gegenüberliegende parallele Kanten, z. B. AE und CG, ferner lässt sich ein ebener Schnitt legen, welcher jede von zwei parallelen Grenzflächen ($ABCD$, $EFGH$) in einer Diagonale schneiden muss. Die beiden betreffenden Diagonalen (AC, EG) sind einander parallel und gleich, die Schnittfigur ist ein Parallelogramm und ihre Diagonalen sind zwei Diagonalachsen des Körpers. Jeder der sechs auf diese Art möglichen Schnitte eines Parallelepipedon heisst ein **Diagonalschnitt** des letzteren. Da

jede der vier Diagonalachsen Diagonale in drei solchen Schnitten zugleich sein muss, z. B. AG in $ACGE$, $AFGD$ und $GBAH$, und die beiden Diagonalen eines Parallelogramms einander stets halbiren, so folgt leicht, dass alle vier Diagonalachsen einander in einem und demselben Punkte schneiden, und dass sie einander in diesem Punkte halbiren. In demselben Punkte müssen die sechs Diagonalschnitte einander durchschneiden; die Durchschnittslinien je zweier derselben sind die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte der Diagonalen je zweier einander parallelen Grenzflächen und die Diagonalachsen. Die ersteren Verbindungslinien sind drei Gerade, welche einander ebenfalls in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Diagonalachsen schneiden und halbiren. Jede derselben ist zwei Paaren paralleler Grenzflächen und den vier einander parallelen Durchschnittskanten der letzteren parallel und mit diesen Kanten von gleicher Länge. Diese drei Linien heissen ebenfalls Achsen des Parallelepipedon.

In jedem Eckpunkt eines Parallelepipedon stossen drei Kanten aneinander, z. B. in A die Kanten AB, AD, AE, welche im Allgemeinen nicht als einander gleich anzunehmen sind, und welche bezüglich je einer der drei Gruppen unter sich paralleler und gleicher Kanten angehören. Jede derselben ist einer der drei zuletzt genannten Achsen parallel.

3. Die dreierlei Flächenwinkel, welche an den Grenzflächen eines Parallelepipedon vorkommen, können gleichzeitig alle drei schief, oder es kann eine Art derselben aus rechten Winkeln bestehen, oder es sind zwei derselben oder endlich alle drei rechte. Es können also beispielsweise zwei parallele von den als Seitenflächen angenommenen Grenzflächen zur Grundfläche senkrecht stehen, während die beiden anderen schief zu derselben sind; ist auch das zweite Paar Seitenflächen senkrecht zu den Grundflächen, so ist das Parallelepipedon ein gerades; ist endlich die Grundfläche eines geraden Parallelepipedon ein Rechteck, so stehen auch je zwei aneinanderstossende Seitenflächen zu einander senkrecht, und das Parallelepipedon heisst ein rechtwinkeliges. In einem solchen sind alle Grenzflächen Rechtecke, und jede drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten stehen senkrecht zueinander; alle Ecken des Körpers sind also dreifach rechtwinkelig. Sind a, b, c die Längen der Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipedon, so ergiebt sich mittelst rechtwinkeliger Dreiecke AGC, ABC aus



$$AG^2 = AC^2 + CG^2,\ AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

dass die Länge einer jeden Diagonalachse gleich

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist. Alle vier Diagonalachsen sind einander gleich.

Setzen wir die Fundamentallehren der Trigonometrie an dieser Stelle als bekannt voraus, so kann noch der folgende bemerkenswerthe Satz über die Winkel, welche eine durch den Scheitel A einer dreifach rechtwinkeligen Ecke innerhalb der letzteren gezogene beliebige Gerade mit den Kanten der Ecke bildet, entwickelt werden: Da

$$\cos GAB = \frac{AB}{AG},\ \cos GAE = \frac{AE}{AG},\ \cos GAD = \frac{AD}{AG},$$

so ist $$\cos^2 GAB + \cos^2 GAE + \cos^2 GAD = \frac{AB^2 + AE^2 + AD^2}{AG^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

also $$\cos^2 GAB + \cos^2 GAE + \cos^2 GAD = 1.$$

Ist insbesondere die Grundfläche eines rechtwinkeligen Parallelepipedon ein Quadrat, und sind gleichzeitig die Seitenkanten den Grundkanten gleich, sind also alle Kanten des Körpers von gleicher Länge und alle Seitenflächen congruente Quadrate, so heisst der Körper ein Würfel oder Cubus.

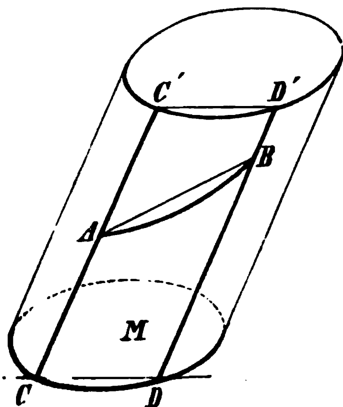
§ 13. Der Cylinder.

1. Man kann sich einen prismatischen Raum durch Bewegung einer Geraden beschrieben denken, welche in continuirlicher Aufeinanderfolge durch alle Punkte des Umfangs eines gegebenen n-Ecks geht und dabei beständig ihrer anfänglichen, die Ebene des Polygons schneidenden Lage parallel bleibt. Wird bei dieser Construction der Umfang des n-Ecks durch eine krumme Linie ersetzt, welche also als Leitlinie der einer beliebigen Richtung parallel bleibenden beschreibenden Geraden dient, so heisst die entstehende Fläche eine Cylinderfläche. Ist insbesondere die Leitlinie ein Kreis, so erhält man die gemeine Cylinderfläche, von welcher im Folgenden allein die Rede ist.

Durch jeden Punkt einer solchen Cylinderfläche lässt sich eine Gerade legen, da die beschreibende Gerade bei ihrer Bewegung einmal durch diesen Punkt gegangen sein muss. Diese Geraden, welche alle einander parallel sind, heissen die Seitenlinien der Cylinderfläche.

Die durch den Mittelpunkt des als Leitlinie dienenden Kreises gehende, den Seitenlinien parallele Gerade wird die Achse der Cylinderfläche genannt. Umgekehrt muss jede durch einen Punkt einer Cylinderfläche parallel zu der Achse gelegte Gerade ihrer ganzen Erstreckung nach in die Cylinderfläche fallen.

Jede andere gerade Linie, welche zwei Punkte einer Cylinderfläche verbindet, hat mit dieser nur jene beiden Punkte gemeinsam, denn sind A, B zwei solche Punkte, so kann man durch jeden derselben eine Seitenlinie CC', DD' legen, und die durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene muss die Gerade AB ihrer ganzen Erstreckung nach enthalten. Sie muss ferner die Ebene des als Leitlinie dienenden Kreises M in einer Geraden schneiden, welche durch die Fusspunkte CD jener Seitenlinien in dieser Ebene geht, also eine Secante des Kreises M ist. Hätte nun die Gerade AB mit der Cylinderfläche irgend einen dritten Punkt E gemeinsam, so müsste die durch E bestimmte Seitenlinie zugleich ganz in die Schnittebene $CDD'C'$ fallen, und der Fusspunkt dieser Seitenlinie in der Ebene von M müsste ein Punkt sein, welchen die Secante CD neben den Punkten C und D mit dem Kreise M gemeinschaftlich hätte, was bekanntlich unmöglich ist. — Man sieht zugleich, dass die von A und B begrenzte Strecke der betreffenden Geraden ganz innerhalb und jede ihrer Verlängerungen ganz ausserhalb des cylindrischen Raumes fallen muss



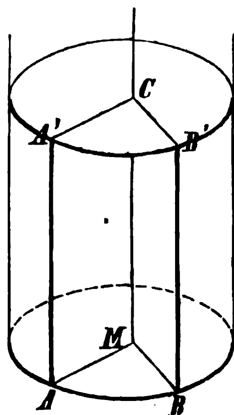
Hiernach kann ausser den Seitenlinien keine gerade Linie in einer Cylinderfläche gezogen werden, vielmehr ist durch jeden Punkt der letzteren nur eine einzige Gerade in ihr möglich. Die Cylinderflächen sind also in keinem ihrer Theile eben; sie sind in sich zurückkehrende krumme Flächen.

2. Jede durch einen cylindrischen Raum gelegte, einer Seitenlinie oder der Achse parallele Ebene muss die Cylinderfläche in zwei Seitenlinien schneiden, denn wäre eine krumme Durchschnittslinie oder wäre ausser zwei Seitenlinien noch irgend ein anderer Punkt beiden Flächen gemeinsam, so müssten auch die sämmtlichen durch die Punkte der krummen Linie, bezw. die durch den anderen Punkt gehende Seitenlinie ihrer ganzen Länge nach in die Schnittebene fallen, und somit auch der Fusspunkt jeder solchen Seitenlinie in der Ebene des Leitkreises M ein dritter Punkt sein, welchen die Secante CD mit dem Kreise M gemeinschaftlich hätte.

Geht ein solcher Schnitt durch die Achse selbst, so heisst derselbe ein Achsenschnitt der Cylinderfläche.

Jede Ebene, welche durch eine Seitenlinie einer Cylinderfläche und durch eine Tangente des Leitkreises geht, hat mit der Cylinderfläche nur diese Seitenlinie gemeinsam, und liegt sonst ganz ausserhalb des cylindrischen Raumes, denn läge irgend ein Punkt der Ebene ausser jener Seitenlinie in der Cylinderfläche, oder läge ein solcher Punkt innerhalb des cylindrischen Raumes, so müsste diese Ebene die Ebene des Leitkreises in einer Secante schneiden. Eine solche Ebene, welche mit einer Cylinderfläche nur eine einzige Gerade gemeinsam hat, heisst eine Berührungs-Ebene (Tangential-Ebene) der Cylinderfläche, und diese Gerade heisst ihre Berührungslinie.

Jede eine Cylinderfläche schneidende Ebene, welche einer Seitenlinie oder der Achse nicht parallel ist, muss sämmtliche Seitenlinien schneiden und daher eine in sich zurückkehrende krumme Durchschnittslinie liefern. Ist die Ebene eines solchen Schnittes der Ebene der Leitlinie parallel, so ist die Durchschnittslinie ein Kreis, denn ist C der Durchschnittspunkt der Achse mit der Ebene des Schnitts, und verbindet man diesen Punkt mit beliebigen Punkten A', B' der Durchschnittslinie, so kann man durch jede der Geraden CA', CB' und durch die Achse einen Schnitt legen, welcher die Cylinderfläche in einer Seitenlinie $A'A$, $B'B$ und die Ebene des Leitkreises in einem Radius MA, MB schneiden muss. Da nun in Folge des Parallelismus der Ebenen C und M je zwei zusammengehörige Durchschnittslinien CA' und MA, CB' und MB parallel, und ausserdem CM jeder der Linien $A'A$, $B'B$ parallel ist, die Vierecke $CA'AM$, $CB'BM$ also Parallelogramme sind, so muss $CA' = MA$, $CB' = MB$, und da endlich $MA = MB$ ist, auch $CA' = CB'$ sein. Der Punkt C ist also von allen Punkten der Durchschnittslinie gleich weit entfernt, diese letztere ist mithin ein Kreis.



Durch den vorstehenden Beweis ist gleichzeitig dargethan, dass alle durch zu der Ebene des Leitkreises parallele Schnittebenen entstehenden Kreise unter sich und dem Leitkreise congruent sind, und dass ihre Mittelpunkte sämmtlich auf der Achse liegen.

3. Jeder durch eine Cylinderfläche und die einander parallelen Ebenen

zweier Schnittkreise derselben begrenzte Körper heisst ein Cylinder, der denselben begrenzende Theil der Cylinderfläche sein Mantel, die beiden begrenzenden Ebenen die Grundflächen (obere und untere Grundfläche oder Grundfläche und Deckfläche) des Cylinders. Die Höhe des Cylinders ist der senkrechte Abstand seiner Grundflächen von einander.

Eine Cylinderfläche und ebenso ein Cylinder heissen gerad, wenn die Achse senkrecht zur Ebene des Leitkreises, bezw. zu den Grundflächen steht; im anderen Falle heissen dieselben schief. Im geraden Cylinder ist die Achse (d. h. das zwischen den Grundflächen liegende Stück der Achse der Cylinderfläche, oder die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Grundflächen) gleich der Höhe, im schiefen ist sie grösser als diese. Für alle Cylinder gelten folgende, nach dem Vorhergegangenen leicht zu beweisende Sätze:

Alle Seitenlinien eines Cylinders sind unter einander und mit der Achse von gleicher Länge und haben sämmtlich gegen jede der beiden Grundflächen denselben Neigungswinkel wie die Achse. Alle Achsenschnitte eines Cylinders sind Parallelogramme, deren eines Seitenpaar durch Seitenlinien und deren anderes durch Durchmesser der Grundflächen gebildet wird. In jeden Cylinder lassen sich beliebig viele Prismen einbeschreiben, so dass die Kanten eines solchen Prismas Seitenlinien des Cylinders und die Grundflächen des ersteren den Grundflächen des letzteren einbeschriebene Figuren sind. Um jeden Cylinder lassen sich beliebig viele Prismen beschreiben, so dass die Seitenflächen des Prismas Berührungsebenen der Cylinderfläche und die Grundflächen desselben den Grundflächen des Cylinders umbeschriebene Figuren sind. In beiden Fällen sind die Prismen gerad oder schief, je nachdem der Cylinder gerad oder schief ist. Jeder Cylinder lässt sich als die Grenze betrachten, welcher sich ein regelmässiges Prisma bei unendlicher Zunahme seiner Seitenzahl ohne Ende nähert.

Für die geraden Cylinder insbesondere gelten folgende Sätze: Alle Seitenlinien eines geraden Cylinders stehen senkrecht zu beiden Grundflächen, und ist eine Seitenlinie eines Cylinders senkrecht zu einer Grundfläche, so ist der Cylinder ein gerader. Alle der Achse parallele Schnitte eines geraden Cylinders und insbesondere auch alle Achsenschnitte desselben sind Rechtecke; die letzteren sind einander congruent. Man kann sich daher einen geraden Cylinder durch Rotation eines Rechtecks um eine seiner Seiten entstanden denken; dabei beschreibt die der Umdrehungsachse parallele Seite den Cylindermantel. Denkt man sich diese Seite über beide Endpunkte bis in's Unendliche verlängert, so erhält man den Satz: Jede Gerade, welche um eine ihr parallele Gerade rotirt, beschreibt eine gerade Cylinderfläche. — Jede Berührungsebene eines geraden Cylinders steht senkrecht zu dem durch ihre Berührungslinie gehenden Achsenschnitt. Umgekehrt ist jede auf einem Achsenschnitt eines geraden Cylinders in einer der zu ihm gehörigen Seitenlinien senkrecht stehende Ebene eine Berührungsebene des Cylinders, die auf einer solchen Berührungsebene in ihrer Berührungslinie senkrecht errichtete Ebene geht durch die Achse, und die durch die Achse senkrecht zu einer Berührungsebene gelegte Ebene geht durch die Berührungslinie. — Die Aufstellung und der Beweis noch anderer, sich in grosser Anzahl ergebender Sätze über Berührungs- und Schnittebenen gerader Cylinder, welche planimetrischen Sätzen über Tangenten und Sehnen von Kreisen entsprechen, kann hier dem Leser überlassen werden. Man hüte sich jedoch diese Sätze ohne Weiteres auch auf schiefe Cylinder zu übertragen, für welche dieselben im Allgemeinen nicht richtig sind.

Für schiefe Cylinder sind die durch die Achse und je eine Seitenlinie bestimmten Parallelogramme im Allgemeinen in den Winkeln verschieden, und nur je zwei derselben, deren in einer Grundfläche liegende Seiten mit dem Neigungsschenkel der Achse gegen diese Grundfläche gleiche Winkel bilden, sind congruent. Entsprechendes gilt von den ganzen Achsenschnitten. Der kleinste der letzteren ist derjenige, welcher durch jenen Neigungsschenkel, oder was dasselbe ist, welcher durch die vom Mittelpunkte der einen Grundfläche auf die andere gefällte Höhe geht, und dessen Ebene also senkrecht zu den Grundflächen steht. Das Parallelogramm dieses Schnitts heisst das charakteristische Parallelogramm des Cylinders.

4. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass auch jede Cylinderfläche sich in eine Ebene aufwickeln lässt, weil je zwei aufeinander folgende Seitenlinien parallel sind und also durch dieselben eine Ebene gedacht werden kann. Der Mantel eines geraden Cylinders liefert bei diesem Aufwickeln in der Ebene ein Rechteck, und umgekehrt lässt sich jedes Rechteck zu einem geraden Cylindermantel zusammenrollen. Das eine Seitenpaar eines solchen Rechtecks ist gleich dem Umfang der Grundflächen, das andere gleich den Seitenlinien des Cylinders. Bei einem schiefen Cylindermantel bilden die abgewickelten Umfänge der Grundflächen keine geraden, sondern krumme Linien, deren Beschaffenheit hier nicht erörtert werden kann. — Aus dem Satze über die den Grundflächen parallelen Schnitte eines Cylinders geht ferner hervor, dass man sich jede Cylinderfläche auch durch Bewegung eines Kreises von unveränderlicher Grösse beschrieben denken kann, wenn der Mittelpunkt des Kreises sich auf einer Geraden bewegt und die Ebene desselben beständig ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt. Beschreibt die Kreislinie auf diese Art einen Cylindermantel, so beschreibt die zugehörige Kreisfläche den Cylinder. — Dass endlich jeder Cylinder als ein Kegelstumpf betrachtet werden kann, dessen Spitze im Unendlichen liegt, ebenso wie jedes Prisma als ein Pyramidenstumpf mit unendlich entfernter Spitze, ist schon bemerkt worden. Hierdurch erklärt sich die Analogie vieler Eigenschaften der betreffenden Körper-Arten.

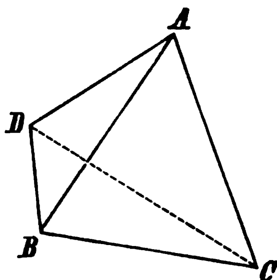
§ 14. Die regelmässigen Polyeder.

1. Jeder nur von ebenen Flächen begrenzte Körper wird ein Polyeder genannt. Ausser den in den Anwendungen am häufigsten vorkommenden Arten von Polyedern, den bereits besprochenen Pyramiden und Prismen, ist noch eine Gruppe solcher Körper von besonderem Interesse, welche man regelmässige Polyeder genannt hat. Unter einem solchen versteht man jeden ebenflächigen Körper, welcher von lauter congruenten und regelmässigen Figuren begrenzt wird, die in congruenten Ecken aneinanderstossen. Dass es solche Polyeder giebt, zeigt das Beispiel des schon früher erwähnten Würfels.

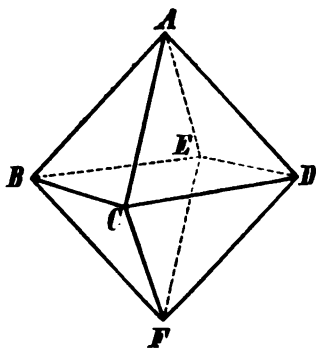
Da die Summe der ebenen Winkel einer Ecke kleiner als 360 Grad sein muss, so kann man nicht sechs oder mehr gleichseitige Dreiecke zur Bildung einer Ecke aneinanderlegen, da schon bei sechs solchen Dreiecken die Summe der betreffenden ebenen Winkel gleich $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ sein würde. Regelmässige Polyeder, deren Grenzflächen Dreiecke sind, können also nur dreiseitige Ecken (mit der Winkelsumme $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$) oder vierseitige (Winkelsumme $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$), oder fünfseitige (W. S. 300°) haben. Um ferner aus regelmässigen Vierecken eine Ecke zusammenzusetzen, kann man nur drei Flächen benutzen, in welchem Falle die betreffende Winkelsumme $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ beträgt; für vier

Flächen würde dieselbe bereits 360°, für mehr als vier Flächen also mehr als 360° betragen. In gleicher Weise kann ein von Fünfecken begrenztes regelmässiges Polyeder nur dreiseitige Ecken (mit der Winkelsumme $3 \cdot 108° = 324°$) haben. Aus lauter regelmässigen Sechsecken lässt sich auch nicht eine dreiseitige Ecke zusammensetzen, denn drei Winkel solcher Sechsecke betragen zusammen schon $3 \cdot 120° = 360°$. Noch weniger ist dies der Fall mit mehr als sechsseitigen regelmässigen Polygonen, da die Winkel der regelmässigen n-Ecke mit zunehmenden Werthen von n immer grösser werden. Es können also an regelmässigen Polyedern nur fünf verschiedene Arten von Ecken vorkommen, und es entsteht nun die Frage, ob zu jeder dieser Arten auch ein regelmässiges Polyeder, bezw. ob zu derselben mehrere solcher Polyeder möglich sind.

2. Bildet man aus drei congruenten, regelmässigen Dreiecken ABC, ABD, ADC eine Ecke A, so begrenzen die drei freien Seiten BC, CD, DB der Dreiecke ein viertes, den ersteren congruentes Dreieck, dessen Ebene mit denen der ersteren einen Körper einschliesst. Die an den Punkten B, C, D entstehenden Ecken sind der Ecke A congruent, und es ist nicht möglich, mittelst einer anderen Ebene als BCD solche congruente Ecken an jenen Punkten zu erzeugen. Es giebt also einen und nur einen von regelmässigen Dreiecken begrenzten regelmässigen Körper, dessen Ecken dreiseitig sind. Derselbe heisst ein **regelmässiges Tetraëder**, hat vier Flächen, vier Ecken und sechs gleich lange Kanten. Es ist eine regelmässige, gerade, dreiseitige Pyramide, deren Seitenflächen der Grundfläche congruent sind.

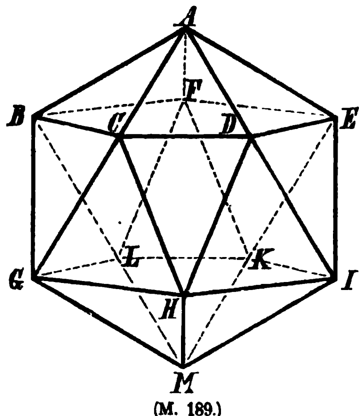


3. Bildet man aus vier congruenten, regelmässigen Dreiecken ABC, ACD, ADE, AEB eine Ecke A; so stossen an jedem der Punkte B, C, D, E zwei dieser Dreiecke unter demselben Flächenwinkel aneinander, wie im Punkte A, und es müssen sich also an jedem der ersteren Punkte noch zwei eben solche Dreiecke zu einer der Ecke A congruenten Ecke anlegen lassen. Jedes dieser letzteren Dreiecke nimmt an der Bildung zweier dieser congruenten Ecken zugleich Theil, denn es muss z. B. das in C an CD angelegte Dreieck CDF in D an CD unter demselben Flächenwinkel, wie in C anliegen. Man hat also vier neue Dreiecke, welche ausserdem zu je zweien in einer Kante, z. B. CDF und BCF in CF, aneinanderliegen, und daher alle vier einen gemeinschaftlichen Eckpunkt F haben müssen. An diesem Punkte entsteht nun durch das Zusammentreffen der vier Dreiecke eine neue vierseitige Ecke, welche dieselbe ebenen Winkel und dieselben Flächenwinkel wie die anderen hat. Somit giebt es auch hier eine bestimmte Art regelmässiger Polyeder. Diese von Dreiecken begrenzten regelmässigen Körper, deren Ecken vierseitig sind, heissen **regelmässige Octaëder** und haben acht Flächen, sechs Ecken und zwölf gleiche Kanten.



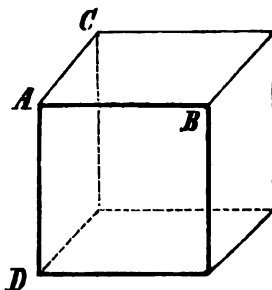
4. Bildet man aus fünf congruenten, regelmässigen Dreiecken eine Ecke A, so erhält man fünf Punkte B, C, D, E, F, an deren jedem zwei Flächen der Ecke A unter demselben Neigungswinkel wie im Punkte A aneinander stossen. Daher

müssen sich zu diesen zwei Flächen jedesmal noch drei weitere zu einer der Ecke A congruenten Ecke hinzufügen lassen. Man erhält auf diese Weise im Ganzen zehn neue Dreiecke, welche wieder fünf freie Eckpunkte G, H, I, K, L liefern. An jedem der letzteren stossen bereits drei Dreiecke unter denselben Flächenwinkeln wie an den bisher gebildeten Ecken zusammen, und durch Hinzufügung von je zwei weiteren Dreiecken an jedem dieser Eckpunkte, d. h. im Ganzen von fünf neuen Dreiecken erhält man an jenen Punkten noch fünf den früheren congruente Ecken. Die neu angelegten Dreiecke endlich stossen in je einer Kante so zusammen, dass sie einen gemeinschaftlichen Eckpunkt M haben müssen, an welchem endlich noch eine Ecke derselben Art entsteht. Es giebt also eine bestimmte Art von durch regelmässige congruente Dreiecke begrenzten Körpern, welche fünfseitige congruente Ecken haben. Ein solcher Körper hat 20 Flächen, 12 Ecken, 30 gleich lange Kanten und heisst ein regelmässiges Ikosaëder.



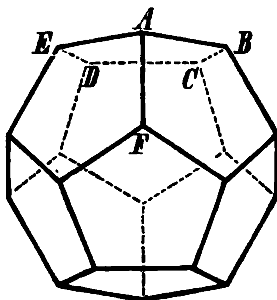
(M. 189.)

5. Legt man drei congruente Quadrate zu einer Ecke A zusammen, so erhält man wieder in den Endpunkten B, C, D der Kanten derselben Punkte, in denen durch Hinzufügung je einer neuen Fläche eine congruente Ecke gebildet werden kann. Die drei neuen Flächen bilden unter einander wieder eine ebensolche Ecke und schliessen mit den vorhergehenden einen Würfel ein. Die Würfel, auch regelmässige Hexaëder genannt, sind also die einzigen von Quadraten begrenzten regelmässigen Polyëder. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind schon früher besprochen worden.



(M. 190.)

6. Legt man an ein ebenes regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ in einem seiner Eckpunkte A zwei ihm congruente Fünfecke zu einer dreiseitigen Ecke an, so kann jedes der letzteren zugleich zur Bildung einer ebensolchen Ecke an einem der anliegenden Eckpunkte B, E dienen, und man erhält überhaupt durch Anlegen von je einem Fünfeck an jede Seite von $ABCDE$ fünf derartige congruente Ecken. In jedem der freien Endpunkte einer der Kanten dieser Ecken, z. B. in F, stossen zwei der Fünfecke unter demselben Flächenwinkel, wie an dem anderen Endpunkt A an einander, und es muss sich daher in F durch Einfügung eines weiteren solchen Fünfecks eine der Ecke A congruente Ecke bilden lassen. Auf diese Art erhält man im Ganzen fünf neue Fünfecke, welche wieder paarweise mit einer Seite zusammenstossen, und deren freie Seite ein dem vorigen congruentes Fünfeck begrenzen. Durch Hinzufügung der Ebene des letzteren müssen wieder fünf den früheren congruente Ecken entstehen, und der Körperraum wird durch diese Ebene geschlossen. Es giebt also eine Art von durch Fünfecke begrenzten



(M. 191.)

regelmässigen Polyëdern. Dieselben heissen **regelmässige Pentagonaldodekaëder**, haben 12 Grenzflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 gleichlange Kanten.

Es giebt also im Ganzen fünf und nicht mehr Arten regelmässiger Polyëder. Aus den vorstehenden Entwicklungen erkennt man noch leicht, dass jedes regelmässige Tetraeder oder Oktaeder, Ikosaeder u. s. w. durch die Länge einer Kante der Grösse nach vollständig bestimmt ist, sodass zwei regelmässige Polyëder derselben Art, welche in der Länge einer Kante übereinstimmen, congruent sind.

§ 15. Die Kugel.

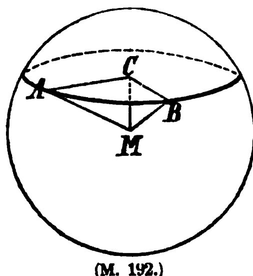
1. Während in der Planimetrie die den regelmässigen Polyëdern analogen regelmässigen Polygone mit jeder beliebigen Seitenzahl vorkommen konnten, und es daher auch möglich war, mittelst eines angenommenen Wachsthums dieser Seitenzahl bis in's Unendliche einen Uebergang zu dem Kreise zu finden, ist in Folge der beschränkten Anzahl von Arten regelmässiger Polyëder ein entsprechendes Verfahren in der Stereometrie nicht möglich. Dagegen kann man durch Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser eine dem Kreise analoge Fläche, die **Kugelfläche** oder **Sphäre** erhalten. Es genügt zu diesem Zwecke schon die Drehung eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Durchmesser bis zur Rückkehr in seine ursprüngliche Lage. Die hierbei von dem Halbkreis beschriebene Fläche hat die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte von einem und demselben anderen Punkte, dem bei der Rotation in unveränderter Lage gebliebenen Mittelpunkt des erzeugenden Halbkreises, denselben Abstand hat. Umgekehrt muss jeder Punkt des Raumes, welcher von jenem festen Punkt denselben, dem Radius des rotirenden Halbkreises gleichen Abstand hat, auf der Kugelfläche liegen. Diese letztere schneidet daher jede von jenem Punkte aus nach beliebiger Richtung gezogene Gerade; sie schliesst für sich einen Körperraum vollständig ein. Jeder von einer Kugelfläche begrenzte Körper heisst eine **Kugel**.

Der von allen Punkten der begrenzenden Fläche einer Kugel gleich weit entfernte, im Innern der letzteren liegende Punkt heisst der **Mittelpunkt** oder das Centrum, jede Gerade, welche denselben mit einem Punkte der Kugelfläche verbindet, ein **Radius** oder Halbmesser, jede durch den Mittelpunkt gehende, von zwei Punkten der Kugelfläche begrenzte Strecke ein Diameter oder **Durchmesser** der Kugel oder der Kugelfläche.

Zufolge der Erklärung der Kugel sind alle Radien einer und derselben Kugel gleich lang. Ferner geht aus dem Vorstehenden unmittelbar hervor, dass jeder Durchmesser doppelt so lang als jeder Radius ist, und dass somit auch alle Durchmesser einer Kugel einander gleich sind. Jeder Punkt des Raumes, dessen Abstand vom Mittelpunkt einer Kugel grösser ist als ein Radius derselben, liegt ausserhalb, jeder Punkt, für welchen dieser Abstand kleiner ist als ein Radius, liegt innerhalb der Kugel. — Alle Kugeln, welche gleiche Radien haben, sind congruent, denn denkt man sich zwei solche Kugeln so zusammengestellt, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen, so muss zufolge der Gleichheit der Radien jeder Punkt einer der beiden Kugelflächen gleichzeitig auf der anderen liegen.

2. Jede durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegte Ebene muss die Kugelfläche in einem Kreise schneiden, und der Radius dieses Kreises ist gleich dem Radius der Kugel. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar daraus, dass die Abstände aller Punkte der Kugelfläche vom Mittelpunkte dem Kugelradius gleich sind. Alle die verschiedenen Schnittkreise, welche durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt werden können, sind congruent.

Auch jede nicht durch den Mittelpunkt gehende Schnittebene einer Kugel schneidet die Kugelfläche in einem Kreise, denn fällt man vom Mittelpunkte M der Kugel die senkrechte Gerade MC auf die Schnittebene, verbindet den Fusspunkt C dieser Senkrechten mit beliebigen Punkten A, B des Umfangs der Schnittfigur und zieht endlich die Kugelradien MA, MB, so stimmen die Dreiecke MAC, MBC ausser in letzteren in den rechten Winkeln bei C und in der gemeinschaftlichen Kathete MC überein und sind also congruent;- hieraus folgt, dass die homologen Seiten CA, CB einander gleich sind, und dass also der Punkt C von allen Punkten der Schnittlinie gleich weit entfernt ist. Hiermit ist nicht nur die Richtigkeit der obigen Behauptung bewiesen, sondern es ergeben sich auch folgende Zusätze:



(M. 192.)

Der Mittelpunkt jedes Schnittkreises einer Kugel liegt in der zu seiner Ebene senkrechten, durch den Kugelmittelpunkt gehenden Geraden. — Umgekehrt muss die Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Schnittkreises derselben senkrecht zur Ebene des letzteren stehen, und die auf der Ebene eines Schnittkreises in dem Mittelpunkt desselben errichtete senkrechte Gerade geht stets durch den Kugelmittelpunkt. —

Zwischen dem Abstand $CM = d$ eines Schnittkreises einer Kugel vom Mittelpunkte der letzteren, dem Radius r des Schnittkreises und dem Kugelradius R besteht durch den pythagoreischen Lehrsatz die Beziehungsgleichung

$$R^2 = r^2 + d^2,$$

welche die Berechnung jeder der drei Grössen R, r, d aus den gegebenen beiden andern gestattet. Diese Berechnung führt noch unmittelbar zu folgenden Sätzen, welche sich übrigens auch unschwer mittelst der Congruenz oder Nichtcongruenz von Dreiecken beweisen lassen, die nach Analogie des oben benutzten Dreiecks ACM construirt werden können:

Schnittkreise einer Kugel, deren Ebenen gleiche Abstände vom Kugelmittelpunkte haben, sind gleich.

Umgekehrt haben gleiche Schnittkreise einer und derselben Kugel (oder auch congruenter Kugeln) gleiche Abstände vom zugehörigen Kugelmittelpunkt.

Von zwei ungleichen Schnittkreisen einer Kugel hat der grössere einen kleineren Abstand vom Kugelmittelpunkt, und umgekehrt, je näher ein Schnittkreis diesem Mittelpunkt liegt, desto grösser ist er.

Insbesondere sind alle durch den Mittelpunkt einer Kugel gehenden Schnittkreise derselben grösser als jeder, dessen Ebene nicht durch jenen Mittelpunkt geht. Daher nennt man die ersteren grösste Kreise, die anderen kleinere Kreise der Kugel.

3. Damit eine Ebene eine Kugel durchschneide, muss der Abstand derselben vom Mittelpunkt der letzteren kleiner als ein Radius sein, denn der Fusspunkt des vom Mittelpunkt M der Kugel auf eine Ebene gefällten Perpendikels ist derjenige Punkt dieser Ebene, welcher die kleinste Entfernung von M hat; dieser Punkt muss aber innerhalb der Kugel liegen, wenn dieselbe von der Ebene geschnitten werden soll. Ist die Entfernung MC einer Ebene vom Mittelpunkt M der Kugel grösser als ein Radius der letzteren, so liegt C, und umsomehr jeder andere Punkt der Ebene ausserhalb der Kugel. Ist endlich MC gleich einem Radius, so liegt C auf der Kugelfläche und jeder andere Punkt der Ebene ausserhalb der Kugel.

Jede Ebene also, welche auf einem Kugelradius in seinem auf der Kugelfläche liegenden Endpunkte senkrecht steht, hat mit dieser Kugelfläche nur diesen Punkt gemeinsam und liegt sonst ganz ausserhalb der Kugel.

Jede Ebene, welche diese letzteren Eigenschaften hat, heisst eine **Berührungsebene** (Tangentialebene) der Kugel, und der beiden Flächen gemeinsame Punkt heisst ihr **Berührungspunkt**.

Auf indirektem Wege lässt sich leicht beweisen, dass umgekehrt jede Berührungsebene einer Kugel auf dem nach ihrem Berührungspunkte gehenden Radius senkrecht steht, dass ferner die vom Mittelpunkte einer Kugel auf eine Berührungsebene derselben gefällte senkrechte Gerade die letztere im Berührungspunkte trifft, und dass die auf einer Berührungsebene in ihrem Berührungspunkte errichtete senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

4. Drei Punkte einer Kugelfläche können niemals in gerader Linie liegen, denn durch drei solche Punkte muss sich stets eine Ebene legen lassen, und da diese die Kugelfläche in einem Kreise schneidet, auf welchem jene drei Punkte gleichzeitig liegen müssten, so ist die Unmöglichkeit des Gegentheils der vorstehenden Behauptung klar. Auf einer Kugelfläche lässt sich daher keine gerade Linie ziehen; die Kugelfläche ist eine krumme Fläche, welche sich von den früher behandelten krummen (Cylinder- oder Kegel-) Flächen dadurch wesentlich unterscheidet, dass sich durch keinen ihrer Punkte auch nur **eine** Gerade in der Fläche ziehen lässt. Dieselbe kann daher auch nicht, wie diese, durch Bewegung einer Geraden beschrieben gedacht werden und lässt sich auch nicht in eine Ebene aufwickeln.

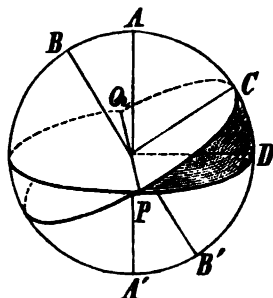
Dagegen lässt sich durch jede drei auf einer Kugelfläche gegebene Punkte ein Kreis in derselben ziehen, denn durch drei solche Punkte ist stets eine und nur eine einzige Schnittebene der Kugel bestimmt. Dieser Kreis ist im Allgemeinen ein kleinerer Kreis, denn ein grösster Kreis ist schon durch zwei Punkte der Kugelfläche und den Mittelpunkt bestimmt, oder durch zwei auf einer Kugelfläche gegebene Punkte lässt sich stets ein grösster Kreis derselben legen, und zwar nur ein einziger, falls nicht jene beiden Punkte mit dem Mittelpunkte in einer Geraden liegen, also Endpunkte eines Durchmessers sind. Durch einen einzigen gegebenen Punkt auf einer Kugelfläche lassen sich unzählig viele grösste Kreise legen, deren Ebenen einander sämmtlich in dem durch jenen Punkt gehenden Durchmesser schneiden müssen. Ueberhaupt müssen zwei grösste Kreise einer Kugel einander immer in den beiden Endpunkten eines Durchmessers schneiden, und es halbiren also sowol die Umfänge als die Flächen derselben einander.

Zu jedem grössten Kreise einer Kugel giebt es unzählig viele kleinere Kreise, deren Ebenen der Ebene des ersteren parallel sind. Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen in einer Geraden; diese ist ein Durchmesser der Kugel und steht zu den Ebenen der Kreise senkrecht. Diesen Durchmesser nennt man die **Achse**, und seine Endpunkte die **Pole** des Systems jener Kreise, und insbesondere auch des diesem System angehörigen grössten Kreises. Die Ebenen aller durch die beiden Pole eines grössten Kreises gehender grössten Kreise derselben Kugel stehen senkrecht zur Ebene des ersteren, ihre Bogen von je einem Pol bis zu jenem grössten Kreis betragen 90 Grad. (Meridiane, Aequator, Parallelkreise.) Jeder Durchmesser einer Kugel kann als die Umdrehungsachse eines Halbkreises dienen, durch dessen Rotation die Kugel beschrieben wird; der beschreibende Halbkreis erhält dabei nach einander die Lagen sämmtlicher durch die Pole des zur Achse senkrechten grössten Kreises gehenden grössten Halbkreise.

5. Jeder von Bogen grösster Kreise einer Kugel eingeschlossene Theil ihrer Oberfläche heisst eine sphärische Figur; die betreffenden Kreisbogen werden die Seiten derselben genannt.

Die einfachste sphärische Figur ist das sphärische Zweieck, d. h. ein von Hälften zweier grössten Kreise begrenzter Theil der Kugelfläche. Die Ebenen dieser Kreise bilden an dem Durchmesser, welcher ihre Durchschnittsachse ist, einen Flächenwinkel, und der Neigungswinkel des letzteren heisst der Centriwinkel oder schlechthin der Winkel des Zweiecks. Zieht man durch einen der Eckpunkte des Zweiecks, d. h. durch einen Durchschnittspunkt der beiden Halbkreise, an jeden der letzteren die Tangente, so ist der Winkel dieser Tangenten zugleich der Winkel des Zweiecks, denn seine Schenkel stehen auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser senkrecht. Der Winkel eines sphärischen Zweiecks kann jeden möglichen Werth zwischen 0° und 360° haben.

Construirt man zu jedem von zwei grössten Kreisen PDQ, PCQ die Pole A, A' und B, B', so lässt sich durch dieselben ein dritter grösster Kreis legen, dessen Ebene senkrecht zu den Ebenen der beiden ersteren Kreise steht und dieselben in den Schenkeln von Neigungswinkeln der zugehörigen Flächenwinkel schneidet. Es kann daher der Bogen CD dieses Kreises, welcher zwischen den zwei Seiten irgend eines der durch die ersteren Kreise gebildeten sphärischen Zweiecks liegt, zur Messung des Winkels dieses Zweiecks dienen.



(M. 198.)

Solange nur von einem einzigen grössten Kreise die Rede ist, kann zwischen den beiden Polen desselben im Allgemeinen kein Unterschied gemacht werden; so bald aber ein zweiter grösster Kreis zu demselben tritt, und ein bestimmter Flächenwinkel, oder ein bestimmtes sphärisches Zweieck $PDCQ$ in's Auge gefasst wird, kann man die beiden Pole eines jeden der Kreise dadurch unterscheiden, dass immer einer derselben mit jenem Zweieck auf derselben durch diesen Kreis gebildeten, der andre auf der entgegengesetzten Halbkugel liegt. Jener möge dem Zweieck oder dem zugehörigen Flächenwinkel zugewandt, dieser demselben abgewandt heissen. Es gilt dann der Satz: Der Bogen des grössten Kreises zwischen einem zugewandten und einem abgewandten Pol ist dem Winkel des Zweiecks gleich, der Bogen zwischen den beiden zugewandten oder zwischen den beiden abgewandten Polen ergänzt diesen Winkel zu 180 Grad. Sind nämlich A und B' die dem Zweieck $PDCQ$ zugewandten, also A' und B die ihm abgewandten Pole, so ist

$$\text{Bogen } AC + CD = \text{Bogen } BA + AC = 90°, \text{ also}$$
$$\text{Bogen } CD = \text{Bogen } BA,$$
$$\text{und Bogen } ADB' = 180° - BA = 180° - CD.$$

6. Jede von drei Bogen grösster Kreise einer Kugel begrenzte sphärische Figur heisst ein sphärisches Dreieck. Dasselbe hat also drei Seiten; die Durchschnittspunkte derselben sind seine Eckpunkte, die in den Eckpunkten an die Seiten gelegten Tangenten bilden seine Winkel. Ergänzt man jede Seite eines sphärischen Dreiecks zum vollständigen Kreise, so wird die ganze Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke getheilt, welche so beschaffen sind, dass jede Seite kleiner als ein Halbkreis und jeder Winkel kleiner als ein gestreckter ist. Jedes sphärische Dreieck anderer Art kann also durch Erweiterung einer oder

mehrerer seiner Seiten in solche Dreiecke zerlegt werden, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, und es dürfen daher im Folgenden ausschliesslich Dreiecke der letzteren Art vorausgesetzt werden. In diesem Falle gehört zu jedem sphärischen Dreieck eine einfache Ecke am Mittelpunkte der Kugel, deren Ebenen die Ebenen der Seiten des Dreiecks sind und deren ebene Winkel als Centriwinkel durch die zugehörigen Seiten gemessen werden, während die Winkel des Dreiecks die Neigungswinkel der Flächenwinkel der Ecke sind. Man kann daher die in § 7 und 8 über die Stücke dreiseitiger Ecken aufgestellten Sätze ohne Weiteres auf die entsprechenden Stücke sphärischer Dreiecke übertragen, und es gelten also insbesondere für letztere die folgenden Sätze:

Gleichen Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber, oder die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen sphärischen Dreiecks sind einander gleich. In jedem gleichseitigen sphärischen Dreieck sind also alle drei Winkel gleich gross.

Umgekehrt liegen gleichen Winkeln eines sphärischen Dreiecks gleiche Seiten gegenüber; sind alle drei Winkel gleich gross, so ist das Dreieck gleichseitig.

Dagegen liegt der grösseren von zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks ein grösserer Winkel und umgekehrt dem grösseren von zwei Winkeln eine grössere Seite gegenüber. Der grössten von allen drei Seiten liegt also der grösste Winkel und dem grössten Winkel die grösste Seite gegenüber.

Die Summe je zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist grösser, die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. — Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als ein vollständiger Kreis (als vier Rechte).

Zu jedem sphärischen Dreieck gehört ein zweites auf derselben Kugelfläche, dessen Eckpunkte Pole der Seiten des ersteren sind, und für welches die Maasszahlen seiner Seiten die des jedesmal entsprechenden Winkels des ursprünglichen Dreiecks zu 180 Grad ergänzen. Dieses Dreieck soll das Polardreieck des ursprünglichen genannt werden. Die zu demselben und dem ursprünglichen gehörigen Ecken am Mittelpunkte sind Polarecken zu einander. Hieraus erklärt sich auch die Entstehung des schon früher gebrauchten Namens Polarecke. Jedes sphärische Dreieck ist selbst Polardreieck zu seinem Polardreieck, und die Maasszahlen seiner Seiten betragen mit der Maasszahl des jedesmal entsprechenden Winkels des letzteren zusammen 180 Grad.

Die Summe der Winkel eines jeden sphärischen Dreiecks ist kleiner als sechs und grösser als zwei Rechte.

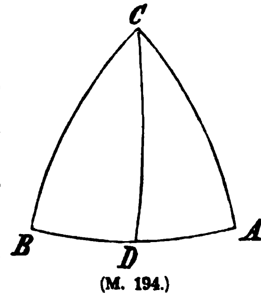
Von den sieben sphärischen Dreiecken, welche zu einem gegebenen durch Erweiterung seiner Seiten zu vollständigen Kreisen entstehen, liegen drei so, dass sie mit dem gegebenen je eine Seite gemeinsam haben; dieselben sollen Nebendreiecke des ursprünglichen heissen. Drei andere besitzen je einen Winkel, welcher Scheitelwinkel zu einem solchen des ersten Dreiecks ist und sollen Scheiteldreiecke desselben genannt werden. Das siebente liegt so, dass jeder seiner Eckpunkte mit einem Eckpunkt des ursprünglichen auf demselben Durchmesser liegt; es stimmt mit diesem in je zwei Seiten und in je zwei homologen Winkeln überein, denn dieselben sind paarweise Scheitelwinkel. Die homologen Stücke folgen jedoch in umgekehrter Ordnung auf einander, und die beiden Dreiecke sind daher nicht congruent, sondern symmetrisch. Dieselben sollen Gegendreiecke heissen.

Sphärische Dreiecke, welche auf derselben Kugel (oder auf congruenten Kugeln) liegen, sind congruent oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen 1. in den drei Seiten oder 2. in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

3. in zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel, falls die anderen gegenüberliegenden Winkel nicht zusammen zwei Rechte betragen, 4. in zwei Winkeln und einer gegenüberliegenden Seite, falls die anderen gegenüberliegenden Seiten nicht zusammen einem grössten Halbkreis gleich sind, 5. in zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite, 6. in den drei Winkeln.

7. Wir fügen diesen Sätzen zur Vervollständigung noch die nachstehenden zu, die sich dann in umgekehrter Weise auch vom sphärischen Dreiecke auf die dreiseitige Ecke übertragen lassen, um neben dem bisher befolgten Gang auch den umgekehrten als möglich an Beispielen auszuführen.

Jedes gleichschenkelige sphärische Dreieck wird durch denjenigen grössten Kreis, welcher durch seine Spitze geht und den Winkel an derselben halbirt, in zwei symmetrische Dreiecke getheilt, denn die beiden entstehenden Dreiecke *ACD*, *BCD* stimmen bei umgekehrter Ordnung der homologen Stücke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein. Daher halbirt der winkelhalbirende Bogen auch die Grundlinie des Dreiecks und steht senkrecht auf derselben. — Umgekehrt muss, wie ebenfalls mit Hülfe der Symmetrie der entstehenden Dreiecke leicht bewiesen werden kann, der von der Spitze *C* eines gleichschenkeligen sphärischen Dreiecks senkrecht zur Grundlinie *AB* gezogene grösste Kreisbogen die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbiren, ferner der grösste Kreisbogen, welcher die Spitze mit dem Halbirungspunkt der Grundlinie verbindet, zur Grundlinie senkrecht stehen und den Winkel an der Spitze halbiren, und endlich lässt sich indirekt beweisen, dass der auf der Grundlinie in ihrem Halbirungspunkt senkrechte grösste Kreis durch die Spitze geht und den Winkel an derselben halbirt.



(M. 194.)

Die Spitzen aller gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie haben, liegen hiernach auf dem zu dieser Grundlinie senkrechten und dieselbe halbirenden grössten Kreise. Umgekehrt ist jeder Punkt dieses Kreises von den beiden Endpunkten *A*, *B* der gegebenen Grundlinie gleichweit entfernt, wenn man unter der Entfernung zweier Punkte einer Kugelfläche einen (im Allgemeinen den kleineren) zwischen diesen Punkten liegenden Bogen des durch dieselben gehenden grössten Kreises versteht, oder jener grösste Kreis ist der geometrische Ort der von den gegebenen Punkten *A*, *B* gleichweit entfernten Punkte der Kugelfläche. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes folgt, ähnlich wie im entsprechenden Falle bei dem ebenen Dreieck, dass die auf je einer der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks in dem Halbirungspunkt derselben senkrechten grössten Kreise einander in einem einzigen Punkte schneiden, welcher von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleichweit entfernt ist. Dieser Punkt heisse der sphärische Mittelpunkt, und sein Abstand von einem der Eckpunkte (in Bogenmaass) der sphärische Radius des dem Dreieck umbeschriebenen, d. i. durch seine drei Eckpunkte gehenden Kreises.

Die grössten Kreise, welche die von zwei anderen grössten Kreisen gebildeten sphärischen Winkel halbiren, bilden den geometrischen Ort der von den letzteren Kreisen gleichweit entfernten Punkte der Kugelfläche, denn die von irgend einem Punkte eines der halbirenden Kreise senkrecht zu den anderen Kreisen gezogenen Bogen müssen in Folge der Symmetrie der entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke gleich sein, und umgekehrt sind diese Bogen gleich,

so muss durch den entsprechenden Kreis der betreffende Winkel halbirt werden. — Hieraus ergiebt sich weiter, dass die grössten Kreise, welche die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, einander in einem einzigen Punkte schneiden, welcher von den drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Diese Entfernung nennt man den sphärischen Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises. — Durch Halbirung der Aussenwinkel des Dreiecks erhält man noch drei entsprechende Punkte.

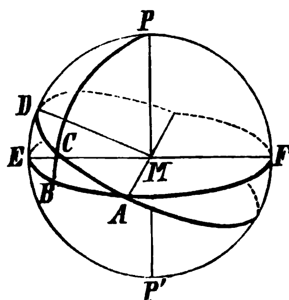
Noch andere Sätze über das sphärische Dreieck, welche solchen vom ebenen Dreieck analog sind und auch in entsprechender Weise bewiesen werden können, lassen sich in grosser Anzahl aufstellen. Besondere Erwähnung verdienen von denselben noch die folgenden Nicht-Congruenz-Sätze:

Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel in zwei Seiten, aber nicht in den eingeschlossenen Winkeln überein, so liegt dem grösseren Winkel eine grössere Seite gegenüber. — Stimmen zwei sphärische Dreiecke einer Kugel in zwei Seiten, aber nicht in den dritten Seiten überein, so liegt der grösseren Seite ein grösserer Winkel gegenüber.

8. Die grosse Mehrzahl derjenigen Eigenschaften sphärischer Dreiecke, zu welchen die Analogie mit Eigenschaften ebener Dreiecke nicht besteht, kann als eine Folge davon betrachtet werden, dass die Summe der Winkel bei den ersteren nicht, wie bei den letzteren, einen bestimmten Werth hat. Daher ist zunächst eine Eintheilung der sphärischen Dreiecke nach den Winkeln in derselben Weise wie bei den ebenen Dreiecken nicht möglich; es kann ein sphärisches Dreieck zwei oder drei rechte Winkel, oder gleichzeitig einen rechten und einen stumpfen Winkel haben, u. dgl. m. Doch nennt man, entsprechend wie bei den Ecken geschehen, solche sphärische Dreiecke rechtwinkelige, welche mindestens einen rechten Winkel haben, und stellt ihnen die schiefwinkeligen als solche gegenüber, in denen kein Winkel ein rechter ist.

Ueber rechtwinkelige sphärische Dreiecke ergiebt sich aus dem an entsprechender Stelle bei den Ecken Gesagten, dass in jedem Dreieck, welches drei rechte Winkel hat, alle Seiten Quadranten sind, also ebenfalls in Gradmaass 90° betragen, und dass umgekehrt in jedem Dreieck, dessen drei Seiten Quadranten sind, auch alle drei Winkel rechte sein müssen. Ferner müssen allgemein in jedem Dreieck, welches zwei rechte Winkel hat, die diesen gegenüberliegenden Seiten Quadranten sein, und die dritte Seite giebt dann das Bogenmaass des dritten Winkels. Auch dieser Satz lässt sich umkehren.

Hiernach darf man bei der Untersuchung der besonderen Eigenschaften rechtwinkeliger Dreiecke namentlich solche in's Auge fassen, die einen einzigen rechten Winkel haben, da alle übrigen durch die eben angegebenen besonderen Eigenschaften ausgezeichnet sind.



(M. 195.)

Um nun ein rechtwinkeliges Dreieck ABC zu construiren, für welches ein Winkel A durch zwei einander schneidende grösste Kreise gegeben ist, hat man durch die Achse PP' eines dieser Kreise irgend einen dritten grössten Kreis PCB zu legen. Es sei ferner PDE der zu den beiden ersten gleichzeitig senkrechte grösste Kreis, also DE das Bogenmaass des Winkels DAE, so ist für einen spitzen Winkel A dieser Bogen kleiner als 90 Grad. Jeder andere auf AE senkrechte Bogen CB aber ist kleiner als DE, denn PMD ist der Neigungswinkel

von PM gegen die Ebene DCM, und also kleiner als der Winkel PMC. Mithin ist der Bogen CB umsomehr kleiner als 90°. Ist dagegen der Winkel A ein stumpfer, so ergiebt eine entsprechende Untersuchung, dass der Bogen DF, welcher zum Maass desselben dient, grösser als 90° und kleiner als jeder andere in Frage kommende Bogen, die dem Winkel A gegenüberliegende Kathete also jedenfalls grösser als 90° ist. Somit ergiebt sich der Satz:

In jedem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ist jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig, d. h. zugleich kleiner oder grösser als 90°.

Soll ferner bei einem spitzen Winkel A eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks ABC nicht bloss die Kathete BC, sondern auch die Kathete BA kleiner als 90° sein, so muss B zwischen A und E, also C zwischen A und D liegen, also die Hypotenuse AC ebenfalls kleiner als 90° sein. Für eine zweite Kathete, welche grösser als 90° ist, ergiebt sich entsprechend auch eine Hypotenuse, welche grösser als DA oder ebenfalls grösser als 90° ist. Wenn ferner der Winkel A als stumpf angenommen wird, so wird in gleicher Weise die Hypotenuse kleiner oder grösser als 90°, je nachdem die andere Kathete stumpf oder spitz ist. Man hat also folgenden Satz gefunden:

Sind die Katheten eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gleichartig, so ist die Hypotenuse kleiner als 90°, sind dieselben ungleichartig, so ist die Hypotenuse grösser als 90°, oder mit anderen Worten:

Ist eine Kathete kleiner als 90°, so ist die andere mit der Hypotenuse gleichartig, ist eine Kathete grösser als 90°, so ist die andere mit der Hypotenuse ungleichartig.

Mit Hülfe der Polardreiecke lassen sich aus den vorstehenden Sätzen entsprechende für sphärische Dreiecke ableiten, in denen eine Seite ein Quadrant ist.

Jedes schiefwinkelige sphärische Dreieck lässt sich durch einen grössten Kreisbogen, welcher von einem beliebigen Eckpunkt des Dreiecks aus senkrecht zur gegenüberliegenden Seite gezogen wird, als Summe oder Differenz zweier rechtwinkeligen Dreiecke darstellen. Aus den vorstehenden Sätzen folgt unmittelbar, dass der Fusspunkt dieses senkrechten Bogens (der Höhe des Dreiecks) auf die gegenüberliegende Seite selbst oder auf deren Verlängerung fällt, je nachdem die dieser Seite anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig sind.

In derselben Weise, wie oben die Begriffe des sphärischen Dreiecks und seiner Stücke, lassen sich diejenigen sphärischer Vierecke und Polygone aufstellen. Eine besondere Erwähnung verdienen unter den letzteren die **regelmässigen sphärischen Polygone**, d. h. diejenigen, deren Seiten sämmtlich einander und deren Winkel sämmtlich einander gleich sind, denen also regelmässige Ecken am Mittelpunkt der Kugel entsprechen. In jedem solchen Polygon befindet sich ein Punkt, dessen (auf Bogen grösster Kreise gemessenen) Entfernungen von allen Seiten einander gleich sind. Derselbe Punkt ist in gleicher Weise von allen Eckpunkten des Polygons gleich weit entfernt.

Anhang zum 3. Kapitel.

Der Euler'sche Satz.

Unter einem **convexen** oder **Euler'schen Polyëder** versteht man ein solches, welches nur hohle Flächenwinkel hat, dessen Flächen also auch bei beliebiger Erweiterung das Polyëder nicht durchschneiden. Zu denselben gehören also beispielsweise die sämmtlichen im § 14 behandelten regelmässigen Polyëder,

ferner alle Prismen und Pyramiden, deren Grundflächen keinen überstumpfen Winkel haben, u. dgl. m.

Ein solches Polyëder lässt sich stets in dreiseitige Pyramiden zerlegt denken, deren gemeinschaftliche Spitze ein Punkt im Innern des Körpers ist, und von denen jedes zur Grundfläche eine der Grenzflächen des Polyëders oder einen dreieckigen Theil einer solchen Grenzfläche hat. Umgekehrt kann man sich das Polyëder auch durch Aneinanderlegen solcher Pyramiden zusammengesetzt denken. Jede einzelne solche Pyramide hat nun 4 Eckpunkte, 4 Seitenflächen und 6 Kanten, und es ist also für dieselbe, wenn überhaupt die Anzahl der Eckpunkte eines Körpers durch e, die seiner Seitenflächen durch f und die seiner Kanten durch k bezeichnet wird,

$$e + f = k + 2.$$

Denkt man sich nun an eine solche Pyramide eine zweite so angelegt, dass zwei congruente Seitenflächen zusammenfallen, so wächst dadurch die Anzahl der Eckpunkte um 1, die der Grenzflächen — da eine der früheren in's Innere fällt und drei neue hinzukommen — um 2, endlich die der Kanten um 3; es ist also jetzt $e = 5$, $f = 6$, $k = 9$, mithin wieder $e + f = k + 2$. In gleicher Weise wächst durch jede weitere Hinzufügung einer neuen Pyramide, falls sonst keine Flächen zusammenfallen, die Zahl der Ecken um 1, die der Flächen um 2, die der Kanten um 3, so dass immer die Summe $e + f$ um 2 grösser bleiben muss als k. — Fallen ferner die Grundflächen zweier Pyramiden in eine und dieselbe Ebene, so wächst zwar die Zahl der Flächen nur um 1, aber gleichzeitig verschwindet auch die eine Kante, in welcher die Grundflächen zusammenstossen, und der Satz muss also auch dann seine Gültigkeit behalten. Hat endlich eine angelegte Pyramide noch mit einer anderen der vorhergehenden eine Grenzfläche gemeinschaftlich, so fallen die betreffenden beiden Grenzflächen in's Innere des Körpers, es verändert sich also f nicht, während e und k um je 1 wachsen. Fallen endlich — bei der letzten Pyramide — alle drei Seitenflächen mit solchen früherer Pyramiden zusammen, so vermindert sich f um 2 und zugleich fällt die Spitze der Pyramiden als Eckpunkt fort, zugleich aber vermindert sich auch die Zahl der Kanten um 3. Durch diese Betrachtungen überzeugt man sich, dass die Summe $e + f$ mit der Anzahl k der Kanten immer dieselbe Differenz 2 behalten muss, oder dass der obige Satz $e + f = k + 2$ für alle convexen Polyëder gelten muss.

Dieser Satz heisst nach seinem Entdecker der EULER'sche Lehrsatz.

Kapitel 4.

Die Berechnung der Oberflächen der Körper.

§ 16. Oberflächen von Polyëdern.

Die Berechnung des Inhalts der Oberfläche eines Polyëders erfordert keine besonderen stereometrischen Sätze, denn dieselbe kann durch Addition der nach den betreffenden Sätzen der Planimetrie berechneten Maasszahlen der einzelnen Flächen geschehen.

So ist z. B. der Inhalt der Oberfläche einer beliebigen dreiseitigen Pyramide gleich der Summe der Inhalte von vier Dreiecken. Sind also beispielsweise die sämmtlichen Kanten eines solchen Körpers gemessen, und bezeichnen a, b, c,

bezüglich die Maasszahlen der Grundkanten, a', b', c' die der Seitenkanten, so dass die zu a' gehörige mit der zu a gehörigen keinen Punkt gemeinsam hat, und ebenso die Kanten b, b' und c, c' einander gegenüberliegen, so erhält man für $a = 14, b = 15, c = 13, a' = 37, b' = 40, c' = 44$ den Inhalt der Grundfläche nach der Formel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ gleich 84 und ebenso diejenigen der Seitenflächen gleich $105\sqrt{7}$, 264, 240, also die gesuchte Oberfläche gleich $588 + 105\sqrt{7} = 865, 8 \ldots$

Die Oberfläche eines regelmässigen Tetraëders wird erhalten, wenn man den Inhalt einer Seitenfläche mit 4 multiplicirt. Ist nun die Kante des Körpers gleich a gegeben, so ist die Höhe eines der Dreiecke zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes gleich $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, mithin der Inhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, und die Oberfläche des Tetraëders gleich $2a^2\sqrt{3}$. In gleicher Weise findet man für die Oberfläche eines regelmässigen Oktaëders $2a^2\sqrt{3}$, für die eines regelmässigen Ikosaëders $5a^2\sqrt{3}$. Für einen Würfel erhält man den Inhalt einer Seitenfläche gleich a^2, also die gesammte Oberfläche gleich $6a^2$. Für ein regelmässiges Pentagonaldodekaëder berechne man den Inhalt eines der Fünfecke nach Planim. § 56, und man erhält durch Multiplication desselben mit 12, $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

Anders als mit den ebenflächigen Körpern verhält es sich mit den krummflächigen; für diese bietet die Planimetrie allein nicht die Möglichkeit der Oberflächenberechnung, und die letztere soll daher im Folgenden für die in den Elementen vorkommenden krummen Flächen im Anschluss an speciellere Regeln für ebenflächige Körper gelehrt werden.

§ 17. Oberflächen der Prismen und Cylinder.

1. Bei einem Prisma findet man die Summe der Seitenflächen, wenn man die Maasszahl einer Seitenkante mit der Maasszahl des Umfangs eines zu den Seitenkanten senkrechten ebenen Schnittes multiplicirt. Ist das Prisma ein gerades, regelmässig-$n$seitiges und a die Maasszahl einer Grundkante, b die einer Seitenkante, so ist die Summe seiner Seitenflächen gleich nab. Für die gesammte Oberfläche ist in allen diesen Fällen zu der Summe der Seitenflächen noch die der Grundflächen zu addiren.

Diese Sätze müssen, in so weit sie unabhängig sind von der Anzahl der Seitenflächen, auch für die Grenze des Prismas bei unendlichem Wachsthum der Anzahl seiner Seiten gelten. Hiernach erhält man für die krumme Oberfläche oder den sogenannten Mantel eines geraden Cylinders die Formel

$$M = 2r\pi \cdot h, \qquad (1)$$

wenn h seine Höhe, r den Radius seiner Grundfläche bedeutet. Den Mantel eines schiefen Cylinders kann man mit den Hülfsmitteln der Elementar-Mathematik nicht berechnen, da sich der Umfang des zu den Seitenlinien senkrechten Schnittes nicht bestimmen lässt.

Dieselben Folgerungen ergeben sich mittelst Abwicklung der Cylinderfläche in eine Ebene.

Die gesammte Oberfläche eines geraden Cylinders ist hiernach

$$O = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r). \qquad (2)$$

Es sei beispielweise der Mantel eines geraden Cylinders zu berechnen, dessen Höhe $h = 15{,}4$ cm, und dessen Grundflächen-Radius $r = 22{,}6$ cm ist, so hat man $M = 2 \cdot 22{,}6 \cdot 15{,}4 \cdot \pi$ Cubikcentimeter auszurechnen. Wählt man für π

behufs einer bloss ungefähren Berechnung den Näherungswerth $3\frac{1}{7}$, so erhält man

$$\frac{2 \cdot 22,6 \cdot 15,4 \cdot 22}{7} = 2 \cdot 22,6 \cdot 2,2 \cdot 22 = 2187,68 \text{ c. cm.}$$

Rechnet man mit fünfstelligen Logarithmen und setzt dem entsprechend $\pi = 3,14159$, so erhält man

$$\begin{aligned} \log 45,2 &= 1,65514 \\ \log 15,4 &= 1,18752 \\ \log \pi &= 0,49715 \\ \hline \log M &= 3,33981; \quad M = 2186,80 \text{ c. cm.} \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, dass das erste Resultat um mehr als 1 Cubikcentimeter fehlerhaft war. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die für r und h gegebenen Werthe absolut genau seien; in der Praxis wird jedoch anzunehmen sein, dass die bis auf Zehntel eines Centimeters angegebenen Zahlen bis zur Hälfte eines solchen Zehntels fehlerhaft sein können; in diesem Falle ist das Produkt $2r\pi h$ um fast 12 Cubikcentimeter unsicher, so dass die Rechnung mit genauerem Werthe von π nutzlos ist, und man als Resultat in runder Zahl 2180 anzunehmen hat.

Es sei als zweites Beispiel der Mantel eines Cylinders zu berechnen, der einem gegebenen Würfel umbeschrieben ist, wenn man die Länge der Kante des letzteren gleich a kennt. In diesem Falle ist der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders gleich der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite gleich a ist, also gleich $a\sqrt{2}$, und die Höhe des Cylinders gleich a. Demnach erhält man

$$M = a\sqrt{2}\pi \cdot a = a^2\sqrt{2} \cdot \pi.$$

Die Gesammt-Oberfläche dieses Cylinders ist

$$O = a^2\sqrt{2} \cdot \pi + 2 \cdot \tfrac{1}{4}(a\sqrt{2})^2\pi = a^2\sqrt{2} \cdot \pi + a^2\pi = a^2\pi(\sqrt{2} + 1).$$

2. Die obigen Gleichungen für M und O können als Beziehungsgleichungen zwischen diesen Werthen und denen von r und h allgemein zur Berechnung irgend eines derselben dienen, wenn die dazu erforderlichen anderen gegeben sind.

Um z. B. die Dimensionen eines Rechtecks zu bestimmen, mit welchen man die krumme Fläche eines geraden Cylinders bekleiden kann, der mit einem geraden quadratischen Prisma gleiche Gesammt-Oberfläche und gleiche Höhe hat, wenn die Grundkanten des letzteren gleich a und die Seitenkanten desselben gleich b gegeben sind, hat man $h = b$ und $O = 2a^2 + 4ab$; also ist

$$2a^2 + 4ab = 2r\pi(b + r),$$

woraus

$$r^2 + br = \frac{a^2 + 2ab}{\pi},$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 2ab}{\pi} + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$$

folgt. Von den beiden Werthen für r, welche so gefunden sind, ist der eine negativ und daher bei der Anwendung der quadratischen Gleichung auf die vorliegende eingekleidete Aufgabe nicht zu gebrauchen. Die gesuchten Seiten des Rechtecks sind also bezüglich gleich b und $2r\pi =$

$$\sqrt{4(a^2 + 2ab)\pi + b^2\pi^2} - b\pi.$$

3. Auch jeder Theil des Mantels eines geraden Cylinders, welcher zwischen zwei Seitenlinien desselben eingeschlossen ist, lässt sich in entsprechender Weise, z. B. durch Aufrollen in eine Ebene, berechnen. Derselbe ist gleich einem Rechtecke, dessen Seiten bezüglich der Seitenlinie des Cylinders und dem zu ihm gehörigen Bogen des Grundkreises gleich sind.

Es sei beispielsweise die gesammte Oberfläche eines durch einen Achsen-

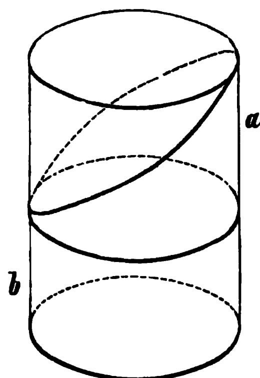
schnitt von einem geraden Cylinder abgeschnittenen Halbcylinders zu berechnen, so hat man

$$O = r\pi \cdot h + 2 \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \pi + 2rh = r[(h + r)\pi + 2h].$$

Soll ferner die krumme Fläche eines Ausschnitts eines geraden Cylinders berechnet werden, welcher zwischen zwei unter 36° gegen einander geneigten Achsenschnitten liegt, so hat man

$$M = \tfrac{1}{10} \cdot 2r\pi h = \tfrac{1}{5} r\pi h.$$

Wird endlich ein gerader Cylinder durch eine der Grundfläche nicht parallele, jedoch dieselbe nicht schneidende Ebene durchschnitten, so kann man durch die (oberen) Endpunkte der längsten und der kürzesten Seitenlinie eines abgeschnittenen Theils je eine der Grundfläche parallele Ebene legen. Diese Ebenen schliessen dann einen Cylinder zwischen sich, dessen durch die Schnittebene entstehenden Theile mit einander zur Deckung gebracht werden können. Hieraus folgt, dass der Schnitt den Mantel dieses letzteren Cylinders halbirt, und man erhält somit für die krumme Oberfläche des schief abgeschnittenen geraden Cylinderstumpfs, wenn a und b bezüglich die Maasszahlen der längsten und der kürzesten Seitenlinie desselben sind,



(M. 196.)

$$M = 2r\pi \cdot b + \tfrac{1}{2} \cdot 2r\pi(a - b) = r\pi(2b + a - b)$$
$$= r\pi(a + b)$$

oder

$$M = 2r\pi \cdot \frac{a + b}{2},$$

d. h. die gesuchte Fläche ist gleich dem Mantel eines vollständigen geraden Cylinders mit derselben Grundfläche, dessen Höhe gleich dem arithmetischen Mittel aus der längsten und der kürzesten Seitenlinie ist.

§ 18. Oberflächen der Pyramiden und Kegel.

1. Die Summe der Seitenflächen einer Pyramide ist, wenn alle Seitenflächen dieselbe Höhe haben, also beispielsweise bei einer geraden, regelmässigen Pyramide, gleich der Hälfte des Produkts aus dieser Höhe und dem Umfange der Grundfläche. Bei unendlicher Zunahme der Seitenzahl muss diese Regel unveränderlich gültig bleiben; hieraus folgt, dass die krumme Oberfläche oder der Mantel eines geraden Kegels durch die Formel $M = \tfrac{1}{2}s \cdot 2r\pi$ oder

$$M = rs\pi \quad (1)$$

berechnet werden kann, wo s die Maasszahl einer Seitenlinie und r die des Grundflächen-Radius bedeutet. Der Mantel eines schiefen Kegels lässt sich mit den Hülfsmitteln der Elementar-Mathematik nicht berechnen. Die Ableitung der obigen Formel kann auch durch Berechnung des Flächeninhalts des Sectors geschehen, welcher durch Abwicklung des geraden Kegelmantels in eine Ebene entsteht.

Die gesammte Oberfläche eines geraden Kegels wird hiernach mittelst der Formel

$$O = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r)$$

berechnet.

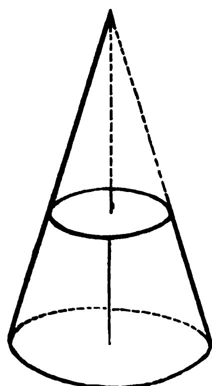
Es sei beispielsweise $r = 0{,}33$ m, $h = 9{,}64$ m gegeben, so ist zunächst

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$ zu berechnen. Man erhält $s = 9,645$ und hieraus $M = 0,33 \cdot 9,645\pi$ $= 10$ Cubikmeter.

Es sei ferner beispielsweise die Oberfläche eines Körpers zu berechnen, welcher aus einem geraden Cylinder und zwei auf seinen Grundflächen stehenden geraden Kegeln zusammengesetzt ist, deren Höhen den Radien der Grundflächen gleich sind. Ist h die Höhe, r der Grundflächen-Radius des Cylinders, so erhält man

$$O = 2r\pi h + 2r\pi\sqrt{r^2 + r^2} = 2r\pi(h + r\sqrt{2}).$$

Den Inhalt des von zwei Seitenlinien eingeschlossenen Theiles des Mantels eines geraden Kegels erhält man in entsprechender Weise wie in dem ähnlichen Falle bei dem Cylinder. Ist b die Länge des zugehörigen Bogens der Grundfläche, so ist $\frac{1}{2}bs$ zu berechnen.


(M. 197.)

Dass man umgekehrt r aus M und s oder s aus r und M, oder r aus O und s u. dgl. m. berechnen kann, bedarf keiner näheren Ausführung.

2. Der Mantel eines abgestumpften geraden Kegels kann als Differenz der Mäntel des zugehörigen vollständigen und des Ergänzungskegels berechnet werden. Ist die Seitenlinie des Kegelstumpfes gleich s, der Radius der grösseren Grundfläche gleich R, der Radius der kleineren Grundfläche gleich r und die Seitenlinie des Ergänzungskegels σ, so erhält man hiernach für den Mantel des Kegelstumpfs

$$M = R(s + \sigma)\pi - r\sigma\pi.$$

In dieser Formel ist jedoch die an dem Kegelstumpf selbst nicht messbare und von den Grössen R, r, s abhängige Grösse σ als unbekannt zu betrachten. Nach § 11 kann dieselbe mittels der Gleichung

$$\sigma : (\sigma + s) = r : R$$

bestimmt werden, welche durch Auflösung

$$\sigma = \frac{rs}{R - r}$$

liefert. Die Substitution dieses Werthes für σ in die obige Formel für M führt zu

$$M = R\left(s + \frac{rs}{R - r}\right)\pi - \frac{r^2 s}{R - r}\pi$$

$$= \frac{R(R - r) + Rr - r^2}{R - r}s\pi = \frac{R^2 - r^2}{R - r}s\pi, \quad \text{d. i.}$$

$$M = (R + r)s\pi. \quad (2)$$

Legt man in gleichem Abstand von beiden Grundflächen einen zu denselben parallelen ebenen Schnitt durch den Kegelstumpf, so ist der Radius ρ dieses Schnittkreises zufolge Planimetrie, § 25, (3) gleich $\frac{1}{2}(R + r)$, mithin lässt sich die vorstehende Gleichung in

$$M = 2\rho\pi \cdot s$$

umformen.

Die gesammte Oberfläche des geraden Kegelstumpfes ist

$$O = (R + r)s\pi + R^2\pi + r^2\pi = [R(R + s) + r(r + s)]\pi.$$

Als ein Beispiel für die Anwendung dieser Gleichungen diene die Aufgabe, die Höhe eines abgestumpften geraden Kegels zu berechnen, dessen Mantel

$M = 252$ ist, wenn ausserdem die Peripherien der beiden Grundflächen $P = 25$, $p = 17$ gegeben sind. Da $P = 2R\pi$, $p = 2r\pi$. so ist $(R + r)\pi = \frac{P+p}{2}$, also $M = \frac{P+p}{2} \cdot s$. Hieraus folgt zunächst $s = \frac{2M}{P+p}$. Mittelst eines Achsenschnitts des Kegelstumpfs erhält man ferner

$$h = \sqrt{s^2 - (R-r)^2}, \text{ also } h = \sqrt{\frac{4M^2}{(P+p)^2} - \frac{(P-p)^2}{4\pi^2}}.$$

Für das Zahlenbeispiel hat man $s = \frac{2 \cdot 252}{42} = \frac{252}{21} = 12$,

$$R - r = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi},\ h = \sqrt{144 - \frac{16}{\pi^2}} = 11{,}932\ldots$$

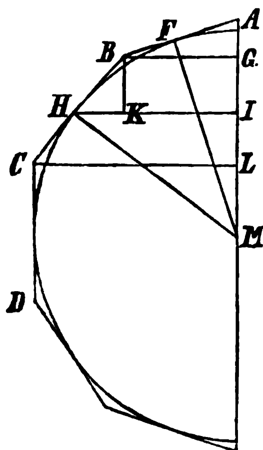
§ 19. Oberflächen der Kugeln.

1. Für die Berechnung der Oberfläche einer Kugel lässt sich nicht in gleicher Weise, wie in der Planimetrie von den regelmässigen Polygonen zum Kreise, ein Uebergang von den regelmässigen Polyëdern finden, da die Anzahl der Flächen der letzteren nicht bis in's Unendliche zunehmen kann. Dagegen erhält man durch Rotation der Hälfte eines regelmässigen Polygons um eine durch seinen Mittelpunkt und einen Eckpunkt, bezw. die Mitte einer Seite gehende Achse einen Körper, dessen aus vollständigen oder abgestumpften Kegel- bezw. Cylinder-Mänteln bestehende krumme Oberfläche in eine Kugelfläche als Grenze übergeht, wenn man das Polygon mit in's Unendliche wachsender Seitenzahl in den ihm einbeschriebenen Kreis übergehen lässt.

Es sei AB eine die Umdrehungs-Achse in ihrem Endpunkt A schneidende, also bei der Rotation einen vollständigen Kegelmantel beschreibende Seite der rotirenden Hälfte des Polygons, M der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, F der Berührungspunkt dieses Kreises mit AB und BG senkrecht auf AM. Dann ist der Inhalt des von AB beschriebenen Kegelmantels gleich $AB \cdot BG \cdot \pi$. Zieht man nun FM, so stimmen die Dreiecke ABG und AFM ausser in dem gemeinschaftlichen Winkel bei A in den rechten Winkeln AGB und AFM überein und sind also ähnlich. Hieraus folgt

$$BG : AG = FM : AF \text{ oder } AF \cdot BG = FM \cdot AG.$$

Bezeichnen wir die Länge des Radius FM durch r, setzen $AF = \frac{1}{2} AB$ und multipliciren noch beide Seiten der vorhergehenden Gleichung mit 2π, so erhalten wir



(M. 198.)

$$AB \cdot BG \cdot \pi = 2r\pi \cdot AG,$$

d. h. der oben angegebene Inhalt des Kegelmantels ist gleich dem Inhalt eines geraden Cylindermantels, welcher den Radius des einbeschriebenen Kreises zum Grundflächen-Radius und die Höhe AG des Kegels zur Höhe hat.

Es sei ferner BC eine der Seiten des Polygons, welche abgestumpfte Kegelmäntel beschreiben, H ihr Berührungspunkt, HI senkrecht zur Drehungsachse AM, und BK senkrecht zu HI, so ist HI der Radius des mittleren Durch-

schnittskreises des Kegelstumpfes, und daher der Mantel des letzteren gleich $2 \cdot HI \cdot \pi \cdot BC$. Zieht man noch MH, so ergänzt jeder der Winkel HBK und IHM den Winkel BHK zu einem Rechten, also sind jene Winkel gleich und mithin die rechtwinkeligen Dreiecke BHK und HMI ähnlich, woraus

$$BK : BH = HI : HM \text{ oder } HI \cdot BH = r \cdot BK$$

folgt. Sind noch BG und CL senkrecht zu AM, so ist $BK = GI = \frac{1}{2}GL$, und setzt man ausserdem vorher $BH = \frac{1}{2}BC$ und multiplicirt beide Seiten der Gleichung mit 4π, so erhält man

$$2 \cdot HI \cdot \pi \cdot BC = 2r\pi \cdot GL,$$

d. h. der oben angegebene Inhalt des abgestumpften Kegelmantels ist ebenfalls gleich dem Inhalt eines geraden Cylindermantels, welcher den Radius des einbeschriebenen Kreises zum Grundflächen-Radius und die Höhe des Kegelstumpfes zur Höhe hat.

Ist eine Seite CD des Polygons der Drehungsachse parallel, so beschreibt sie den diesem Satze entsprechenden Cylindermantel selbst.

Ist eine Seite des Polygons senkrecht zur Drehungsache, so beschreibt sie eine Kreisfläche, welche für sich zu berechnen ist.

Hiermit sind alle bei der Rotation des Polygons möglichen Fälle erschöpft, und es ergiebt sich, da die genannten Cylindermäntel sämmtlich denselben Grundflächen-Radius besitzen, dass die Summe beliebig vieler von Seiten des Polygons beschriebener krummer Flächen gleich dem Mantel eines einzigen Cylinders ist, welcher jenen Radius hat, und dessen Höhe gleich der Summe der Höhen der einzelnen Theilkörper ist. (1)

Insbesondere ist also die krumme Oberfläche des gesammten durch die Rotation des Polygons entstehenden Körpers gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Grundflächen-Radius gleich dem Radius des einbeschriebenen Kreises, und dessen Höhe gleich dem innerhalb des Körpers liegenden Abschnitt der Rotationsachse ist.

2. Wird für das rotirende Polygon der einbeschriebene Kreis gesetzt, so wird dieser Abschnitt ein Durchmesser der Kugel, in welche der Rotationskörper übergeht, und es ergiebt sich der Satz:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Grundflächen-Durchmesser und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind.

Ist r die Maasszahl des Radius der Kugel, so erhält man hieraus für die Oberfläche O der letzteren die Formel

$$O = 4r^2\pi. \quad (2)$$

Die Oberfläche einer Kugel ist also viermal so gross als der Flächeninhalt eines grössten Kreises derselben, und so gross als der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

Um beispielsweise die Oberfläche der Erde zu berechnen, wenn diese als eine Kugel betrachtet wird, deren Durchmesser 1719 Meilen beträgt, hat man $2r = 1719$, also $O = 1719^2\pi = 9280000$ Quadratmeilen.

Als zweites Beispiel soll die Oberfläche einer Kugel berechnet werden, welche einem Würfel umbeschrieben ist, wenn man die Länge der Kante des letzteren $a = 10,8034$ kennt. Der Radius dieser Kugel ist die Hälfte der Diagonalachse des Würfels, und da diese letztere gleich $a\sqrt{3}$ ist, so ergiebt sich $O = 3a^2\pi$, und für das Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}03356 \\ \log a^2 &= 2{,}06712 \\ \log 3 &= 0{,}47712 \\ \log \pi &= 0{,}49715 \\ \hline \log O &= 3{,}04139; \quad O = 1100{,}0. \end{aligned}$$

3. Die Berechnung des Flächeninhalts von Theilen einer Kugelfläche, welche durch eine einzige ebene Schnittfläche von derselben abgeschnitten werden, ergiebt sich ebenfalls aus der Entwicklung in No. 1 dieses Paragraphen. Man nehme zu diesem Zwecke zur Rotationsachse den zu jener Schnittfläche senkrechten Durchmesser der Kugel und denke sich statt sämmtlicher von den Seiten des Polygons beschriebener krummen Flächen nur diejenigen addirt, welche zu dem abgeschnittenen Theil der Kugel gehören.

Man nennt einen solchen Theil der Kugelfläche eine Kugelmütze oder eine Calotte und den innerhalb des zugehörigen Körperstücks liegenden Theil der Drehungsachse die Höhe der Calotte. Hiernach hat man den Satz:

Der Flächeninhalt M einer Calotte ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, dessen Grundflächenradius gleich dem Radius r der Kugel, und dessen Höhe gleich der Höhe h der Calotte ist, oder

$$M = 2r\pi \cdot h. \quad (3a)$$

Ein von zwei einander parallelen Schnittebenen einer Kugel abgeschnittener, von den Schnittkreisen begrenzter Theil der Kugelfläche heisst eine Zone der letzteren; der senkrechte Abstand der beiden Schnittflächen von einander ist die Höhe der Zone. Durch eine entsprechende Entwicklung wie bei der Calotte erhält man für den Flächeninhalt einer Zone denselben Lehrsatz wie vorher, so dass auch für sie die Formel

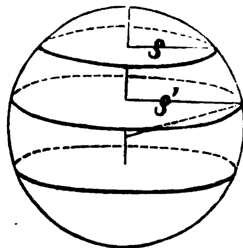
$$M = 2r\pi \cdot h \quad (3b)$$

gilt. — Die Calotte kann als eine Zone betrachtet werden, deren einer Grundkreis auf einen Punkt reducirt ist, und demnach können auch die beiden vorstehenden Lehrsätze in einen einzigen zusammengefasst werden.

Dieser Lehrsatz zeigt, dass bei einer und derselben Kugel der Flächeninhalt einer Zone nur von ihrer Höhe abhängig ist, dass also Zonen von gleicher Höhe in derselben Kugel stets gleich gross sind, einerlei ob sie näher am Mittelpunkt oder ferner von demselben herausgeschnitten werden. Theilt man also z. B. einen Durchmesser einer Kugel in n gleiche Theile und legt durch jeden Theilpunkt die zu dem Durchmesser senkrechte Ebene, so wird auch die Oberfläche der Kugel in n gleiche Theile getheilt.

Will man den Flächeninhalt einer Zone aus den Radien ρ, ρ' ihrer Grundflächen und dem Kugelradius r berechnen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die beiden Grundflächen nach derselben Seite oder nach verschiedenen Seiten vom Mittelpunkte aus liegen. Im ersteren Falle ergiebt sich $h = \sqrt{r^2 - \rho^2} - \sqrt{r^2 - \rho'^2}$, im letzteren $h = \sqrt{r^2 - \rho^2} + \sqrt{r^2 - \rho'^2}$, also ist

$$M = 2r\pi\left[\sqrt{r^2 - \rho^2} \mp \sqrt{r^2 - \rho'^2}\right].$$



(M. 199.)

Geht insbesondere die eine Schnittebene durch den Mittelpunkt, so ist $\rho' = r$, also $M = 2r\pi\sqrt{r^2 - \rho^2}$. Wird die Zone zur Calotte, ist also $\rho = 0$, so ist $M = 2r\pi\left[r \mp \sqrt{r^2 - \rho'^2}\right]$.

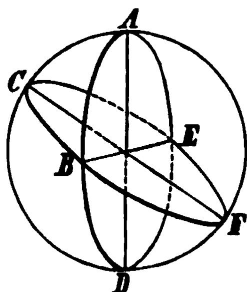
4. Der Flächeninhalt eines sphärischen Zweiecks ist durch den Kugelradius und den Winkel des Zweiecks bestimmt. Dass sphärische Zweiecke derselben Kugel congruent sind, wenn sie gleiche Winkel haben, lässt sich unmittelbar durch Deckung derselben beweisen. Theilt man ferner die Winkel zweier beliebigen sphärischen Zweiecke derselben Kugel durch ein gemeinschaftliches Maass in gleiche Theile, so müssen die theilenden grössten Halbkreise auch die Zweiecke in bezüglich eben so viele kleinere Zweiecke theilen, und man erhält daher den allgemeineren Satz:

die Flächen von sphärischen Zweiecken derselben Kugel verhalten sich zu einander wie die Winkel der Zweiecke.

Daher muss sich der Flächeninhalt eines sphärischen Zweiecks auch zur ganzen Kugelfläche verhalten, wie der Winkel des Zweiecks zu 360°. Die Proportion $F : 4r^2\pi = \alpha : 360°$ führt zu

$$F = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{90°}. \quad (4)$$

5. Um den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu berechnen, bedarf man zunächst des Lehrsatzes, dass die Flächen je zweier Gegendreiecke gleich gross sind. Wie früher (§ 15, No. 7) gezeigt wurde, hat jedes sphärische Dreieck einen Punkt, welcher so liegt, dass die Bogen grösster Kreise, welche denselben mit je einem Eckpunkt verbinden, gleich gross sind; durch diese Bogen wird also das Dreieck in drei gleichschenkelige sphärische Dreiecke zerlegt. Jener Mittelpunkt des Dreiecks ist der eine Endpunkt eines Durchmessers, in welchem sich drei Ebenen schneiden, die auf den Flächen der zum Dreieck gehörigen Ecke bezüglich senkrecht stehen, und jedesmal die betreffende Seite des Dreiecks halbiren. Hieraus geht hervor, dass die Mittelpunkte zweier Gegendreiecke Endpunkte eines und desselben Durchmessers sind, und dass daher auch die gleichschenkeligen Dreiecke, in welche jedes derselben durch die sphärischen Radien zerlegt wird, paarweise Gegendreiecke sind. Gleichschenkelige sphärische Dreiecke, welche zu einander symmetrisch sind, müssen aber auch in Folge der Uebereinstimmung der beiden Schenkel sowie der ihnen gegenüberliegenden Winkel unter einander congruent sein, denn die homologen Stücke können in beiden Aufeinanderfolgen angenommen werden. Da nun congruente sphärische Dreiecke gleiche Flächen haben müssen, so erscheinen die beiden ursprünglichen sphärischen Dreiecke als aus gleich vielen einander paarweise gleichen Theilen zusammengesetzt, und dieselben sind mithin selbst von gleicher Grösse. — Allgemein haben die Flächen je zweier symmetrischer sphärischer Dreiecke gleiche Inhalte, denn diese Dreiecke können immer in die Lage von Gegendreiecken zu einander gebracht gedacht werden.



(M. 200.)

Denkt man sich nun ein beliebiges sphärisches Dreieck ABC durch jedes seiner Nebendreiecke zu einem sphärischen Zweieck ergänzt, so ist jeder Winkel des Dreiecks zugleich der Winkel eines der Zweiecke. Es seien α, β, γ bez. die Masszahlen der Winkel A, B, C des Dreiecks ABC, so erhält man hiernach

$$\triangle ABC + CBD = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{90°},$$

$$\triangle ABC + ACE = \frac{r^2\pi \cdot \beta}{90°},$$

$$\triangle ABC + ABF = \frac{r^2\pi \cdot \gamma}{90^\circ},$$

folglich $3 \cdot \triangle ABC + CBD + ACE + ABF = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(\alpha + \beta + \gamma)$.

Setzt man nun statt des Inhalts des Nebendreiecks ACE den Inhalt des ihm gleichen Gegendreiecks BDF desselben und berücksichtigt, dass die Summe der vier Dreiecke ABC, CBD, BDF, ABF gleich der Halbkugelfläche, also gleich $2r^2\pi$ ist, so erhält man

$$2 \cdot \triangle ABC + 2r^2\pi = \frac{r^2\pi}{90^\circ}(\alpha + \beta + \gamma),$$

woraus

$$\triangle ABC = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma) - r^2\pi,$$

oder

$$\triangle ABC = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \quad (5^a)$$

folgt. Den Ueberschuss der Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines sphärischen Dreiecks über 180° nennt man den sphärischen Excess des Dreiecks. Bezeichnet man denselben durch e, so hat man kürzer

$$\triangle ABC = r^2 e \cdot \frac{\pi}{180^\circ}. \quad (5^b)$$

Als Beispiel der Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks diene diejenige des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, dessen direkt gemessene Winkel den sphärischen Excess $e = 14'', 853$ ergaben. Nimmt man den Erddurchmesser zu 1716,96 Meilen an, so erhält man

$$\begin{aligned}
r = 858{,}48;\ \log r &= 2{,}93373 \\
\log r^2 &= 5{,}86746 \\
\underline{\log e} &\underline{= 1{,}17182} \\
&\ 7{,}03928 \\
\log \rho &= 5{,}31443;\ \left(\rho = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 60 \cdot 60\right) \\
\overline{\log F} &\overline{= 1{,}72485};\ F = 53{,}070\ \square\ \text{Meilen.}
\end{aligned}$$

Bei Dreiecken auf der Erdoberfläche hat, wie in dem vorstehenden Beispiel, der sphärische Excess in der Regel einen kleinen Werth, da solche Dreiecke, deren drei Winkel durch unmittelbare Messung bestimmt werden sollen, nur verhältnissmässig kleine Seiten haben können und daher von einem ebenen Dreieck wenig abweichen. Bei derartigen Dreiecken kann man nach einem Satze von Legendre jeden Winkel um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindern und dann das Dreieck als ein ebenes berechnen, dessen Winkel die so erhaltenen Differenzen sind. Näheres über die Berechnung sphärischer Dreiecke findet man in der sphärischen Trigonometrie.

Auch der Inhalt der Fläche eines sphärischen Polygons kann nach der Formel $F = r^2 e \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ berechnet werden, wenn man unter e den Ueberschuss der Winkelsumme des sphärischen n-Ecks über $(2n-4)R$, also über die Winkelsumme eines ebenen n-Ecks versteht. Man erhält diesen Satz leicht, wenn man das n-Eck durch Diagonalbogen in Dreiecke zerlegt, die Flächen der letzteren, wie vorher gezeigt, einzeln berechnet und dann dieselben addirt.

Kapitel 5:
Die Berechnung der Rauminhalte der Körper.

§ 20. Rauminhalte von Prismen und Cylindern.

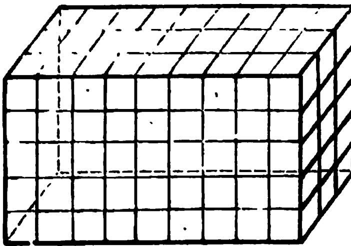
1. Den Rauminhalt oder das Volumen eines Körpers bestimmen, heisst angeben, wie oft ein bestimmter, als Einheit dienender Körperraum in demjenigen des gegebenen Körpers enthalten ist, oder mit anderen Worten, das Verhältniss des räumlichen Inhalts dieses Körpers zu demjenigen des Maasses angeben.

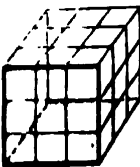
Als Einheit oder Maass für Körpermessungen hat man wegen seiner einfachen Beziehungen zu dem Längenmaass und dem Flächenmaass einen Würfel angenommen, dessen Kante gleich der Längen-Einheit, dessen Grenzfläche also gleich der Flächen-Einheit ist. Der Würfel empfiehlt sich als Maass auch durch seine einfache Gestalt, die senkrechten Stellungen der Kanten und der Flächen zu einander, und dadurch, dass er durch eine einzige Strecke bestimmt ist. Je nach der Wahl der zu Grunde gelegten Längen-Einheit nennt man einen solchen Würfel ein Kubikmeter, einen Kubikdecimeter, eine Kubikmeile u. dgl. m.

Der Kubikdecimeter ist gleich dem Rauminhalt eines Liters. Ein Kubikdecimeter reinen Wassers wiegt bei einer Temperatur von 4°C ein Kilogramm, ein Kubikcentimeter ein Gramm.

Wegen dieses Gebrauchs eines Würfels oder Kubus als Raummaasses nennt man die Maasszahl des Volumens eines Körpers auch den Kubikinhalt desselben.

Die leichteste Vergleichung mit einem solchen Maasse gestatten die Volumina derjenigen Körper, welche mit demselben am nächsten verwandt sind, nämlich die rechtwinkeligen Parallelepipeda. Denkt man sich jede der drei in einem Eckpunkt zusammenstossenden Kanten eines solchen durch ein gemeinschaftliches Maass in bezüglich m, n, p gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilpunkt die zur Ebene der beiden anderen Kanten parallele Ebene gelegt, so zerfällt das Parallelepipedon in $m \cdot n \cdot p$ gleich grosse (congruente) Würfel. Ist jeder der Theile der Kanten gleich der Längeneinheit, so sind diese Würfel gleich der Raumeinheit, und das Produkt $m \cdot n \cdot p$ der Maasszahlen der drei Kanten ist unmittelbar die Maasszahl des Parallelepipedon. Ist aber die Kante des als Körpermaass dienenden Würfels kein Maass jeder der drei Kanten des Parallelepipedon, kann man sich aber diese drei Kanten und ebenso die des Würfels durch ein den vier Strecken gemeinsames Maass getheilt denken, so sei q die Anzahl der Theile einer Würfelkante. Durch das gleiche Verfahren wie das vorher bei dem Parallelepipedon angewendete zerfällt dann der Würfel in $q \cdot q \cdot q = q^3$ kleinere, den Theilen des Parallelepipedon gleiche Würfel, und es ist daher das Verhältniss des zu messenden Körpers zum Maasse gleich $\frac{mnp}{qqq}$. Nun sind aber in diesem Falle $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{q}$, $\frac{p}{q}$, die Maasszahlen der drei Kanten des Parallelepipedon, also hat man wieder den Satz:


(M. 201.)


(M. 202.)

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedon ist gleich dem Produkt (der Maasszahlen) der drei Kanten desselben. (1)

Ist die Kante des als Maass dienenden Würfels nicht mit allen drei Kanten des Parallepipedon commensurabel, so erhält man durch eine Grenz-Betrachtung, ähnlich den in entsprechenden Fällen, z. B. bei der Bestimmung der Flächeninhalte von Rechtecken (Planimetrie, § 40) angestellten, denselben Satz als gültig bestätigt.

Man findet diesen Satz auch dahin ausgesprochen, dass der Inhalt eines jeden rechtwinkeligen Parallelepipedon gleich dem Produkt aus seiner Länge, Breite und Höhe sei.

Sind also a, b, c die Maasszahlen der drei Kanten eines solchen Körpers, so ist sein Volumen allgemein

$$V = abc. \quad (1^a)$$

Sind zwei der Kanten einander gleich, ist der Körper also eine gerade quadratische Säule, so erhält man die Formel $V = a^2 b$. Sind alle drei Kanten einander gleich, ist der Körper also ein Würfel, so erhält man die Formel

$$V = a^3. \quad (1^b)$$

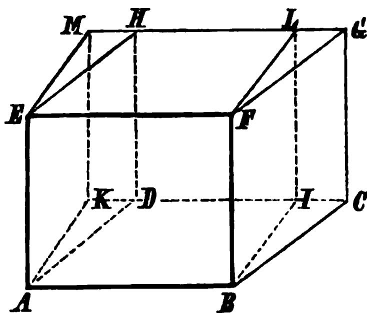
Hieraus erklärt sich die Benennung Kubus für dritte Potenz und Kubikwurzel für dritte Wurzel in der Arithmetik.

Ist also die Kante eines Würfels doppelt so gross als die eines anderen, so ist jener Würfel 8mal so gross als dieser; ist die Kante des ersteren 3mal so gross als die des letzteren, so ist jener 27mal so gross als dieser, u. s. w.

Ein Kubikmeter enthält 1000 Kubikdecimeter, und $1000 \cdot 1000 = 1000000$ Kubikcentimeter u. s. w.

2. Von der Berechnung rechtwinkeliger Parallelepipeda gelangt man zu derjenigen von schiefwinkeligen durch folgende Sätze:

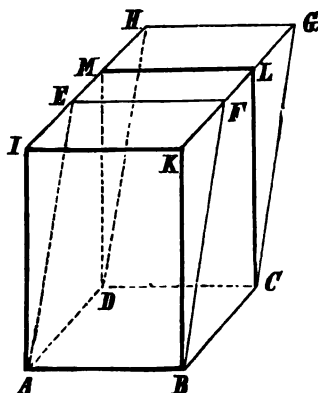
a) Jedes Parallelepipedon mit schiefwinkeliger Grundfläche lässt sich in ein gleichgrosses mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln, in welchem die Grundfläche rechtwinkelig ist. Ist nämlich $ABCDEFGH$ das gegebene Parallelepipedon, so verwandele man zunächst seine Grundfläche $ABCD$ in das ihr gleiche Rechteck $ABIK$, lege durch AK und die Seitenkante AE, so wie durch BI und die Seitenkante BF je eine Ebene und erweitere die betreffenden Grundflächen des gegebenen Parallelepipedon, so dass das Parallepipedon $ABIKEFLM$ über der Grundfläche $ABIK$ entsteht, welches mit jenem dieselbe Höhe hat. Dann kann man sich das neue Parallelepipedon dadurch aus dem ursprünglichen entstanden denken, dass von letzterem ein dreiseitiges Prisma $BCIFGL$ abgeschnitten und dafür ein anderes dreiseitiges Prisma $ADKEHM$ angesetzt wurde. Diese beiden Prismen stimmen aber mit einander in allen homologen Stücken überein, sind also congruent und daher auch gleich gross. Hieraus folgt, dass auch die beiden Parallelepipeda gleiche Volumina haben müssen.



(M. 208.)

b) Jedes Parallelepipedon, in welchem zwei einander parallele Seitenflächen nicht senkrecht zu den Grundflächen stehen, kann in ein gleichgrosses über derselben Grundfläche und mit derselben Höhe verwandelt werden, in welchem die

jenen Seitenflächen entsprechenden Ebenen senkrecht zu den Grundflächen stehen, während die Neigungswinkel der beiden anderen Seitenflächen gegen die Grundflächen in beiden Körpern die gleichen sind. Sind nämlich *ABFE*, *DCGH* die beiden als zu den Grundflächen schiefstehend vorausgesetzten Seitenflächen des gegebenen Körpers, so errichte man in den Kanten *AB*, *DC* der Grundfläche die zu dieser senkrechten Ebenen und erweitere die betreffenden anderen Flächen des ursprünglichen Parallelepipedon, so dass der neue Körper *ABCDIKLM* entsteht, welcher dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe, wie jener hat und aus ihm dadurch entstanden gedacht werden kann, dass das dreiseitige Prisma *DMHCLG* abgeschnitten und dafür das congruente (weil in jeden homologen Stücken mit ihm übereinstimmende) *AIEBKF* angesetzt wurde.



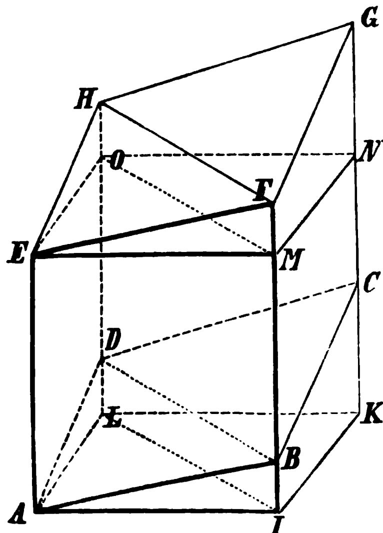
(M. 204.)

c) Jedes Parallelepipedon, in welchem keine Seitenfläche zur Grundfläche senkrecht steht, kann mittelst zweimaliger Anwendung des unter b) angegebenen Verfahrens in ein ihm gleiches mit derselben Grundfläche und derselben Höhe verwandelt werden, in welchem jede Seitenfläche zur Grundfläche senkrecht ist.

Aus diesen Sätzen folgt, dass allgemein jedes schiefwinkelige Parallelepipedon sich in ein rechtwinkeliges von gleicher Grundfläche und Höhe verwandeln lässt. Sind nun a, b die Maasszahlen der Grundkanten, und ist c die Maasszahl der Seitenkanten des letzteren, so ist sein Inhalt, und also auch derjenige des schiefwinkeligen Parallelepipedon gleich abc. Hierbei ist c gleich der Höhe h des letzteren und $a \cdot b$ zufolge der Gleichheit der Grundflächen gleich dem Inhalt G der Grundfläche des letzteren. Somit gilt für alle möglichen Parallelepipeda der Satz:

Das Volumen eines Parallelepipedons ist gleich dem Produkt (der Maasszahlen) seiner Grundfläche G und seiner Höhe h. (2)

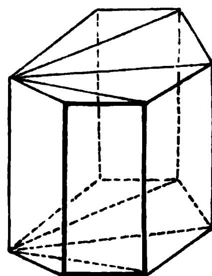
3. Jedes Parallelepipedon wird durch jeden seiner Diagonalschnitte in zwei symmetrische dreiseitige Prismen getheilt. Ist das Parallelepipedon, und sind also auch der entsprechend die beiden Prismen gerade, so ist leicht ersichtlich, dass die letzteren auch congruent und demnach gleich gross sind. Sind dagegen Parallelepipedon und Prismen schief, so kann man mittelst der zu einer Seitenkante *AE* in ihren Endpunkten senkrechten Ebenen ein gerades Parallelepipedon construiren, dessen Seitenflächen mit denen des ersteren bezüglich in denselben Ebenen liegen. Nun ist das dreiseitige Prisma *AILEMO* die Hälfte des geraden Parallelepipedon; dieses letztere ist dem ursprünglichen gleich, da der abgeschnittene Körper



(M. 205.)

EMNGH dem angesetzten *AIKCD* gleich ist; entsprechend ist jenes dreiseitige Prisma dem Prisma *ABDEFH* gleich. Hieraus folgt, dass das letztere gleich der Hälfte von *ABCDEFGH* ist.

Umgekehrt kann jedes dreiseitige Prisma mittelst zweier zu Seitenflächen desselben paralleler Ebenen und Erweiterung seiner Grundflächen zu einem Parallelepipedon ergänzt werden, welches einen doppelt so grossen Inhalt als das Prisma sowie eine doppelt so grosse Grundfläche und die gleiche Höhe hat. Ist also G die Maasszahl der Grundfläche, h die der Höhe des Prismas, so ist der Inhalt des Parallelepipedon gleich $2G \cdot h$, und mithin der des Prismas gleich Gh.


(M. 206.)

Es gilt also auch für jedes dreiseitige Prisma der Satz, dass sein Rauminhalt gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe ist.

Jedes mehrseitige Prisma lässt sich, z. B. durch Diagonalschnitte, in dreiseitige zerlegen. Bezeichnen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ der Reihe nach die Maasszahlen der Grundflächen dieser Theilprismen, G die der Grundfläche des ganzen Prismas und h die der gemeinschaftlichen Höhe dieser Körper, so erhält man für den Inhalt des n-seitigen Prismas durch Summirung seiner Theile:

$$V = g_1 h + g_2 h + g_3 h + \ldots = (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots) h,$$

d. i.

$$V = Gh. \quad (3)$$

Es ist also der Inhalt eines jeden Prismas gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe.

4. Dieser Satz ist unabhängig von der Anzahl der Seiten des Prismas und muss desshalb auch bei unendlichem Wachsen dieser Anzahl gültig bleiben, also auch für das Volumen eines Cylinders gelten. Setzt man dann noch für die Grundfläche G den aus ihrem Radius r berechneten Werth, so erhält man, das Volumen eines Cylinders ist

$$V = r^2 \pi h. \quad (4)$$

Dieser Satz gilt in gleicher Weise für schiefe, wie für gerade Cylinder.

Beispiele: 1. Wieviel Kubikmeter Sauerstoff enthält die Luft eines rechtwinkeligen Zimmers, welches 9,34 m lang, 5,82 m breit und 4,73 m hoch ist, wenn in 100 Theilen Luft 21 Theile Sauerstoff enthalten sind?

Man erhält $9{,}34 \cdot 5{,}82 \cdot 4{,}73 \cdot 0{,}21 = 54$ Kubikmeter, mit einer Unsicherheit von weniger als $\frac{1}{5}$ Kubikmeter, wenn die Messungen der Seiten bis auf 0,005 m genau waren.

2. Man soll einen Körper von der Gestalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedon anfertigen, so dass das Volumen desselben 2080 Kubikdecimeter, seine Oberfläche 996 Quadratdecimeter, und der Umfang seiner Grundfläche 58 Decimeter betrage. Wie lang sind die Kanten desselben zu machen?

Zur Auflösung dieser Aufgabe erhält man die drei Gleichungen:

$$xyz = 2080$$
$$xy + xz + yz = \tfrac{1}{2} \cdot 996 = 498$$
$$x + y = \tfrac{1}{2} \cdot 58 = 29.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$xy + (x + y)z = 498,$$

und setzt man in diese $x+y=29$ aus der dritten, $xy=\frac{2080}{z}$ aus der ersten ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2080}{z}+29z=498,$$

deren Auflösung auf z zu

$$z=\frac{249\pm41}{29}=10 \text{ oder } \frac{208}{29}$$

führt. Der erste dieser Werthe von z führt mittelst der Gleichungen

$$xy=208,\ x+y=29$$

in bekannter Weise auf $x=16$, $y=13$ oder $x=13$, $y=16$, der zweite führt mittelst $xy=290$, $x+y=29$ auf imaginäre Werthe von x und y, und ist also nicht brauchbar. Somit sind die gesuchten Kanten bezüglich 16, 13 und 10 Decimeter lang.

3. In einem geraden dreiseitigen Prisma seien alle Kanten gleich a; man berechne seinen Kubikinhalt. $a=13{,}2181$ cm.

Da die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, also die Höhe derselben gleich $\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist, so ist ihr Inhalt gleich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; die Höhe des Prismas ist gleich a, also der gesuchte Kubikinhalt gleich $\frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$. Zur Berechnung desselben für den angegebenen Zahlenwerth sollen die Logarithmen angewendet werden:

$$\begin{array}{ll} \log 3=0{,}47712 & \log a=1{,}12116 \quad (7) \\ \log\sqrt{3}=0{,}23856 & \log(a^3)=3{,}36350 \\ \underline{\log 4=0{,}60206} & \log\frac{1}{4}\sqrt{3}=0{,}63650-1 \\ & \overline{\log V=3{,}00000} \quad ;\ V=1000 \text{ Cub. cm.} \end{array}$$

4. Ein aus einem Stoffe, von welchem jeder Kubikcentimeter 0,5 Kilogramm wiegt, verfertigtes Prisma wiege 200,8 Kilogramm und habe eine Höhe von 4 Decimeter. Wie gross ist seine Grundfläche?

Beträgt die Grundfläche x Quadratcentimeter, die Höhe 4 Decimeter oder 40 Centimeter, so ist das Volumen des Prismas gleich $40x$ Kubikcentimeter, und letzteres wiegt also $40x\cdot0{,}5=20x$ Kilogramm. Man hat also die Gleichung $20x=200{,}8$, woraus $x=10{,}04$ Quadratcentimeter folgt.

5. Eine Röhre von Kupfer ist $a=1{,}2$ m lang und wiegt $p=90$ Kilogramm. Ihr äusserer Durchmesser beträgt $d=0{,}75$ Meter. Wie dick ist die Wandung derselben, wenn das specifische Gewicht des angewendeten Kupfers $s=9$ ist, und wieviel Kilogramm Wasser kann die Röhre aufnehmen?

Ist die Wandung x Meter dick, so ist der Radius der Höhlung gleich $\frac{1}{2}d-x$. Das Volumen der Röhre ist gleich der Differenz zweier Cylinder, welche dieselbe Höhe gleich a haben und deren Radien bez. $\frac{1}{2}d$ und $\frac{1}{2}d-x$ sind. Dasselbe ist also gleich

$$\frac{1}{4}d^2\pi a-(\tfrac{1}{2}d-x)^2\pi a=a\pi(\tfrac{1}{4}d^2-\tfrac{1}{4}d^2+dx-x^2)=a\pi x(d-x).$$

Da nun jedes Kubikdecimeter Wasser ein Kilogramm, jedes Kubikmeter Wasser also 1000 Kilogramm, und jedes Kubikmeter eines Stoffes, dessen specifisches Gewicht gleich s ist, $1000\cdot s$ Kilogramm wiegt, so ist

$$a\pi x(d-x)\cdot1000\cdot s=p,$$

woraus

$$x^2-dx=-\frac{p}{1000\,a\pi s}$$

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{p}{1000\, a\, \pi\, s}}$$

folgt. Hierbei ist jedoch nur das untere Vorzeichen der Wurzelgrösse brauchbar, da die Dicke der Wandung einer Röhre nicht mehr als die Hälfte des äusseren Durchmessers betragen kann.

Der Inhalt der Höhlung der Röhre beträgt $(\frac{1}{2}d - x)^2 \pi a \cdot 1000$ Kubikdecimeter, und dieselbe kann daher eben so viele Kilogramm Wasser aufnehmen. Setzt man hier noch für x den gefundenen Werth ein, so erhält man

$$V = 250\, a\, d^2 \pi - \frac{p}{s}.$$

Für das angegebene Zahlenbeispiel liefert die Ausrechnung $x = 0{,}00355$ m, $V = 520{,}14$ Kg.*)

5. Aus dem für die Berechnung der Volumina von Prismen gefundenen Satze folgen unmittelbar die nachstehenden Sätze:

Prismen mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiche Volumina.

Es kann aber nicht umgekehrt behauptet werden, dass zur Gleichheit der Volumina zweier Prismen die Gleichheit ihrer Grundflächen und die ihrer Höhen erforderlich sei, sondern es genügt hierfür die Gleichheit der Produkte der Grundflächen und Höhen, oder

Prismen, deren Grundflächen sich zu einander umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, haben gleiche Volumina.

Die Volumina von Prismen, deren Grundflächen gleich sind, verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Höhen.

Die Volumina von Prismen, deren Höhen gleich sind, verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Grundflächen.

Die Volumina von Prismen überhaupt verhalten sich zu einander wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Alle diese Sätze bleiben gültig, wenn statt eines oder mehrerer Prismen Cylinder gesetzt werden.

§ 21. Rauminhalte von Pyramiden und Kegeln.

1. Zur Berechnung der Volumina von Pyramiden kann man durch folgende Sätze gelangen:

Werden Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, in gleichen Abständen von den Grundflächen durch je eine Ebene parallel zu der Grundfläche durchschnitten, so haben die Schnittfiguren gleiche Flächeninhalte, denn sind x, y die Flächeninhalte dieser Figuren für zwei Pyramiden und ist G der für beide gleiche Flächeninhalt der Grundflächen, h die ebenfalls für beide gleiche Maasszahl der Höhen, endlich p der wieder übereinstimmende Abstand jeder Schnittfigur von der zugehörigen Spitze, so ist

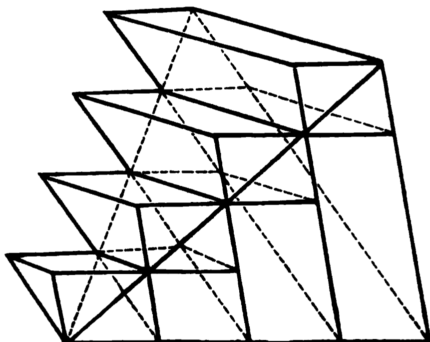
$$x : G = p^2 : h^2 \text{ und } y : G = p^2 : h^2,$$

woraus $x = y$ folgt.

Theilt man ferner die Höhe einer Pyramide in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und legt durch jeden Theilpunkt die der Grundfläche parallele Schnitt-

*) Aus REIDT, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie, 2. Aufl. Leipzig, B. G. TEUBNER, woselbst sich eine grössere Auswahl hierher gehöriger Aufgaben findet.

ebene, so kann man über der Grundfläche und über jeder der Schnittfiguren als Grundfläche ein Prisma construiren, dessen Höhe einer der Theile der ganzen Höhe ist, und welches den mit ihm zwischen denselben parallelen Ebenen liegenden Theil der Pyramide einschliesst. In gleicher Weise lässt sich zu jeder Schnittfigur als oberer Grundfläche ein Prisma construiren, welches zwischen zwei aufeinanderfolgenden der parallelen Ebenen liegt und ganz von dem zwischen denselben Ebenen liegenden Theil der Pyramide umschlossen wird. Der Rauminhalt der Pyramide muss daher kleiner als die Summe der äusseren und grösser als die Summe der inneren Prismen sein. Nun haben diese Prismen aber sämmtlich gleiche Höhe und jedes innere hat die untere Grundfläche eines äusseren zur oberen Grundfläche, demnach ist jedes innere dem entsprechenden äusseren gleich. Während aber zu jedem inneren ein gleiches äussere gehört, ist unter den letzteren eins, nämlich das auf der Grundfläche der Pyramide stehende, welchem kein inneres entspricht. Somit ist die Summe der äusseren Prismen um das Volumen dieses ersten grösser als die Summe der inneren, und das der Pyramide sonach von jeder der Prismen-Summen um weniger verschieden, als der Rauminhalt dieses ersten Prismas beträgt. — Die Anzahl der Theile der Pyramidenhöhe war hierbei willkürlich. Je grösser dieselbe angenommen wird, desto kleiner wird die Höhe des ersten Prismas, während die Grundfläche desselben immer dieselbe bleibt, desto kleiner wird daher auch der Grenzwerth, welcher zwischen dem Volumen der Pyramide und denjenigen der Prismensummen gefunden wurde. Denkt man sich die Anzahl der Theile der Höhe bis in's Unendliche zunehmend, die einzelnen Theile also verschwindend klein werdend, so nähert sich auch der Rauminhalt der Pyramide denjenigen der Prismensummen bis in's Unendliche, d. h. der Unterschied derselben kann kleiner gemacht werden als jeder noch so klein angegebene Körperraum. — Man kann diesen Satz kurz dahin aussprechen, dass jede Pyramide als eine Summe unendlich vieler Prismen betrachtet werden dürfe.



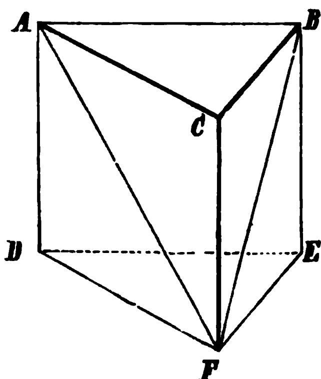
(M. 207.)

Haben nun zwei Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, denkt man sich ferner die Höhen beider in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt und dann, wie vorher, zu diesen Theilen und jeder der beiden Pyramiden die äusseren oder die inneren Prismen construirt, so haben je zwei homologe Prismen der beiden Körper nicht nur gleiche Höhen, sondern zufolge des ersten der vorstehenden Sätze auch gleiche Grundflächen. Es sind also je zwei homologe Prismen und mithin auch die beiden Prismensummen an Rauminhalt einander gleich. Hieraus folgt, indem man die Theile der Höhe als unendlich klein werdend annimmt, dass auch die Pyramiden gleich gross sind. Man hat also den Satz:

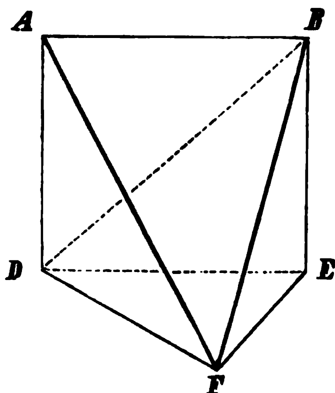
Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiche Rauminhalte.

Wären nämlich die beiden Pyramiden nicht gleich gross, so müssten ihre Kubikinhalte eine bestimmte Differenz D haben. Nun ist gezeigt worden, dass man durch Annahme hinreichend kleiner Theile der Höhen die Unterschiede der Pyramiden und der Prismensummen kleiner als jede angegebene gleichartige Grösse, also auch kleiner als D machen könne. Sind nun P_1, P_2 die Kubikinhalte der Pyramiden und ist K der für beide gleiche Kubikinhalt der Prismensummen, so kann jedenfalls $P_1 = K + x$, $P_2 = K + y$ gesetzt werden, wobei $x < D$ und $y < D$ sein soll. Dann ist aber $P_1 - P_2 = x - y$, also um so mehr kleiner als D, was der Annahme $P_1 - P_2 = D$ widerspricht.

Jedes dreiseitige Prisma kann durch zwei ebene Schnitte in drei gleich grosse dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Legt man nämlich den ersten Schnitt durch eine Grundkante AB und den nicht in derselben Seitenfläche liegenden Eckpunkt F der anderen Grundfläche des Prismas, so wird eine dreiseitige Pyramide abgeschnitten, welche zur Grundfläche die Grundfläche ABC des Prismas hat, und deren Höhe gleich der Höhe des letzteren ist. Der übrig bleibende Körper kann als eine vierseitige Pyramide angesehen werden, deren Spitze der Punkt F, und deren Grundfläche die Seitenfläche $ABED$ des Prismas ist. Diese Pyramide kann mittelst eines durch F und eine Diagonale DB ihrer Grundfläche gelegten Schnittes in zwei dreiseitige Pyramiden zerschnitten werden, deren Grundflächen DEB, DAB einander gleich sind, und welche dieselbe Spitze F, also auch gleiche Höhen haben. Diese beiden Pyramiden sind also inhaltsgleich. Die eine derselben kann aber auch als eine Pyramide betrachtet werden, welche die Grundfläche DEF des Prismas zur Grundfläche und ihre Spitze in B, also auch gleiche Höhe mit dem Prisma hat. In diesem Falle hat diese Pyramide mit der zuerst abgeschnittenen gleiche Grundfläche und gleiche Höhe und ist also auch derselben inhaltsgleich. Somit haben alle drei Pyramiden denselben Kubikinhalt.



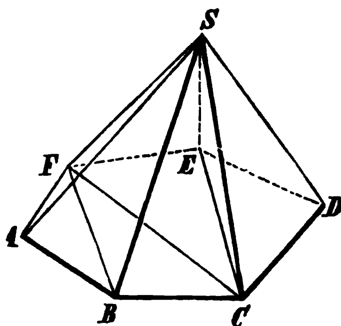
(M. 208.)



(M. 209.)

Umgekehrt kann jede dreiseitige Pyramide $ABCF$ als der dritte Theil eines dreiseitigen Prismas betrachtet werden, von welchem sie durch eine Ebene abgeschnitten wird, und welches mit ihr dieselbe Grundfläche ABC und dieselbe Höhe hat. Ist G der Inhalt der Grundfläche, h die Maasszahl der Höhe, so ist Gh der Kubikinhalt des Prismas, also $\frac{1}{3}\, Gh$ derjenige der Pyramide.

Jede mehrseitige Pyramide lässt sich, z. B durch ebene Schnitte, welche durch ihre Spitze und Diagonalen der Grundfläche gehen, in dreiseitige Pyramiden mit derselben Höhe h zerlegen. Sind g_1, g_2, g_3, . . . bezüglich die Inhalte der



(M. 210.)

einzelnen Grundflächen dieser letzteren Körper, so ergiebt sich durch Summirung der Rauminhalte derselben das Volumen der mehrseitigen Pyramide gleich

$$\tfrac{1}{3}g_1 h + \tfrac{1}{3}g_2 h + \tfrac{1}{3}g_3 h + \cdots = \tfrac{1}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + \cdots)h, \text{ oder}$$

$$V = \tfrac{1}{3}gh, \qquad (1)$$

wenn g den Inhalt der Grundfläche der ganzen Pyramide bedeutet.

Der Kubikinhalt einer jeden Pyramide ist also gleich dem dritten Theile des Produkts aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

2. Dieser Satz gilt für jede Seitenzahl der Pyramide, also auch bei unendlichem Wachsen derselben, und somit insbesondere auch für jeden Kegel. Setzt man für den Inhalt der Grundfläche des letzteren den mittelst des Radius r berechneten Werth, so erhält man für das Volumen eines Kegels die Formel

$$V = \tfrac{1}{3}r^2\pi h. \qquad (2)$$

Diese Formel gilt für gerade und für schiefe Kegel.

Beispiele: 1. Man soll den Kubikinhalt einer Pyramide berechnen, deren Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten 1,45 m, 0,25 m und 1,50 m, und deren Höhe gleich 3,12 m ist.

Für den Inhalt der Grundfläche hat man gemäss der Formel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

den Werth $\sqrt{1,60 \cdot 0,15 \cdot 1,35 \cdot 0,10} = 0,18$ qm, also ist der Kubikinhalt gleich $\tfrac{1}{3} \cdot 0,18 \cdot 3,12 = 0,06 \cdot 3,12 = 0,1872$ cbm, wofür abgekürzt 0,19 cbm zu setzen ist.

2. Eine Pyramide aus Gusseisen, dessen specifisches Gewicht 7,5 ist, wiegt 1012,5 Kilogramm; ihre Grundfläche sei ein Quadrat, dessen Seite 45 Centimeter lang ist. Wie hoch ist die Pyramide?

Ist h die gesuchte Höhe in Centimetern, so ist das Volumen der Pyramide gleich $\tfrac{1}{3} \cdot 45 \cdot 45\, h = 675 \cdot h$ cbcm, und die Pyramide wiegt $675\, h \cdot 7$, g oder $0,675 \cdot 7,5\, h$ kg, also ist

$$0,675 \cdot 7,5 \cdot h = 1012,5;\ h = \frac{10125}{75 \cdot 0,675} = 200 \text{ cm.}$$

3. Bei einem geraden Kegel von $h = 24$ Centimeter Höhe verhalte sich die Grundfläche zur Mantelfläche wie $m : n = 7 : 25$. Welchen körperlichen Inhalt hat dieser Kegel?

Die Gleichung $r^2\pi : rs\pi = m : n$ liefert $r : s = m : n$, und da $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist, so hat man

$$m\sqrt{r^2 + h^2} = nr; \quad m^2r^2 + m^2h^2 = n^2r^2,$$

$$r^2 = \frac{m^2h^2}{n^2 - m^2},$$

$$\text{also } V = \tfrac{1}{3}r^2\pi h = \frac{m^2h^3\pi}{3(n^2 - m^2)},$$

und für das Zahlenbeispiel:

$$V = \frac{49 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot \pi}{3(25+7)(25-7)} = \frac{49 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot \pi}{3 \cdot 32 \cdot 18 \cdot} = 49 \cdot 8 \cdot \pi = \frac{49 \cdot 8 \cdot 22}{7}$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 22 = 1232 \text{ Cubikcentimeter.}$$

Aus dem für den Rauminhalt einer Pyramide gefundenen Satz folgt ferner

Jede Pyramide ist gleich dem dritten Theile jedes Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben gleiche Rauminhalte.

Allgemeiner gilt der Satz: Pyramiden, deren Grundflächen sich zu einander umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, haben gleiche Rauminhalte.

Pyramiden mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Pyramiden mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Die Rauminhalte von Pyramiden überhaupt verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundflächen und Höhen.

In allen diesen Sätzen kann für jede vorkommende Pyramide auch ein Kegel gesetzt werden.

3. Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes kann gefunden werden, indem man denselben zu einer vollständigen Pyramide ergänzt und von dem Kubikinhalt der letzteren den der Ergänzungspyramide subtrahirt. Es sei zu diesem Zweck G die Maasszahl der unteren, g die der oberen Grundfläche und h die der Höhe des Stumpfs, endlich p die Maasszahl der Höhe der Ergänzungspyramide, so erhält man für das Volumen des Stumpfs:

$$V=\tfrac{1}{3}G(h+p)-\tfrac{1}{3}gp.$$

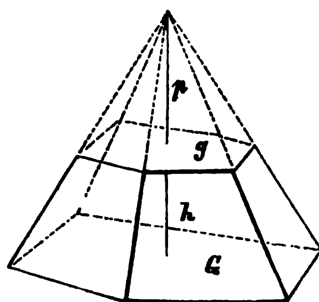
In dieser Formel ist noch die am Pyramidenstumpf selbst nicht messbare, durch die übrigen angegebenen Grössen bestimmte Höhe p mittelst der letzteren auszudrücken. Aus § 10 ergiebt sich

$$p^2:(h+p)^2=g:G, \text{ oder}$$
$$p:(h+p)=\sqrt{g}:\sqrt{G},$$

woraus $p\sqrt{G}=h\sqrt{g}+p\sqrt{g}$, mithin

$$p=\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

folgt. Die Substitution dieses Werthes für p in die obige Gleichung ergiebt



(M. 211.)

$$V=\tfrac{1}{3}G\left(h+\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right)-\tfrac{1}{3}\frac{hg\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$
$$=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{G(h\sqrt{G}-h\sqrt{g}+h\sqrt{g})-hg\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}=\tfrac{1}{3}h\cdot\frac{G\sqrt{G}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$
$$=\tfrac{1}{3}h\cdot\frac{\sqrt{G^3}-\sqrt{g^3}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}.$$

Der Quotient im letzten dieser Ausdrücke ist nach Arithm. § 14 gleich $G+\sqrt{Gg}+\sqrt{g}$, also hat man für das Volumen eines Pyramidenstumpfs die Formel

$$V=\tfrac{1}{3}h(G+\sqrt{Gg}+g). \quad (3)$$

4. Die Anwendung dieser Gleichung auf die als unendlich vielseitige Pyramidenstumpfe betrachteten abgestumpften Kegel führt für diese, wenn R, r bezüglich die Maasszahlen der Radien der beiden Grundflächen sind, zu der Formel

$$V=\tfrac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2). \quad (4)$$

Die letztere lässt sich selbstverständlich auch ohne Vermittlung der Formel für die Pyramidenstumpfe durch ein Verfahren, welches dem bei diesen gebrauchten entspricht, aus der Formel für die Volumina vollständiger Kegel ableiten. Man hat bei gleicher Bezeichnungsweise wie vorher: $V=\tfrac{1}{3}R^2\pi(h+p)-\tfrac{1}{3}r^2\pi p$;

$$p:(h+p)=r:R, \text{ also } p=\frac{hr}{R-r}, \text{ mithin}$$
$$V=\tfrac{1}{3}\pi\left[R^2\cdot\frac{hR-hr+hr}{R-r}-\frac{hr^3}{R-r}\right]=\tfrac{1}{3}\pi h\frac{R^3-r^3}{R-r}, \text{ u. s. w.}$$

Beispiele: 1. Wieviel wiegt eine abgestumpfte Pyramide von Sandstein, dessen specifisches Gewicht 2,5 ist, wenn die Grundflächen derselben Quadrate mit bezüglich Seiten gleich 0,321 m und 0,124 m sind und die Höhe des Stumpfs 0,513 m beträgt?

Das Volumen des Stumpfes ist $= \frac{0,513}{3}(0,321^2 + \sqrt{0,321^2 \cdot 0,124^2} + 0,124^2)$ $= 0,171 \cdot (0,321^2 + 0,321 \cdot 0,124 + 0,124^2)$ Kubikmeter. Nun ist

$$\begin{array}{r|rr}
\log 0,321 = 0,50651 - 1 & G = 0,10304 & 0,19926-1 \\
\log 0,124 = 0,09342 - 1 & \sqrt{Gg} = 0,03980 & \log 0,171 = 0,23300-1 \\
\hline
\log \sqrt{Gg} = 0,59993 - 2 & g = 0,01538 & \log V = 0,43226-2 \\
\log G = 0,01302 - 1 & 0,15822 & \\
\log g = 0,18684 - 2 & &
\end{array}$$

Jedes Kubikdecimeter des Sandsteins wiegt 2,5 Kilogramm, jedes Kubikmeter also 2500 Kilogramm, mithin hat man für das gesuchte Gewicht

$$\begin{aligned}
P &= 2500\,V, \\
\log V &= 0,43226 - 2 \\
\log 2500 &= 3,39794 \\
\hline
\log P &= 1,83020; \quad P = 67,64 \text{ Kg.}
\end{aligned}$$

2. Wieviel beträgt der Fehler, welchen man bei der vorstehenden Aufgabe begehen würde, wenn man das Volumen des Pyramidenstumpfs nach einer landläufigen Regel als das eines Prismas von gleicher Höhe berechnen würde, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen des Stumpfs wäre, und wieviel wenn man die Grundfläche des Prismas gleich der mittleren (d. h. von den beiden Grundflächen gleich weit abstehenden) Durchschnittsfigur des Stumpfs annähme?

Im ersteren Falle würde allgemein für das Volumen der falsche Werth $\frac{1}{2}(G+g)h$ gesetzt sein, der Fehler also

$$\tfrac{1}{2}(G+g)h - \tfrac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g) = \tfrac{1}{6}h(G + g - 2\sqrt{Gg}) = \tfrac{1}{6}h(\sqrt{G} - \sqrt{g})^2,$$

betragen. Im zweiten Fall hat man zunächst zur Berechnung des Inhalts F der mittleren Durchschnittsfigur, wenn p wieder die Höhe der Ergänzungspyramide bedeutet, nach § 10

$$F : g = (p + \tfrac{1}{2}h)^2 : p^2,$$

und nach diesem Paragraphen

$$p = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}},$$

woraus nach einigen Umformungen

$$F = \tfrac{1}{4}(\sqrt{G} + \sqrt{g})^2$$

folgt. Daher beträgt der Fehler in diesem Falle

$$\tfrac{1}{4}h(\sqrt{G} + \sqrt{g})^2 - \tfrac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g) = \tfrac{1}{12}h(2\sqrt{Gg} - G - g), \text{ oder}$$
$$- \tfrac{1}{12}h(G + g - 2\sqrt{gG}).$$

Der Fehler beträgt also im zweiten Falle genau die Hälfte des Fehlers im ersten und ist demselben entgegengesetzt, d. h. das Volumen wird im zweiten Falle zu gross oder zu klein gefunden, je nachdem es im ersten zu klein oder zu gross war.

Im vorliegenden Beispiele hat man zufolge der vorstehenden Rechnung:

$G + g = 0,11842$	$0,58906 - 2$
$2\sqrt{Gg} = 0,07960$	$0,93197 - 2$
$0,03882$	$3,39794 \quad = log\, 2500$
$\frac{1}{6} h = 0,0855$	$0,91897 \quad ; num.\, log\, 0,91897 = 8,298,$

also beträgt der Fehler im ersten Falle etwa 8, im zweiten etwa 4 Kg.

Der Fehler kann in beiden Fällen der allgemeinen Aufgabe nur dann gleich Null werden, wenn

$$G + g = 2\sqrt{Gg}, \text{ oder} (\sqrt{g} - \sqrt{G})^2 = 0,$$

also wenn $G = g$ ist. Er ist um so kleiner, je weniger G und g verschieden sind und kann vernachlässigt werden, wenn er die durch die Praxis im einzelnen Falle gestattete Fehlergrenze nicht übersteigen macht.

3. Den Kubikinhalt eines geraden abgestumpften Kegels aus den Radien seiner Endflächen, $R = 54$ cm, $r = 21$ cm, und der Seitenlinie, $s = 65$ cm zu berechnen.

Man findet zunächst die Höhe des Stumpfes $h = \sqrt{s^2 - (R - r)^2}$ $= \sqrt{(s + R - r)(s - R + r)} = \sqrt{(65 + 33)(65 - 33)} = \sqrt{98 \cdot 32} = \sqrt{49 \cdot 4 \cdot 16}$ $= 7 \cdot 2 \cdot 4 = 56$ cm. Demnach ist das gesuchte Volumen

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, 56 \cdot (54^2 + 54 \cdot 21 + 21^2) = 263\,365 \text{ cbcm.}$$

Sind die gegebenen Zahlen auf ganze Centimeter abgekürzt, so sind die vier letzten Ziffern dieses Resultats als unsicher anzusehen.

5. Ausser den abgestumpften Kegeln können auch gewisse Theile eines Kegels auf elementarem Wege berechnet werden, welche zwischen zwei Ebenen liegen, deren Durchschnittslinien mit dem Kegelmantel Seitenlinien des letzteren sind, und ebenso lassen sich auch die Volumina derartiger Theile von Kegelstumpfen berechnen. Beispielsweise sei ein Theil eines Kegelstumpfs zwischen zwei Achsenschnitten desselben eingeschlossen, die einander unter einem Winkel von 36° treffen. Sind R, r, h bezüglich die Maasszahlen der Grundflächen-Radien und der Höhe, und bezeichnen G, g die Flächeninhalte der aus den Grundflächen des Stumpfs herausgeschnittenen Sectoren von 36°, so ist $G = \frac{1}{10} R^2 \pi$, $g = \frac{1}{10} r^2 \pi$, und $V = \frac{1}{3} h (G + \sqrt{Gg} + g) = \frac{1}{30} h\pi (R^2 + Rr + r^2)$.

§ 22. Das Prismatoïd.

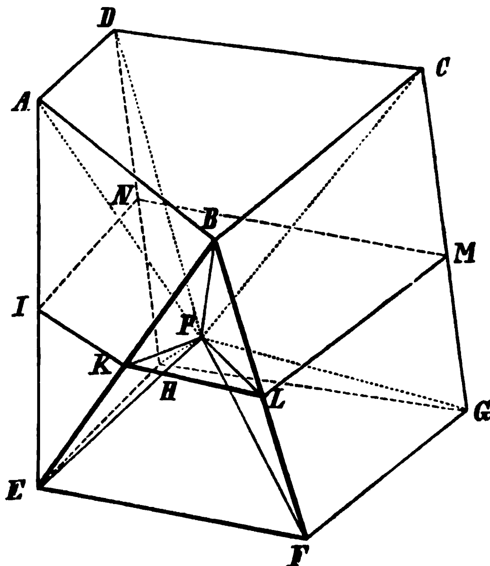
1. Die bis hierher entwickelten Sätze über Volumenberechnung lassen sich unter eine gemeinsame Form bringen, welche zugleich noch für gewisse andere Arten von Körpern gilt. Man bezeichnet mit dem Namen Prismatoïd jeden Körper, welcher von zwei geradlinigen Figuren, deren Ebenen einander parallel sind, und ausserdem von Dreiecken und Vierecken begrenzt wird, deren Eckpunkte in jenen Ebenen liegen. Die beiden parallelen Grenzebenen heissen die Grundflächen, die übrigen die Seitenflächen und der senkrechte Abstand der Grundflächen die Höhe des Prismatoïds. Jede der Grundflächen kann auf eine Kante bezw. einen Punkt reducirt sein.

Ist eine Seitenfläche eines Primatoïds vierseitig, so müssen die in den Grundflächen liegenden Seiten derselben zufolge des Parallelismus dieser Flächen einander parallel sein; jene Seitenfläche ist also im Allgemeinen ein Trapez. Ist jede Seitenfläche ein Viereck, so haben die beiden Grundflächen gleich viele Seiten, je zwei in derselben Seitenfläche liegende von diesen Grundkanten sind parallel, und die Grundflächen stimmen daher in den homologen Winkeln überein. In diesem Falle heisst das Prismatoïd ein Obelisk. Die Seitenkanten eines

solchen gehen im Allgemeinen in ihren Verlängerungen nicht durch denselben Punkt; dies findet nur statt, wenn die Verhältnisse je zweier homologen Seiten der Grundflächen dieselben Werthe haben, wenn also diese Grundflächen ähnliche Figuren sind. Nur bei dreiseitigen Flächen ist diese Aehnlichkeit bereits durch die Uebereinstimmung in den Winkeln bedingt; dreiseitige Obelisken sind daher stets abgestumpfte Pyramiden. Bei mehrseitigen Obelisken erscheint der Pyramidenstumpf nur als ein möglicher besonderer Fall. Sind die Grundflächen eines Obelisken congruent, so ist derselbe ein Prisma. Reducirt sich eine Grundfläche eines Prismatoids auf eine Strecke, so heisst dasselbe ein Keil (Sphenisk), reducirt sie sich auf einen Punkt, so wird das Prismatoid zur Pyramide. Denkt man sich endlich die Anzahlen der Seiten jeder Grundfläche bis in's Unendliche wachsend, so geht das Prismatoïd in einen von einer krummen und zwei ebenen Flächen begrenzten Körper über. Nicht jeder von einer krummen und zwei parallelen ebenen Flächen eingeschlossene Körper gehört jedoch hierher, vielmehr muss die krumme Fläche so beschaffen sein, dass sie durch Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, bei der diese stets gleichzeitig durch Punkte der Umfänge beider Grundflächen geht, so dass sie aus unzählig vielen und unendlich schmalen Flächenstreifen besteht, die man als ebene betrachten darf. Cylinder, Kegel und Kegelstumpf erscheinen hiernach ebenso wie vorher Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf in der Körperart der Prismatoïde als besondere Fälle enthalten.

2. Eine Regel für die Berechnung des Volumens eines jeden beliebigen Prismatoïds erhält man auf folgende Weise:

2. Man denke sich durch das Prismatoïd eine von den beiden Grundflächen gleich weit abstehende Ebene gelegt und in der entstehenden sogenannten mittleren Durchschnittsfigur *IKLMN* einen beliebigen Punkt *P* angenonmen, welcher mit jedem Eckpunkt des Körpers durch eine Gerade verbunden werde. Diese Geraden können dann als die Kanten einer Anzahl von Pyramiden betrachtet werden, deren gemeinschaftliche Spitze *P* ist und in welche das ganze Prismatoïd getheilt werden kann. Zwei von diesen Pyramiden haben die halbe Höhe des Prismatoïds zur Höhe und je eine der Grundflächen *ABCD*, *EFGH* zur Grundfläche. Bezeichnen wir die Flächeninhalte dieser Flächen bezüglich durch G und g, die Höhe des Prismatoïds durch h, so ist die Summe der Inhalte der beiden Pyramiden gleich $\frac{1}{3} G \cdot \frac{1}{2} h + \frac{1}{3} g \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{6} h (G + g)$. Die übrigen Pyramiden haben die Seitenflächen des Prismatoïds zu Grundflächen, und können vierseitig oder dreiseitig sein. Man braucht im Folgenden jedoch nur dreiseitige Pyramiden in Betracht zu ziehen, da jede vierseitige durch einen ebenen Schnitt, welcher



(M. 212.)

durch die Spitze P und eine Diagonale der Grundfläche geht, in zwei dreiseitige zerlegt werden kann. Ist nun EBF die Grundfläche einer solchen dreiseitigen Pyramide, so wird die letztere durch die Ebene der mittleren Durchschnittsfigur in zwei Pyramiden getheilt, welche mit der ganzen Pyramide dieselbe Höhe haben. Daher verhält sich die kleinere dreiseitige Pyramide $P\,(BKL)$ zur ganzen wie die Grundfläche BKL zur Grundfläche BEF. Da nun die mittlere Durchschnittsfläche die Kanten BE, BF bez. in K und L halbirt, so ist BEF viermal so gross als BKL und folglich auch die zu ersterer gehörige Pyramide viermal so gross als die zu letzterer gehörige. Die Pyramide $P\,(BKL)$ kann nun auch als eine solche betrachtet werden, deren Grundfläche PKL und deren Spitze B, deren Höhe also gleich $\frac{1}{2}h$ ist. Demnach ist der Inhalt dieser Pyramide gleich $\frac{1}{3}PKL \cdot \frac{1}{2}h$, und derjenige der Pyramide $P\,(BEF)$ also gleich $\frac{2}{3}PKL \cdot h$. Da sich diese Entwicklung auf jede der entsprechenden Pyramiden anwenden lässt, so folgt, dass die Summe der Kubikinhalte derselben gleich $\frac{2}{3}h\,(PKL + PLM + PMN + \ldots)$ ist. Die in der Klammer enthaltene Summe ist gleich dem Inhalt der ganzen mittleren Durchschnittsfigur M, also ist jene Pyramidensumme gleich $\frac{2}{3}hM$. Addirt man hierzu die vorher berechnete Summe der beiden ersten Pyramiden, so erhält man das Volumen des Prismatoids gleich

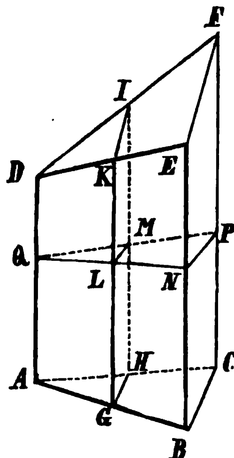
$$\tfrac{1}{6}h\,(G+g) + \tfrac{2}{3}hM, \text{ oder}$$

$$V = \tfrac{1}{3}h\left(\frac{G+g}{2} + 2M\right),$$

d. h. das Volumen eines jeden Prismatoids ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche mit ihm gleiche Höhe haben, und von denen eine das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen und jede der anderen die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoids zur Grundfläche hat.

3. Wendet man diesen Satz auf ein Prisma an, so hat man $M = g = G$, also $V = \frac{1}{3}h\;(G + 2G) = Gh$. Für eine Pyramide ist $M = \frac{1}{4}G$, $g = 0$, also $V = \frac{1}{3}h\,(\frac{1}{2}G + \frac{1}{2}G) = \frac{1}{3}Gh$, für einen Pyramidenstumpf, nach Beispiel 2 im § 21, Nr. 4, $M = \frac{1}{4}\,(G + g + 2\sqrt{Gg})$, also $V = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}(G + g + G + g + 2\sqrt{Gg}) = \frac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g)$. Ebenso erhält man für Cylinder, Kegel und Kegelstumpf aus der vorstehenden Gleichung die in den betreffenden Fällen früher entwickelten Regeln.

Beispiele: 1. Ein dreiseitiges Prisma sei durch eine der Grundfläche nicht parallele Ebene durchschnitten, so dass ein von den Flächen des prismatischen Raumes und zwei nicht parallelen Ebenen ABC, DEF begrenzter Körper entsteht. Man soll das Volumen dieses Körpers berechnen.



(M. 118.)

Da die Kante DA der Fläche $BCFE$ parallel ist, so kann man den Körper als ein Prismatoid betrachten, dessen eine Grundfläche diese Fläche $BCFE$, und dessen andere Grundfläche auf jene Kante reducirt ist. Die mittlere Durchschnittsfigur hat dann zwei parallele Seiten KG, IH, ist also im Allgemeinen ein Trapez. Es sei nun NPQ ein zu den parallelen Kanten senkrechter Schnitt und $PN = p$ die Grundlinie desselben, so ist seine Höhe h zugleich diejenige des Prismatoids. Bezeichnen nun a, b, c der Reihe nach die Maasszahlen der parallelen Kanten AD, BE, CF, so erhält man

$$G=\frac{b+c}{2}\cdot p;\ g=0,\ M=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}p,\ \text{also}$$

$$V=\frac{1}{3}h\left(\frac{b+c}{4}p+\frac{2a+b+c}{4}p\right)=\frac{1}{3}hp\cdot\frac{1}{4}(b+c+2a+b+c)$$

$$=\frac{1}{3}hp\cdot\frac{a+b+c}{2}.$$

Setzt man nun den Flächeninhalt $\frac{1}{2}hp$ des senkrechten Schnitts NPQ gleich F, so erhält man

$$V=\frac{a+b+c}{3}\cdot F,$$

d. h. das schief abgeschnittene dreiseitige Prisma ist an Rauminhalt gleich einem Prisma, dessen Grundfläche die zu den Seitenkanten senkrechte Schnittfigur, und dessen Höhe gleich dem arithmetischen Mittel der drei parallelen Kanten ist.

Man kann diesen Satz benutzen, um auch die Volumina schief abgeschnittener Prismen von mehr als drei Seiten zu berechnen, indem man diese Körper durch Schnitte in dreiseitige Prismen zerlegt.

2. Jede dreiseitige Pyramide kann als ein Prismatoid betrachtet werden, dessen beide Grundflächen auf Kanten reducirt sind. Wie lässt sich hiernach das Volumen eines Tetraëders aus zwei einander gegenüberliegenden Kanten a, b desselben und dem senkrechten Abstand c der letzteren berechnen, wenn die mittlere Durchschnittsfigur als ein Rechteck vorausgesetzt wird?

Die Seiten dieses Rechtecks sind gleich $\frac{1}{2}a$ oder $\frac{1}{2}b$, man hat also $M=\frac{1}{4}ab$, ferner $G=g=0$, $h=c$, also $V=\frac{1}{6}abc$.

3. Den Kubikinhalt eines Kastens zu berechnen, dessen Grundflächen Rechtecke mit bezüglich den Längen a, a_1 und den Breiten b, b_1 sind und dessen zu diesen Flächen senkrechte Tiefe gleich h ist. $a=1{,}145$ m, $b=0{,}875$ m, $a_1=1{,}536$ m, $b_1=0{,}910$ m, $h=0{,}234$ m.

Es ist die mittlere Durchschnittsfigur ein Rechteck mit Seiten gleich $\frac{1}{2}(a+a_1)$ und $\frac{1}{2}(b+b_1)$. Man hat nun $G=ab$, $g=a_1b_1$,
$M=\frac{1}{4}(a+a_1)(b+b_1)$, also

$$V=\frac{1}{3}h\left[\frac{ab+a_1b_1}{2}+\frac{(a+a_1)+(b+b_1)}{2}\right]=\frac{1}{6}h(ab+a_1b_1+ab+ab_1+a_1b$$

$$+a_1b_1)=\frac{1}{6}h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)\ \text{oder auch}$$

$$V=h\cdot\left[\frac{a+a_1}{2}\cdot\frac{b+b_1}{2}+\cdot\frac{1}{3}\frac{a-a_1}{2}\cdot\frac{b-b_1}{2}\right].$$

$a+a_1=$	2,681	$\log 1{,}3405=0{,}12727$	
$b+b_1=$	1,785	$\log 0{,}8925=0{,}95061-1$	
$a-a_1=$	$-0{,}391$	$0{,}07778=\log 1{,}1961$	
$b-b_1=$	$-0{,}035$	$\log 0{,}1955=0{,}29115-1$	0,0011
		$\log 0{,}0175=0{,}24304-2$	1,1972
		$0{,}53419-3$	0,07816
		$0{,}47712$	$0{,}36922-1=\log h$
		$0{,}05707-3$	$0{,}44738-1=\log V$; $V=0{,}2801$ bm

§ 23. Rauminhalte von beliebigen Polyedern und von Kugeln.

1. Zur Berechnung der Volumina beliebiger Polyeder kann man dieselben in Pyramiden zerlegen, beispielsweise durch Annahme eines Punktes im Innern

als Spitze von Pyramiden, deren Grundflächen die einzelnen Grenzflächen des Polyeders sind, oder durch Diagonalschnitte u. dgl. m. Auch können, wo es thunlich und bequem erscheint, selbstverständlich statt einzelner Pyramiden oder statt aller auch Prismen, Pyramidenstumpfe und überhaupt Prismatoide benutzt werden.

Dieses Verfahren lässt sich auch zur näherungsweisen Bestimmung der Kubikinhalte krummflächiger Körper anwenden, indem man dieselben als ebenflächige behandelt, deren Grenzflächen hinreichend klein angenommen sind, so dass der durch Vertauschung derselben mit den zugehörigen Theilen der krummen Oberfläche begangene Fehler die im einzelnen praktischen Fall erlaubte Fehlergrenze nicht übersteigt.

2. Für die Berechnung des Volumens einer Kugel führt ein entsprechendes Verfahren zu einer vollkommen genauen Formel. Denkt man sich nämlich den Mittelpunkt der Kugel als gemeinsame Spitze von Pyramiden, deren Grundflächen die Kugel berühren, also Grenzflächen eines umbeschriebenen Polyeders sind, so sind die Höhen aller dieser Pyramiden gleich dem Kugelradius r, und wenn $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die Inhalte der Grenzflächen, O die gesammte Oberfläche des Polyeders bedeutet, so ist der Kubikinhalt des letzteren gleich

$$\tfrac{1}{3} r \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots) = \tfrac{1}{3} O r \cdot \qquad (1)$$

Diese Formel ist gültig ohne Rücksicht auf die Anzahl der Grenzflächen des Polyeders. Denkt man sich nun diese Anzahl unendlich gross werdend, indem die einzelnen Grenzflächen bis zum Verschwinden abnehmen, so geht das Polyeder in die einbeschriebene Kugel über. Es muss also auch für diese der Satz gelten, dass ihr Kubikinhalt gleich dem dritten Theile des Produkts aus ihrer Oberfläche und ihrem Radius ist. Setzt man noch für die Oberfläche den früher berechneten Werth $O = 4 r^2 \pi$, so erhält man für das Volumen die Formel

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \qquad (2)$$

Beispiele: 1. Eine Büchsenkugel habe einen Durchmesser gleich 6,4 cm. Wie viel wiegt dieselbe, wenn das specifische Gewicht des Bleis 11,33 ist?

Man erhält $P = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{6,4}{2}\right)^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{1000} \cdot 11,33 = \frac{1}{6} \cdot 0,64^3 \pi \cdot 11,33 = 1,555$ Kgr.

2. Um die Wandstärke einer hohlen eisernen Kugel zu bestimmen, wurde dieselbe in Wasser geworfen, und man fand, dass sie gerade zur Hälfte in demselben einsank. Der äussere Durchmesser der Kugel wurde gleich 2 dc gemessen; das specifische Gewicht des Eisens war 7,4. Wie gross ergiebt sich hieraus die Wandstärke der Kugel, wenn das Gewicht der eingeschlossenen Luft nicht berücksichtigt wird?

Ist die Wand der Halbkugel $x\,dc$ dick, so ist das Volumen derselben gleich $\frac{2}{3}\pi\,(r^3 - (r-x)^3) = \frac{2}{3}\pi\,(3r^2x - 3rx^2 + x^3)$, also für $r = 1$, $V = \frac{2}{3}\pi\,(3x - 3x^2 + x^3)$, und mithin das Gewicht derselben gleich 7,4 V Kg. Dieses Gewicht ist gleich demjenigen einer Halbkugel aus Wasser, deren Radius $r = 1$ ist, mithin gleich $\frac{2}{3}\pi$ Kg. Hieraus folgt die Gleichung

$$7,4 \cdot 2 \cdot (3x - 3x^2 + x^3) = 1, \text{ oder besser: } 7,4 \cdot 2\,[1 - (1-x)^3] = 1,$$

woraus $1 - (1-x)^3 = \frac{1}{14,8}$; $(1-x)^3 = 1 - \frac{1}{14,8} = \frac{138}{148}$, also

$$1 - x = \sqrt[3]{\frac{138}{148}} = 0,97695, \quad x = 1 - 0,97695 = 0,02305 \text{ dc},$$

oder ungefähr 2,3 Millimeter folgt.

3. Wie viele Kugeln, deren Durchmesser 1,6 cm betragen, können aus 64 Kg Blei gegossen werden, dessen specifisches Gewicht 11,39 ist?

Man erhält die Gleichung $\frac{4}{3} r^3 \pi \cdot x \cdot 11{,}39 = 64$, wo $r = \frac{1}{2} \cdot 0{,}16$ dc $= 0{,}08$ dc ist. Also ist $x = \frac{3 \cdot 64}{4 \cdot 0{,}08^3 \cdot 11{,}39 \cdot \pi} = 2620$.

4 Eine Kugel, deren Kubikinhalt gleich V gegeben ist, soll in einen geraden Kegel verwandelt werden, dessen Grundfläche gleich einem grössten Kreise der Kugel ist. Wie lang wird die Seitenlinie dieses Kegels?

Ist r der Radius der Kugel, s die Seitenlinie des Kegels, so ist

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}, \text{ also}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}};\ 4r = \sqrt{s^2 - r^2};\ 16r^2 = s^2 - r^2;\ s^2 = 17r^2,$$

$$s = r\sqrt{17} = \sqrt{17} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

3. Das Volumen eines Kugelausschnitts, d. h. eines solchen Theiles einer Kugel, welcher durch Rotation eines Sectors um einen der ihn begrenzenden Radien entstanden gedacht werden kann, lässt sich in derselben Weise wie das Volumen der ganzen Kugel als Grenzwerth einer Summe von Pyramiden betrachten, deren gemeinschaftliche Spitze der Kugelmittelpunkt ist und deren Höhen sämmtlich gleich dem Kugelradius sind. Hieraus folgt in ähnlicher Weise wie bei der ganzen Kugel, dass das Volumen eines Kugelausschnitts gleich dem dritten Theile des Produkts aus dem Radius der Kugel und dem auf der Kugelfläche liegenden Theil der Oberfläche des Ausschnitts, d. h. dem Flächeninhalt der zu letzterem gehörigen Calotte ist. Ist demnach wieder der Kugelradius gleich r, und ist die Höhe dieser Calotte gleich h, so ist das Volumen des Kugelausschnitts gleich $\frac{1}{3} r \cdot 2r\pi h$ oder

$$V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h. \qquad (3)$$

4. Um ferner den Rauminhalt eines Kugelsegments, d. h. eines durch eine Schnittebene abgeschnittenen Theiles der Kugel zu berechnen, kann man dasselbe, wenn seine Höhe (d. i. zugleich die Höhe der es begrenzenden Calotte) kleiner als der Kugelradius ist, als Differenz eines Kugelausschnitts und eines Kegels betrachten. Ist dagegen die Höhe des Segments grösser als der Radius der Kugel, so ist dasselbe gleich der Summe eines Kugelausschnitts und des zugehörigen Kegels. Hiernach erhält man bei derselben Bezeichnungsweise wie vorher, wenn ausserdem ρ den Radius der Grundfläche und p die Höhe des Kegels bedeutet,

$$V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h \mp \tfrac{1}{3} \rho^2 \pi p.$$

Nun ist $\rho^2 = r^2 - p^2, p = r - h$, bezw. $h - r$, also

$$V = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h - \tfrac{1}{3}\pi(r^2 - (r-h)^2)(r-h) = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h - \tfrac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(r-h)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h[2r^2 - (2r-h)(r-h)] = \tfrac{1}{3}\pi h[2r^2 - 2r^2 + 2rh + rh - h^2]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h(3rh - h^2), \text{ oder}$$

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h). \qquad (4)$$

5. Um ferner den Rauminhalt einer körperlichen Zone, d. h. eines von einer Zone und den zugehörigen einander parallelen Schnittebenen der Kugel begrenzten Theiles der letzteren zu berechnen, kann man dieselbe als Differenz zweier Kugelsegmente betrachten. Sind h_1, h_2 die Höhen dieser Segmente, ist ferner h die Höhe der Zone und p der Abstand der grösseren Grundfläche vom Mittelpunkt, so ist, je nachdem der Mittelpunkt der Kugel ausserhalb oder innerhalb der körperlichen Zone liegt, die Höhe h_1 des kleineren Segments gleich $r - h - p$ oder gleich $r + p - h$, und entsprechend die Höhe h_2 des grösseren

Segments gleich $r-p$ oder gleich $r+p$. Demnach ist der Rauminhalt des kleineren Segments gleich

$$\tfrac{1}{3}\pi(r-h\mp p)^2(3r-r+h\pm p)=\tfrac{1}{3}\pi(r-h\mp p)^2(2r+h\pm p),$$

und der des grösseren Segments gleich

$$\tfrac{1}{3}\pi(r\mp p)^2(3r-r\pm p)=\tfrac{1}{3}\pi(r\mp p)^2(2r\pm p),$$

also die Differenz derselben gleich

$$\tfrac{1}{3}\pi(r\mp p)^2(2r\pm p)-\tfrac{1}{3}\pi(r\mp p)^2(2r\pm p)-\tfrac{1}{3}\pi(r\mp p)^2h+\tfrac{2}{3}\pi(r\mp p)h(2r+h\pm p)$$
$$-\tfrac{1}{3}\pi h^2(2r+h\pm p)$$
$$=\tfrac{1}{3}\pi h[4r^2\mp 4rp+2rh\mp 2hp\pm 2rp-2p^2-r^2\pm 2rp-p^2-2rh-h^2\mp hp),$$

$$\text{d. i. } V=\tfrac{1}{3}\pi h[3r^2-3p^2-h^2\mp 3hp]. \qquad (5^a)$$

Diese Formel gilt auch, wenn beide Schnittkreise gleich gross sind. In diesem Fall ist das untere Vorzeichen zu wählen und $h=2p$ zu setzen, so dass man $V=\frac{2}{3}\pi p(3r^2-p^2)$ erhält. Geht dagegen eine der Schnittebenen durch den Mittelpunkt, so ist $p=0$ und also $V=\frac{1}{3}\pi h(3r^2-h^2)$. Man sieht leicht ein, wie die erstere Formel auch aus dieser letzteren abgeleitet werden kann. Reducirt sich ferner eine Schnittfläche auf einen Punkt, so ist $p=\pm(r-h)$ zu setzen, also $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$. Die Formel für das Kugelsegment ist also in der für die körperliche Zone als besonderer Fall enthalten.

Soll das Volumen einer körperlichen Zone mittelst ihrer Höhe h und der Radien ρ_1, ρ_2 ihrer Grundkreise berechnet werden, so hat man r und p mit Hülfe der Gleichungen

$$\rho_1+p^2=r^2\ ;\ \rho_2{}^2+(h\pm p)^2=r^2$$

durch ρ_1, ρ_2 und h auszudrücken und die gefundenen Ausdrücke in die obige Gleichung für V einzusetzen. Am kürzesten setzt man zunächst oben $3r^2-3p^2=3(r^2-p^2)=3\rho_1{}^2$, ermittelt dann aus $\rho_1{}^2+p^2=\rho_2{}^2+(h\pm p)^2$,

$$\mp hp=\frac{\rho_2{}^2-\rho_1{}^2+h^2}{2},$$

und erhält

$$V=\tfrac{1}{3}\pi h[3\rho_1{}^2-h^2+\tfrac{3}{2}(\rho_2{}^2-\rho_1{}^2+h^2)]=\frac{\pi h}{2}(2\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-\rho_1{}^2+h-\tfrac{2}{3}h^2),$$

$$V=\tfrac{1}{2}\pi h(\rho_1{}^2+\rho_2{}^2)+\tfrac{1}{6}\pi h^3, \quad (5^b)$$

welche Formel für beide Fälle in gleicher Weise gilt und für ein Kugelsegment, d. h. für $\rho_2=0$, in

$$V=\tfrac{1}{2}\pi h\rho^2+\tfrac{1}{6}\pi h^3$$

übergeht.

Beispiele: 1. Man soll den Kubikinhalt eines Kugelausschnitts aus dem Umfang p der ebenen Grundfläche des zugehörigen Segments und dem Umfang P eines grössten Kreises der Kugel berechnen.

Es ist $2\rho\pi=p$ und $2r\pi=P$, also $\rho=\frac{p}{2\pi}$, $r=\frac{P}{2\pi}$, ferner $h=r\mp\sqrt{r^2-\rho^2}$,

$$\text{also } V=\tfrac{2}{3}\pi\cdot\frac{P^2}{4\pi^2}\left(\frac{P}{2\pi}\mp\sqrt{\frac{P^2}{4\pi^2}-\frac{p^2}{4\pi^2}}\right)=\frac{P^2}{12\pi^2}(P\mp\sqrt{P^2-p^2}).$$

2. Eine hölzerne Kugel von a Meter Durchmesser sinkt in destillirtem Wasser von 4° so weit ein, dass der hervorragende Theil die Höhe h Meter hat. Man soll das specifische Gewicht der betreffenden Holzart berechnen. $a=1$, $h=0{,}2$

Ist x das gesuchte specifische Gewicht, so ist das Gewicht der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi\cdot 1000\,x$ Kg, das Volumen des verdrängten Wassers, d. i. das Volu-

men eines Kugelsegments für den Radius $\frac{1}{2}a$ und die Höhe $a - h$ gleich $\frac{1}{3}\pi (a - h)^2 (\frac{3}{2}a - a + h) = \frac{1}{3}\pi (a - h)^2 (\frac{1}{2}a + h)$ cbm, also das Gewicht dieses Wassers gleich $\frac{1}{3}\pi (a - h)^2 (\frac{1}{2}a - h)$. 1000 Kg. Es besteht also die Gleichung

$$4 \cdot \frac{a^3}{8}\, x = (a-h) 2\, \frac{a + 2h}{2}, \text{ d. i. } a^3 x = (a-h)^2 (a + 2h),$$

$$x = \frac{(a-h)^2 (a + 2h)}{a^3},$$

oder für das Zahlenbeispiel:

$$x = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}4}{1} = 0{,}896.$$

3. Aus einer Kugel vom Radius r soll eine körperliche Zone herausgeschnitten werden, deren Höhe gleich $\frac{1}{2}r$, und deren Volumen gleich $\frac{11}{32}$ des Volumens der Kugel sei. Welche Abstände müssen die Endflächen derselben vom Mittelpunkt der Kugel haben?

Das Volumen der körperlichen Zone, d. i. für $h = \frac{1}{2}r$,

$$\tfrac{1}{6}\pi r (3r^2 - 3p^2 - \tfrac{1}{4}r^2 \mp \tfrac{3}{2}rp),$$

soll gleich $\frac{11}{32} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$ sein. Man hat somit für die Unbekannte p die Gleichung

$$\tfrac{11}{4}r^2 - 3p^2 \mp \tfrac{3}{2}rp = \tfrac{11}{4}r^2, \text{ oder } p^2 \pm \tfrac{1}{2}rp = 0$$

Hieraus ergiebt sich $p = 0$ oder $p = \mp \frac{1}{2}r$.

Für $p = 0$ ist der Abstand der kleineren Endfläche vom Mittelpunkt gleich der Höhe des Segments, also gleich $\frac{1}{2}r$; der andere Werth $p = \mp \frac{1}{2}r$ zeigt, dass das untere Vorzeichen in den Formeln zu wählen, demnach der Abstand der anderen Endfläche vom Mittelpunkt gleich $h - p$, d. i. gleich $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r = 0$ zu nehmen ist. Beide Auflösungen ergeben also dasselbe Resultat.

6. Das Volumen eines von der Fläche eines sphärischen Zweiecks und den Ebenen der zugehörigen grössten Halbkreise begrenzten Körpers lässt sich in derselben Weise, wie das Volumen der ganzen Kugel und das eines Kugelausschnitts als Summe unendlich vieler Pyramiden betrachten, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt ist, deren Höhen sämmtlich gleich dem Radius der Kugel, und deren Grundflächen zusammen gleich der Fläche des Zweiecks sind. Es ist somit das Volumen eines solchen Körpers ebenfalls gleich dem dritten Theile des Produkts aus seiner krummen Oberfläche und dem Kugelradius.

Ganz dasselbe Verfahren und somit auch derselbe Satz gilt für das Volumen eines durch die Fläche eines sphärischen Dreiecks und die Ebenen der zugehörigen Ecke begrenzten Körpers, und ebenso für solche Körper, die von der Fläche eines sphärischen Polygons und den Ebenen der zugehörigen Ecke begrenzt werden. Noch allgemeiner gilt der Satz für jeden Körper, welcher aus einer Kugel durch eine Fläche oder ein System von Flächen herausgeschnitten wird, wenn letzteres durch die Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, die bei dieser Bewegung beständig durch den Mittelpunkt der Kugel und nach einander durch alle Punkte des Umfangs irgend eines ringsum begrenzten Theiles der Kugelfläche geht.

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen erhält man hiernach für den zu einem sphärischen Zweieck gehörigen Körper die Formel

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\alpha r^2 \pi}{90^\circ} \cdot r = \tfrac{1}{3}\, \frac{\alpha r^3 \cdot \pi}{90^\circ}, \quad (6a)$$

welche auch mittelst des Satzes gefunden werden kann, dass sich das Volumen eines solchen Körpers zu dem Volumen der ganzen Kugel verhalten muss, wie der Centriwinkel α zu 360 Grad.

Für den zu einem sphärischen Dreieck gehörigen Körper ergiebt sich

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\pi}{180^\circ} = \frac{r^3 e}{3} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Man kann diese Formel auch mittelst der vorhergehenden in ähnlicher Weise finden wie diejenige für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks aus der für den Flächeninhalt des Zweiecks gefunden wurde.

Allgemein ist für den zu einem sphärischen Polygon gehörigen Körper

$$V = \frac{r^3 e}{3} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}, \quad (6b)$$

wo e den sphärischen Excess des Polygons bedeutet.

Trigonometrie.

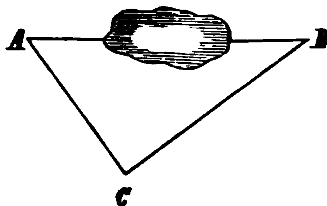
Bearbeitet von

Dr. F. Reidt

in Hamm.

Einleitung.

In der Planimetrie wird gezeigt, dass ein Dreieck durch drei, und überhaupt ein ebenes n-Eck durch $2n-3$ seiner Stücke (Seiten und Winkel), falls sich unter denselben mindestens eine Seite befindet, der Gestalt und Grösse nach im Allgemeinen bestimmt ist, so dass also eine solche Figur aus jenen gegebenen Stücken jederzeit construirt werden kann. Durch diese Construction werden dann auch die drei nicht gegebenen Stücke ihrer Grösse nach ermittelt.



(M. 114.)

So kann z. B. eine wegen eines Hindernisses nicht direkt messbare Entfernung zweier Punkte A, B, dadurch gefunden werden, dass man von irgend einem dritten Punkte C aus die Strecken CA, CB, sowie den Winkel ACB bestimmt, dann aus diesen drei Stücken ein dem Dreieck ABC congruentes Dreieck zeichnet, und in diesem die der Seite AB homologe Seite statt der gesuchten nimmt.

Diese Methode der Ermittelung unbekannter Längen und Winkel liefert jedoch in der praktischen Ausführung selten Resultate, welche auf hinreichende Genauigkeit Anspruch machen können, denn dieselben sind von verschiedenen unvermeidlichen Fehlerquellen abhängig, wie z. B. der Grenze des Sehvermögens, der Unmöglichkeit, wirkliche Linien und Punkte (ohne Dicke) zu zeichnen, der Unvollkommenheit der zum Construiren gebrauchten Instrumente, u. dgl. m. Die Ungenauigkeit und Unbequemlichkeit dieser Methode erhöht sich, wenn die gegebenen Stücke nicht durch Zeichnung zu unmittelbarer Verwendung in der Construction, sondern durch Maasszahlen gegeben sind, so dass die Linien vorher durch Abtragung mittelst eines Maasstabes, die Winkel durch Anwendung eines mechanisch getheilten Kreises gezeichnet werden müssen, sowie wenn in gleicher Weise die gesuchten Grössen nach ihrer Construction noch mittelst Messung in Zahlen ausgedrückt werden sollen. In den seltensten Fällen wird es zudem thunlich sein, die betreffende Figur in ihrer wirklichen Grösse zu construiren, sondern man wird in der Zeichnung einen verkleinerten Maasstab für die Linien

anzuwenden haben, also nicht eine der gegebenen Figur congruente, sondern vielmehr eine ihr ähnliche construiren müssen. Die gesuchten Längen werden dann in demselben Verhältniss verkleinert gefunden, und bei der Zurückführung derselben auf ihre natürliche Grösse multipliciren sich auch die bei der Zeichnung gemachten unvermeidlichen Fehler mit demselben Faktor wie die Strecken selbst.

Es ist daher wünschenswerth, eine Methode zu finden, mittelst welcher man die Zahlenwerthe der gesuchten Stücke aus denen der gegebenen ohne Vermittlung einer Zeichnung, also durch blosse Rechnung finden kann, so dass man von jenen Fehlerquellen, die nöthige Genauigkeit der gegebenen, bezw. gemessenen Stücke vorausgesetzt, völlig befreit bleibe.

Derartige Rechnungen sind bereits vereinzelt in der Planimetrie vorgekommen. So lässt sich z. B. aus zwei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks der dritte mittelst der bekannten Winkelsumme, aus zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks die dritte mittelst der Formel des pythagoreischen Lehrsatzes berechnen. Es ist jedoch mit den Hülfsmitteln der Planimetrie allein nicht thunlich, solche Rechnungen auszuführen, wenn in denselben Strecken und Winkel nebeneinander vorkommen, da jene in Längenmaass, diese dagegen in Gradmaass ausgedrückt, beide mithin auf verschiedenartige Einheiten bezogen wurden, welche nicht in unmittelbare Verbindung mit einander durch Rechnung treten können. Es ist die — in der vorliegenden Schrift hauptsächlich in's Auge gefasste — nächste praktische Aufgabe der Trigonometrie, diese Schwierigkeit zu beseitigen. Dieselbe hat mithin zunächst zu zeigen, in welcher für jenen Zweck geeigneten Weise Winkel und Strecken mittelst derselben Einheit bestimmt werden können, und sodann die Anwendungen auf die Berechnung gesuchter Stücke von Figuren zu lehren.

I. Abschnitt.

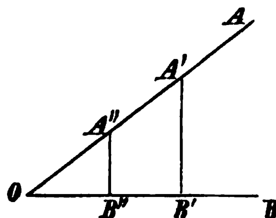
G o n i o m e t r i e.

Kapitel 1.

Die Bestimmung der Winkel.

§ 1. Die trigonometrischen Functionen spitzer Winkel.

Es sei zunächst $\angle AOB = \alpha$ ein beliebiger spitzer Winkel, und von verschiedenen Punkten A', A'' ... des einen seiner Schenkel seien die Senkrechten $A'B'$, $A''B''$, .. auf den anderen gefällt, so sind die Dreiecke $A'B'O$, $A''B''O$, ... da sie in den Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich, und es haben daher die Seitenverhältnisse $\frac{A'B'}{A'O}$, $\frac{A''B''}{A''O}$, .. sämmtlich denselben Werth. Dieser Werth ist auch für alle Winkel, welche dem Winkel AOB gleich sind, derselbe; dagegen ändert er sich, wenn die Grösse des Winkels eine andere wird. Ist nämlich für irgend einen zweiten Winkel β der Werth des genannten Verhältnisses derselbe, so folgt aus der Gleichheit der Verhältnisse und der rechten Winkel die Aehnlichkeit der ent-



(M. 115.)

sprechenden Dreiecke und somit auch die Gleichheit der homologen Winkel α und β.

Der Winkel α und jenes Seitenverhältniss stehen demnach in einem solchen Zusammenhang, dass der Werth jedes derselben durch den des anderen bestimmt ist, und man kann daher in die Rechnungen statt der Winkel die Werthe jener Seitenverhältnisse als Stellvertreter einführen.

Das Gleiche gilt von jedem anderen Verhältniss zwischen zwei Seiten eines den Winkel α enthaltenden rechtwinkeligen Dreiecks. Man nennt diese verschiedenen Verhältnisse die trigonometrischen oder auch goniometrischen Functionen des Winkels, und zwar insbesondere das Verhältniss

der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse den Sinus,

der ihm anliegenden Kathete zur Hypotenuse den Cosinus,

der ihm gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden die Tangente *(tangens)*,

der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden die Cotangente *(cotangens)*,

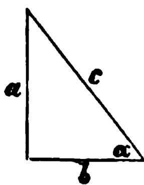
der Hypotenuse zur anliegenden Kathete die Secante *(secans)*,

der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete die Cosecante *(cosecans)* des Winkels α.

Bezeichnet man im rechtwinkeligen Dreieck die Maasszahl der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete durch a, die der anliegenden Kathete durch b und die der Hypotenuse durch c, so ist indem wir zugleich die üblichen Abkürzungen in der Schreibweise der Namen der trigonometrischen Functionen benutzen,

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\frac{b}{a} = \cot\alpha, \quad \frac{c}{b} = \sec\alpha, \quad \frac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha.$$



(M. 116.)

Diese Functionen sind als Werthe von Verhältnissen nach dem Vorigen unbenannte Zahlen. Zu jedem bestimmten spitzen Winkel gehören sechs bestimmte solche Zahlen; die letzteren ändern sich, sowie der Winkel sich ändert.

Sind z. B. die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks bezüglich gleich 3 cm und 4 cm, die Hypotenuse also zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes gleich 5 cm und verdoppelt man unter Beibehaltung des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels irgend eine der Seiten des Dreiecks, so erhält man ein neues rechtwinkeliges Dreieck, in welchem auch jede der beiden anderen Seiten doppelt so lang als die homologe des ursprünglichen sein muss. Zeichnet man ebenso ein drittes rechtwinkeliges Dreieck mit dem Winkel α, dessen diesem Winkel gegenüberliegende Kathete 1 cm lang ist, so wird die anliegende Kathete eine Länge von $\frac{4}{3}$ cm, die Hypotenuse eine solche von $\frac{5}{3}$ cm erhalten. Allgemein müssen, wie auch die absoluten Längen der Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks verändert werden, bei unveränderter Grösse des Winkels α in Folge der Aehnlichkeit der verschiedenen Dreiecke die Verhältnisse der Seiten dieselben bleiben. Man hat also im vorliegenden Beispiel in allen Fällen

$$\sin\alpha = \tfrac{3}{5}, \ \cos\alpha = \tfrac{4}{5}, \ \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{3}{4}, \ \cot\alpha = \tfrac{4}{3}, \ \sec\alpha = \tfrac{5}{4}, \ \operatorname{cosec}\alpha = \tfrac{5}{3}.$$

§ 2. Beziehungen zwischen den Functionen desselben Winkels.

1. Diese sechs Functionen eines und desselben Winkels α sind aber nicht von einander unabhängig. Zunächst sieht man leicht, dass drei von ihnen die Umkehrungen, d. h. die reciproken Werthe je einer der drei anderen sind. Dem arithmetischen Gesetz 1: $\frac{a}{c} = \frac{c}{a}$ zufolge drücken wir diese Abhängigkeit, z. B. der Cosecante von dem Sinus, durch die Gleichung

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

aus. Da man mit demselben Rechte dieselbe Beziehung zwischen den beiden Functionen durch $\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha$ darstellen kann, so ziehen wir vor, beide Formen gleichsam zu verschmelzen in der folgenden

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1.$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot \sec\alpha &= 1 \qquad (1) \\ \operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\alpha &= 1 \end{aligned}$$

Aus dem Gesetze $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ ergiebt sich ferner

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha, \text{ oder } \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha. \qquad (2)$$

Endlich besteht zwischen den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, aus welcher durch Division jedes Gliedes mit c^2

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ oder } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ d. i. die Formel}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (3)$$

und in ähnlicher Weise durch Division mit b^2 oder a^2,

$$\operatorname{tang}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha;\ 1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

folgt.

Die Schreibweise $\sin^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$ u. s. w. wird in manchen Schriften durch $\sin\alpha^2$ ersetzt.

2. Die vorstehenden Formeln gestatten aus jeder gegebenen Function eines Winkels jede andere Function desselben Winkels zu berechnen. Ist z. B. $\sin\alpha$ gegeben, so findet man aus (3)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

darauf $\operatorname{tang}\alpha$ aus (2) und die übrigen Functionen durch die reciproken Werthe aus (1). Ist $\operatorname{tang}\alpha$ gegeben, so findet man zunächst durch Auflösen der Gleichungen (2) und (3) auf die beiden Unbekannten $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die Werthe der letzteren, und hat dann noch (1) zu benutzen. Oder man berechnet zuerst $\sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha}$, hieraus $\cos\alpha$, dann aus (2) $\sin\alpha$ mittelst $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha$, u. s. w.

Einfacher noch gestaltet sich das Verfahren, wenn man α als Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks annimmt, dessen Seiten man einzeln ausdrückt. Nimmt man z. B. der Kürze halber die dem Nenner der gegebenen Function entsprechende Seite gleich 1 an, setzt also die dem Zähler entsprechende gleich der Function und berechnet dann die dritte Seite mittelst des pythagoreischen Lehrsatzes, so ergeben sich die gesuchten Functionen unmittelbar aus ihren obigen Erklärungen.

Es sei z. B. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ gegeben, so setze man die Hypotenuse des betreffenden rechtwinkeligen Dreiecks gleich 13, also die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete gleich 12. Aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgt dann, dass die anliegende Kathete gleich $\sqrt{169 - 144} = 5$ ist, und somit sind die übrigen Functionen von α,

$$\cos\alpha = \tfrac{5}{13},\ \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{12}{5},\ \cot\alpha = \tfrac{5}{12},\ \sec\alpha = \tfrac{13}{5},\ \operatorname{cosec}\alpha = \tfrac{13}{12}.$$

Ist dagegen beispielsweise $\cot\gamma = 0{,}8$ gegeben, so kann man die dem Winkel γ gegenüberliegende Kathete gleich 10, die ihm anliegende also gleich 8 setzen und erhält dann für die Hypotenuse die Maasszahl $\sqrt{100 + 64} = 12{,}806\ldots$ woraus $\sin\alpha = \frac{10}{12{,}806} = 0{,}780\ldots$ u. s. w. folgt.

Sollen jedoch nicht die bestimmten Werthe der Functionen für einen einzelnen Fall berechnet, sondern die allgemeinen Formeln, etwa behufs Substitution der betreffenden Ausdrücke in eine Gleichung, ermittelt werden, so wende man das vorher angegebene Verfahren an. Von den durch dasselbe abzuleitenden Gleichungen mögen noch die folgenden für den etwaigen späteren Gebrauch angeführt werden:

$$sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha}; \quad tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}} = \frac{\sqrt{1 - cos^2\,\alpha}}{cos\,\alpha};$$

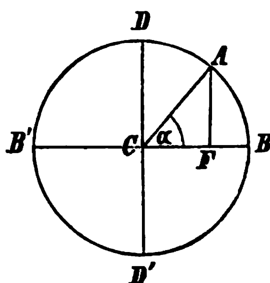
$$sin\,\alpha = \frac{tang\,\alpha}{\sqrt{1 + tang^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2\,\alpha}}; \quad cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tang^2\,\alpha}} = \frac{cot\,\alpha}{\sqrt{1 + cot^2\,\alpha}}$$

Dass sich jede Function eines Winkels durch jede andere Function desselben ausdrücken lasse, war übrigens von vorn herein zu erwarten, da durch jede einzelne Function der Winkel selbst, und durch diesen auch die anderen Functionen bestimmt sein müssen.

3. Eine andere naheliegende Beziehung zwischen den trigonometrischen Functionen ergiebt sich daraus, dass für den zweiten spitzen Winkel β desselben rechtwinkeligen Dreiecks den obigen Erklärungen zufolge $sin\,\beta = \frac{b}{c}$, also $sin\,\beta = cos\,\alpha$, und entsprechend $cos\,\beta = sin\,\alpha$, $tang\,\beta = cot\,\alpha$, u. s. w. ist. Da β zu dem Winkel α Complementwinkel ist (ihn zu 90° ergänzt), so erklärt sich hieraus die Benennung *cosinus* als Abkürzung von *complementi sinus*, und ähnlich die Namen der übrigen sog. »Cofunctionen«.

§ 3. Erweiterter Begriff des Sinus und Cosinus.

1. Die vorstehend erörterte Methode der Bestimmung eines Winkels durch Linien-Verhältnisse bezog sich ihrer Natur nach nur auf spitze Winkel und ist daher für einen allgemeineren Gebrauch zu eng. Indem wir nun dazu übergehen, diesen Mangel zu beseitigen, wollen wir uns zunächst um den Scheitel des zu bestimmenden Winkels einen Kreis beschrieben denken, dessen Radius wir der Einfachheit halber gleich 1 setzen. Wir denken uns ferner diesen Kreis durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser in vier Quadranten getheilt und den zu bestimmenden Centriwinkel $BCA = \alpha$ durch Drehung des Schenkels CA nach einer bestimmten Seite des anderen Schenkels CB entstanden. Der Radius CB sei zugleich der Anfangs-Radius für die vorher angegebene Theilung des Kreises in vier Quadranten. Indem CB als festliegend, CA als beweglich gedacht wird, kann der Winkel α als stetig alle möglichen Werthe von 0° bis 360° durchlaufend, ja durch weitere Drehung noch über vier Rechte hinaus wachsend gedacht werden. Der Durchmesser BB', welcher den festen Schenkel CB enthält, möge der erste, der zu ihm senkrechte DD' der zweite Durchmesser genannt werden.

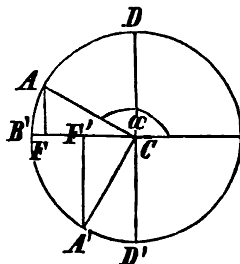


(M. 117.)

Fällt man vom Endpunkt A des beweglichen Schenkels die Senkrechte AF auf den ersten Durchmesser, so ist durch den Winkel α die Länge dieser projicirenden Linie AF, sowie die der Projection CF des beweglichen Radius bestimmt. Die Maasszahl von AF heisse nun in allen Fällen der Sinus, die Maasszahl von CF der Cosinus des Winkels α. Diese Erklärungen sind für spitze Winkel mit den entsprechenden früheren durchaus identisch, denn da der Radius AC gleich der Einheit gesetzt ist, so ist die Maasszahl von AF oder CF nichts anderes als

der Werth des Verhältnisses dieser Linie zu AC, also für einen spitzen Winkel α zur Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks AFC. Die neueren Erklärungen lassen sich aber auch unmittelbar auf jeden beliebigen nicht spitzen Winkel anwenden und bieten ausserdem den Vortheil einer anschaulichen Darstellung der Grösse des Sinus oder Cosinus durch die Länge der zugehörigen Sinuslinie AF oder der Cosinuslinie CF.

2. Um die vorstehenden Erklärungen für die einzelnen Fälle näher zu entwickeln, denken wir uns den Schenkel CA von der Lage CB aus durch Drehung um C continuirlich alle möglichen Lagen durchlaufend, und in jeder Lage die zugehörige Sinuslinie construirt. Es ergiebt sich dann ohne Weiteres: Der Sinus des Nullwinkels ist gleich Null. Innerhalb des ersten Quadranten, also für spitze Winkel, wächst der Sinus mit dem wachsenden Winkel, jedoch nicht in gleichem Verhältniss wie dieser; bei gleichmässiger Zunahme des Winkels wächst der Sinus am raschesten in der Nähe des Nullwinkels, am langsamsten in der Nähe des Rechten. Dabei bleibt die Sinuslinie stets kleiner als der Radius, und erst für $\alpha = 90^\circ$ fällt dieselbe mit DC zusammen; es ist also $\sin 90^\circ = 1$ Tritt nun der bewegliche Schenkel in den zweiten Quadranten, wird also der Winkel stumpf, so nimmt der Sinus bei wachsendem Winkel wieder continuirlich ab, und zwar erhält er in umgekehrter Reihenfolge nach einander dieselben Werthe, wie im ersten Quadranten; für 180° wird er gleich Null. Tritt bei fortgesetzter Drehung der bewegliche Schenkel in den dritten Quadranten, so nimmt die Sinuslinie eine Lage $A'F$ an, welche den bisherigen Lagen entgegengesetzt ist, und wir dürfen daher die obige Erklärung dahin ergänzen, dass der Sinus in diesem Falle als **negativ** gelten solle. Derselbe nimmt also noch unter Null ab, sein absoluter Werth wächst aber wieder in gleicher Weise wie im ersten Quadranten bis zu $\sin 270^\circ = -1$. Tritt nun der bewegliche Schenkel in den vierten Quadranten, so bleibt der Sinus negativ, nimmt aber wieder zu, d. h. sein absoluter Werth nimmt ab, bis er für den Winkel von 360° wieder gleich Null wird.



(M. 118.)

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass die Werthe der Sinus stets zwischen den Grenzwerthen + 1 und — 1 liegen, sowie dass die absoluten Werthe derselben in jedem Quadranten wiederkehren. Während also zu einem bestimmten Winkel stets auch ein bestimmter Sinus gehört, ist umgekehrt durch einen gegebenen Sinus der Winkel nicht unzweideutig bestimmt, vielmehr gehören zu jedem Sinus, wenn vom Vorzeichen abgesehen wird, vier Winkel, und zwar je einer in jedem Quadranten. Da aber auch die Vorzeichen zu berücksichtigen sind, so wird ein Winkel durch den Sinus **zweideutig** bestimmt; zu einem positiven Sinus gehört ein Winkel zwischen 0° und 90° und ein solcher zwischen 90° und 180°, zu einem negativen Sinus dagegen ein solcher zwischen 180° und 270°, sowie ein solcher zwischen 270° und 360°. Für die Grenzwerthe ± 1 der Sinus fallen die betreffenden beiden Winkel in einen zusammen.

3. In entsprechender Weise ergiebt sich für den **Cosinus** Folgendes: $\cos 0 = 1$. Im ersten Quadranten nimmt der Cosinus bei wachsendem Winkel ab, anfangs langsamer, zuletzt rascher, und es ist $\cos 90^\circ = 0$. Im zweiten Quadranten wird der Cosinus negativ, sein absoluter Werth nimmt wieder zu bis $\cos 180^\circ = -1$. Im dritten Quadranten bleibt er negativ, sein absoluter Werth nimmt ab bis $\cos 270^\circ = 0$.

Im vierten Quadranten wird der Cosinus wieder positiv und nimmt zu bis $cos\,360^\circ = 1$. Der Cosinus ist also, abgesehen von den Grenzwerthen, in gleicher Weise wie der Sinus, stets ein ächter Bruch, und zu jedem solchen Cosinus gehören zwei Winkel, die entweder im ersten und vierten oder im zweiten und dritten Quadranten liegen.

4. Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass sich der Sinus und der Cosinus eines jeden mehr als 90 Grad betragenden Winkels durch eine entsprechende Function eines spitzen Winkels ausdrücken lässt. Man hat in allen Fällen ein rechtwinkeliges Dreieck ACF, dessen Katheten bezüglich die Sinuslinie und die Cosinuslinie sind, und dessen Hypotenuse der Radius AC ist. Vergleicht man die Functionen der spitzen Winkel dieses rechtwinkeligen Dreiecks mit denen des zugehörigen stumpfen oder überstumpfen (zu welchem Zwecke man sich auch ein diesem Dreieck congruentes in der entsprechenden Lage innerhalb des ersten Quadranten construirt denken kann), so ergiebt sich leicht, dass

der Sinus eines stumpfen Winkels dem Sinus seines Supplementwinkels gleich, und der Cosinus eines stumpfen Winkels dem Cosinus seines Supplementwinkels entgegengesetzt gleich ist, oder in Formeln:

$$sin\,(180^\circ - \alpha) = sin\,\alpha;\quad cos\,(180^\circ - \alpha) = -\,cos\,\alpha.$$

Führt man den stumpfen Winkel dagegen dadurch auf einen spitzen zurück, dass man denselben gleich $90^\circ + \alpha$ setzt, so erhält man die Formeln

$$sin(90^\circ + \alpha) = cos\,\alpha;\quad cos(90^\circ + \alpha) = -\,sin\,\alpha$$

In ganz entsprechender Weise ergeben sich für Winkel über 180° die Gleichungen:

$$sin(180^\circ + \alpha) = -\,sin\,\alpha;\quad cos(180^\circ + \alpha) = -\,cos\,\alpha$$
$$sin(270^\circ - \alpha) = -\,cos\,\alpha;\quad cos(270^\circ - \alpha) = -\,sin\,\alpha$$
$$sin(270^\circ + \alpha) = -\,cos\,\alpha;\quad cos(270^\circ + \alpha) = sin\,\alpha$$
$$sin(360^\circ - \alpha) = -\,sin\,\alpha;\quad cos(360^\circ - \alpha) = cos\,\alpha.$$

Auch überzeugt man sich mit Hülfe der erwähnten rechtwinkeligen Dreiecke leicht, dass die früher für spitze Winkel abgeleitete Gleichung

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

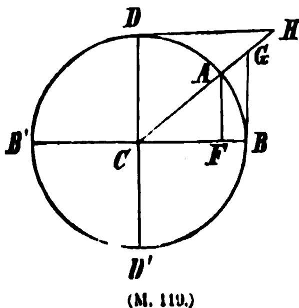
allgemeine Gültigkeit hat. Bei der Anwendung derselben, um eine der beiden Functionen aus der anderen zu berechnen, ist jedoch nunmehr das doppelte Vorzeichen der Wurzelgrösse in

$$sin\,\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\,\alpha},\quad cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}$$

nicht ausser Acht zu lassen und im einzelnen Fall nach dem, was vorher über die Vorzeichen bestimmt wurde, festzusetzen.

§ 4. Tangente und Cotangente.

Auch die übrigen trig. Functionen lassen sich durch die Längen entsprechender Linien veranschaulichen und gleichzeitig auf Winkel von jeder Grösse ausdehnen. Zieht man durch den Anfangspunkt B der Kreisbogen die geometrische Tangente an den im Vorigen benutzten Kreis, so kann die Maasszahl der zwischen B und dem Durchschnittspunkt G mit dem beweglichen Schenkel liegenden Strecke BG dieser Berührungslinie allgemein als die Tangente des Winkels ACB definirt werden. Zieht man die Berührungslinie statt durch B durch denjenigen Endpunkt D des zweiten



(M. 119.)

Durchmessers, welcher dem Winkel von 90° entspricht, so erhält man in entsprechender Weise die Cotangentenlinie *DH*.

Man kann nach diesen Erklärungen die verschiedenen Fälle im Einzelnen in ganz entsprechender Art, wie bei dem Sinus und dem Cosinus untersuchen und auf diesem Wege zu analogen Resultaten gelangen, unter denen wir namentlich die aus den Proportionen zwischen den Seiten der ähnlichen Dreiecke *CAF*, *CGB*, *CHD* leicht zu folgernde allgemeine Gültigkeit der Formeln

$$tang\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha},\; cot\,\alpha = \frac{1}{tang\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

hervorheben. Für die Ausführung dieses Verfahrens ist nicht zu vergessen, dass die geometrischen Tangenten für alle Winkel in *B*, bezw. *D*, also niemals in den entgegengesetzten Punkten *B'* und *D'* anzulegen sind.

Man kann jedoch auch ein umgekehrtes Verfahren, wie das im Vorstehenden bezeichnete, zu Grunde legen, indem man die vorstehenden Gleichungen als allgemeine Definitionen benutzt und so die Untersuchung der einzelnen Fälle auf die bereits entwickelten Eigenschaften der Sinus und Cosinus zurückführt. Dieses Verfahren mag im Folgenden der durch dasselbe erreichbaren grösseren Leichtigkeit und Einfachheit der Entwicklungen wegen eingeschlagen werden, nachdem wir durch die vorstehende Angabe über die geometrische Erklärung die wissenschaftliche Gleichmässigkeit der Darstellung einigermassen zu wahren gesucht haben. Wir erklären also allgemein

die Tangente als das Verhältniss des Sinus zum Cosinus desselben Winkels und die Cotangente als reciproken Werth der Tangente.

Anmerkung: Man hätte in ähnlicher Weise auch vorher den Cosinus mittelst der Formel $cos\,\alpha = +\sqrt{1 - sin^2\alpha}$ unter Angabe der näheren Bestimmungen über die Vorzeichen definiren können. Ueberhaupt lässt sich jede einzelne Function an die Spitze der Erklärungen stellen und dann jede andere mit ihrer Hülfe durch die betreffende Formel definiren. Die Wahl jener ersten Function würde hierbei theoretisch der Willkür anheimgegeben sein, und hierin kann für dieses Verfahren ein Mangel an wissenschaftlicher Form oder doch an Eleganz gefunden werden.

Man erhält nun leicht im Einzelnen, indem man z. B.

$$tang\,0 = \frac{sin\,0}{cos\,0} = \frac{0}{1},\; tang(180° - \alpha) = \frac{sin\,(180° - \alpha)}{cos\,(180° - \alpha)} = \frac{sin\,\alpha}{-\,cos\,\alpha}$$

u. s. w. ausführt und ausserdem beachtet, dass ein Quotient durch Zunehmen des Dividendus und ebenso durch Abnehmen des Divisors wächst und umgekehrt, die folgenden Resultate:

$tang\,0 = 0$. Mit wachsendem Winkel wächst im ersten Quadranten auch die Tangente; sie erhält nach einander alle möglichen reellen Werthe von 0 bis Unendlich; für 90° wird sie unendlich gross. Im zweiten Quadranten ist sie negativ; ihr absoluter Werth nimmt ab bis $tang\,180° = 0$. Im dritten Quadranten ist sie wieder positiv und nimmt zu bis $tang\,270° = \infty$. Im vierten Quadranten ist sie wieder negativ, und ihr absoluter Werth nimmt ab bis $tang\,360° = 0$.

$cot\,0 = \infty$. Mit wachsendem Winkel nimmt im ersten Quadranten die Cotangente ab bis $cot\,90° = 0$. Im zweiten Quadranten wird sie negativ, und ihr absoluter Werth nimmt zu bis $cot\,180° = \infty$. Im dritten Quadranten verhält sie sich wie im ersten, im vierten wie im zweiten.

Es ist ferner für Winkel über 90°

$$tang\,(180° - \alpha) = -\,tang\,\alpha;\; cot\,(180° - \alpha) = -\,cot\,\alpha$$
$$tang\,(90° + \alpha) = -\,cot\,\alpha;\; cot\,(90° + \alpha) = -\,tang\,\alpha$$

$$\begin{aligned} tang\,(180^\circ + \alpha) &= tang\,\alpha; & cot\,(180^\circ + \alpha) &= cot\,\alpha \\ tang\,(270^\circ - \alpha) &= cot\,\alpha; & cot\,(270^\circ - \alpha) &= tang\,\alpha \\ tang\,(270^\circ + \alpha) &= -\,cot\,\alpha; & cot\,(270^\circ + \alpha) &= -\,tang\,\alpha \\ tang\,(360^\circ - \alpha) &= -\,tang\,\alpha; & cot\,(360^\circ - \alpha) &= -\,cot\,\alpha. \end{aligned}$$

§ 5. Secante und Cosecante.

Auch die allgemeine Definition der Secante und die der Cosecante kann auf die früheren des Cosinus und des Sinus zurückgeführt werden, indem man festsetzt, dass allgemein

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}, \quad cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$$

sein soll. Die Leichtigkeit, mit welcher sich durch diese Gleichungen die beiden genannten Functionen durch den Cosinus oder den Sinus ausdrücken und die auch in den Rechnungen ersetzen lassen, hat dahin geführt, dass dieselben in neuerer Zeit nur noch selten gebraucht werden. Wir erwähnen dieselben daher nur der Vollständigkeit halber und um ihre Bedeutung nicht unbekannt zu lassen für den Fall, dass sie in einer Rechnung vorgefunden werden, dürfen aber der Kürze halber darauf verzichten, die Untersuchung der Werthe dieser Functionen für die einzelnen Fälle auszuführen. Wir werden deshalb auch im Folgenden von denselben keinen Gebrauch machen.

Will man der Gleichmässigkeit wegen die allgemeine Definition der Secante und Cosecante gleichfalls an entsprechende, mit einem Kreise vom Radius 1 in Verbindung stehende Strecken knüpfen, so kann man die vorige Figur benutzen. In derselben ist CG die Secantenlinie, ... die Cosecantenlinie.

Es könnte scheinen, als ob auch die Cotangente entbehrlich wäre, da auch sie der reciproke Werth einer vorhergehenden Function und daher leicht durch diese zu ersetzen ... Der Grund für ihre Beibehaltnng ist durch die Gleichung $tang\,(90^\circ - \alpha) = cot\,\alpha$ geg... Näheres darüber findet sich bei der Erklärung der trigonometrischen Tabellen.

Früher waren noch zwei weitere Functionen im Gebrauch; die eine derselben ist ... Verhältniss der Linie BF zum Radius und führt den Namen **Sinusversus** (*sinvers*) ... ist hiernach $sinvers\,\alpha = 1 - cos\,\alpha$. Entsprechend ist für die andere dieser Functionen ... **Cosinusversus**, $cosvers\,\alpha = 1 - sin\,\alpha$. Diese beiden Functionen sind jedoch als völlig entbehrlich ganz ausser Gebrauch gekommen.

§ 6. Zusammmenstellung und Ergänzung des Vorigen.

Um die Resultate der vorhergehenden Paragraphen zusammenzufassen, stellen wir aus den letzteren die folgenden Sätze auf:

Durch einen gegebenen Winkel ist jede seiner Functionen bestimmt, dagegen wird umgekehrt durch eine gegebene Function eines Winkels niemals dieser letztere unzweideutig bestimmt. Vielmehr gehören zu jedem gegebenen Werthe einer bestimmten Function — abgesehen von den zum Theil nur eindeutigen Grenzwerthen — stets **zwei** verschiedene Winkel innerhalb der Grenzen 0 und 360°. Dieselben liegen stets in verschiedenen Quadranten. —

In der Praxis werden jedoch selten Winkel über 180° gebraucht, denn ... den Berechnungen von Dreiecken, welche die Mehrzahl der Anwendungen bilden, sind überstumpfe Winkel überhaupt ausgeschlossen, und ausserdem lassen sich solche meist durch hohle ersetzen. Daher ist für die Praxis die Regel bemerkenswerth, dass — wenn man von den Secanten und Cosecanten absieht — innerhalb der Grenzen 0 und 180° **der Sinus die einzige Function ist, welche den zugehörigen Winkel zweideutig bestimmt.** Der Sinus ist innerhalb jener

Grenzen nie negativ, und zu jedem Sinus gehört ein spitzer Winkel α und ein stumpfer, welcher gleich $180° - \alpha$ ist. Dagegen ist bei den übrigen gebräuchlichen Functionen, wenn dieselben positive Werthe haben, der Winkel spitz; wenn sie negative Werthe haben, ist er stumpf.

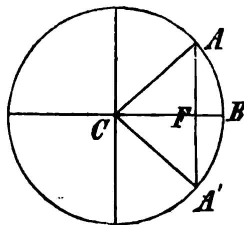
Will man dagegen die Resultate für Winkel aller Quadranten zusammenfassen, so beachte man, dass jede Function eines Winkels über 90° sich auf doppelte Weise auf eine solche eines spitzen Winkels zurückführen lässt. Ein Winkel des zweiten Quadranten kann gleich $90° + \alpha$ oder gleich $180° - \alpha$, ein solcher des dritten gleich $180° + \alpha$ oder gleich $270° - \alpha$, u. s. w. gesetzt werden. Der Winkel wird also entweder auf den ersten Durchmesser, also auf 0, 180° oder 360°, oder auf den zweiten Durchmesser, also auf 90° oder 270° bezogen. Man merke sich nun die mnemonische Regel, dass im ersteren Fall dieselbe Function für den spitzen Winkel bleibt, während im zweiten Fall die entsprechende Cofunction zu setzen ist. Daneben ist das Vorzeichen der Function zu beachten, welches nach dem Vorstehenden das negative ist

für den Sinus im dritten und vierten,
für den Cosinus im zweiten und dritten,
für die Tangente und Cotangente im zweiten und vierten Quadranten.

Beispielsweise ist $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Ist nun umgekehrt $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ gegeben, so kann der Winkel α, wenn nur Winkel unter zwei Rechten in Betracht kommen, nur gleich 60°, andernfalls aber auch gleich 300° sein. Entsprechend gehören zu $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ die Winkel $180° - 60° = 120°$ und $180° + 60° = 240°$. In ähnlicher Weise folgt aus $\sin 30° = \frac{1}{2}$, dass der Gleichung $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ durch den Werth $\alpha = 30°$ genügt werden kann; in diesem Fall existirt aber unter 180° noch ein zweiter solcher Werth für α, nämlich $180° - 30° = 150°$, während zu $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ zwei überstumpfe Winkel gehören.

Man kann auch noch die Beschränkung der Winkel auf solche, welche zwischen den Grenzen 0 und 360° liegen, aufheben, und somit die Erklärungen und Sätze der vorhergehenden Paragraphen noch mehr erweitern. Durch Fortsetzung der Drehung des beweglichen Schenkels, nachdem derselbe bereits eine volle Umdrehung gemacht hat, gelangt man zu Winkeln im weiteren Sinn, welche mehr als vier Rechte betragen. Man sieht leicht ein, dass in diesem Fall für jede neue Umdrehung dieselben Functionswerthe, wie bei der ersten, in ganz gleicher Weise wiederkehren, so das also alle Winkel, welche um 360° oder um ein Vielfaches von 360° von einander differiren, in allen ihren Functionen völlig mit einander übereinstimmen.

Man kann ferner die Drehung des beweglichen Schenkels des veränderlichen Winkels α in einer Weise geschehen lassen, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist. Durch eine solche Drehung in entgegengesetzter Richtung wird ein bereits vorhandener Winkel nicht vergrössert, sondern verkleinert, ein durch eine solche Drehung entstandener Winkel ist also als negativ zu betrachten. Ist z. B. der Winkel $BCA = \alpha$, so ist der Winkel $BCA' = -\alpha$ zu setzen. Man sieht leicht ein, dass in jedem Fall ein solcher negativer Winkel $-\alpha$ dieselbe Lage der Schenkel hat, wie der Winkel $360° - \alpha$, und dass deshalb allgemein



(M. 220.)

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tang(-\alpha) = -\tang\alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

ist. Man sieht jetzt auch leicht ein, dass man, wie vorher durch Addition eines

beliebigen Vielfachen von 360° zu einem Winkel α, so auch durch Subtrac- eines solchen Vielfachen von α stets zu einem Winkel kommt, welcher mit ... allen Functionen übereinstimmt.

Hiernach erweitern sich die früheren Erklärungen dahin, dass zu jede- gegebenen Werth einer trigonometrischen Function unendlich viele Wink- gehören. Ist z. B. bekannt, dass $\sin 30° = \frac{1}{2}$ sei, so kann daraus gefolgert werde- dass, wenn $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ gegeben sei, nicht nur $\alpha = 30°$ oder gleich $180° - 30° = 150°$, so- dern, dass auch jeder Winkel aus der Reihe $360° + 30° = 390°$, $360° + 150° = 5$.. $2 \cdot 360° + 30° = 750°$ u, s. w., sowie jeder aus der Reihe $30° - 360° = -33$.. $150° - 360°$, $30° - 2 \cdot 360°$ u. s. w. ebenfalls ein Werth von α sein könne. E- sprechendes gilt für alle übrigen trigonometrischen Functionen und lässt sich f- jede derselben im Einzelnen leicht aus den früheren Bestimmungen entwicke- Da jedoch Winkel unter 0 und über 360° nur ausnahmsweise gebraucht werde- und dann leicht auf solche, welche zwischen diesen Grenzen liegen, zurückge- führt werden können, so beschränken wir uns hier auf die vorstehenden A- deutungen und setzen im Folgenden, wenn nicht das Gegentheil ausdrückli- gesagt wird, immer nur solche Winkel im engeren Sinne voraus.

Eine andere Ergänzung der im Vorigen gegebenen Entwicklungen liefert d- Satz, dass die für Functionen von $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ u. dgl. gefundenen Form- ganz allgemein gelten, auch wenn α kein spitzer Winkel ist. So ist z. B. we- $\alpha' = 180° + \alpha$ gesetzt wird, $\sin(180° - \alpha') = \sin[180° - (180° + \alpha)] = \sin(-\alpha)$ $= -\sin\alpha$ und $\sin\alpha' = \sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$, also auch in diesem F- $\sin(180° - \alpha') = \sin\alpha'$. In ähnlicher Weise kann man jeden anderen hier- möglichen Fall behandeln. Der Kürze halber dürfen wir auch hier auf eine A- führung eines allgemeinen Beweises verzichten.

Die Zurückführung der Functionen aller Winkel über 90° auf solche von Winkeln i- ersten Quadranten rechtfertigt die besondere Behandlung der spitzen Winkel im § 1, we- wissenschaftlich als überflüssig erscheinen kann, aber in der Praxis besonders geeignet ist, e- richtige Auffassung der Begriffe der trigonometrischen Functionen und Leichtigkeit der Anwendung derselben zu erzielen.

§ 7. Winkel und Bogen.

Da zu jedem bestimmten Centriwinkel eines Kreises ein bestimmter Bog- des letzteren und umgekehrt gehört, so gehören auch zu jedem Bogen, insbe- sondere des Kreises mit dem Radius 1, bestimmte trigonometrische Functione- Man pflegt die Functionen des Centriwinkels α daher auch als Functionen d- zu demselben gehörigen Bogens zu bezeichnen. So ist z. B. $\sin 0{,}523598\ldots = \frac{1}{2}$, denn 0,523598 . . ist die Maasszahl des zu einem Centriwinkel von 30° gehörige- Bogens. Da zu den Winkeln 0°, 90°, 180°, 270°, 360° bezw. die Bogenläng- 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π gehören, so ist nach dem Früheren für diese Bogen

$$\sin 0 = 0; \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad \sin\pi = 0;$$

$$\sin\frac{3}{2}\pi = -1; \quad \sin 2\pi = 0,$$

und in ähnlicher Weise ergeben sich die entsprechenden Formeln für die übrige- Functionen. Allgemeiner ist, wenn n eine ganze Zahl (oder Null) bedeutet,

$$\sin 2n\pi = \sin(2n+1)\pi = 0, \text{ dagegen}$$
$$\cos 2n\pi = +1, \quad \cos(2n+1)\pi = -1,$$

u. s. w. Die Aufstellung der entsprechenden übrigen Formeln, einschliessli- solcher, wie

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x, \quad \sin(2n\pi - x) = -\sin x$$

u. s. w. kann je nach Bedarf dem Leser überlassen werden.

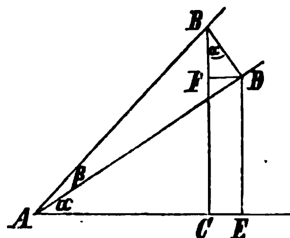
Umgekehrt bezeichnet man durch *arc sin x* (d. i. *arcus* des Sinus x) oder auch durch *arc sin* $(= x)$ denjenigen Bogen des Kreises mit dem Radius 1, dessen Sinus den Werth x hat, und entsprechend für die übrigen Functionen.

So ist also z. B. $arc\ cos\,(-1) = 2n\pi$, und wenn man unter dem *arcus* insbesondere den kleinsten der unzählig vielen zu der gegebenen Function gehörigen Bogen versteht, $arc\ cos\,(-1) = 2\pi$. Da ferner ein Bogen auch in Gradmaass ausgedrückt werden kann, und dann seine Maasszahl mit derjenigen des zugehörigen Centriwinkels übereinstimmt, so findet man wol auch Bezeichnungen wie $arc\ cos\,(-1) = 180°$, u. dgl. m.

In Betreff der Verwandlung von Gradmaass in Bogenmaass und umgekehrt vergleiche man Planimetrie § 58, (1), (2) und (3).

§ 8. Functionen zusammengesetzter Winkel.

1. Um die **Functionen von Summen oder Differenzen** zweier Winkel durch Functionen dieser einzelnen Winkel auszudrücken, nehmen wir zunächst wieder an, dass letztere, sowie ihre Summe, spitz seien. Legt man unter dieser Voraussetzung die beiden Winkel α und β so aneinander, dass ihre Summe entsteht, so kann man, um Functionen von $\alpha + \beta$ mittelst eines diesen Winkel enthaltenden rechtwinkeligen Dreiecks ausdrücken zu können, von einem beliebigen Punkte B des äusseren Schenkels von β die Senkrechte BC auf den äusseren Schenkel von α fällen. Zu möglichster Einfachheit der Entwicklung werde noch die Hypotenuse AB des Dreiecks ABC gleich 1 angenommen. Fällt man dann von B die Senkrechte BD auf den mittleren Schenkel und von D die Senkrechte DE auf AC, so erhält man auch für β und α im Einzelnen rechtwinkelige Dreiecke. Zieht man endlich noch durch D die Parallele zu EC, welche BC in F schneide, so erhält man noch das rechtwinkelige Dreieck BFD, in welchem $\angle FBD = 90° - \angle BDF$, und da $BDF = 90° - \angle FDA$, $\angle FDA$ aber als Wechselwinkel an parallelen Linien gleich α, auch $\angle FBD = \alpha$ ist. Nun ist



(M. 221.)

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1} = BC = DE + BF;$$

$$\frac{DE}{AD} = \sin\alpha, \text{ also } DE = \sin\alpha \cdot AD,$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{1} = \cos\beta, \text{ also } DE = \sin\alpha \cdot \cos\beta,$$

und entsprechend $BF = \cos\alpha \cdot BD = \cos\alpha \cdot \sin\beta$, also

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta. \quad (1)$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$\cos(\alpha + \beta) = AC = AE - FD = \cos\alpha \cdot AD - \sin\alpha \cdot BD, \text{ oder}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta. \quad (2)$$

2. Will man entsprechende Entwicklungen für $\alpha - \beta$ haben, so construire man durch Abtragung des kleineren Winkels β von dem grösseren α den Winkel $\alpha - \beta$ und construire ferner nach Anleitung der nebenstehenden Figur zu jedem

dieser Winkel ein rechtwinkeliges Dreieck. Es sei nämlich $\angle DAC = \alpha$, $\angle DAB = \beta$, also $\angle BAC = \alpha - \beta$, BC senkrecht auf AC, BD senkrecht auf AD und DE senkrecht auf AC. Ferner sei der Kürze wegen $AB = 1$ gemacht, und ausserdem sei BF parallel zu CE gezogen. Der Winkel BDF des rechtwinkeligen Dreiecks BDF ist dann das Complement zu $\angle EDA$, dieser letztere aber als Winkel des Dreiecks ADE complementär zu α, mithin muss $\angle BDF$ gleich α sein. Nun ist

(M. 222.)

$$sin(\alpha - \beta) = BC = DE - DF = sin\alpha \cdot AD - cos\alpha \cdot DB, \text{ oder}$$

da $AD = AB \cdot cos\beta = cos\beta$ und entsprechend $DB = sin\beta$ ist,

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta. \quad (3)$$

Ferner ist $cos(\alpha - \beta) = AC = AE + FB = cos\alpha \cdot AD + sin\alpha \cdot DB$, also

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta. \quad (4)$$

Man beachte die Aehnlichkeiten der beiden vorstehenden Formeln mit den entsprechenden für $\alpha + \beta$ und die Unterschiede in Betreff der Rechnungszeichen.

3. Da die vier vorstehenden Formeln (1) bis (4) nur unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass α, β und $\alpha + \beta$ spitze Winkel seien, so erübrigt noch die Untersuchung der Frage, ob jene Formeln auch dann gültig bleiben, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Man kann für jeden dann möglichen Fall in ganz analoger Weise wie vorher die entsprechenden Figuren construiren und — unter der selbstverständlichen gehörigen Beachtung der Vorzeichen der Functionen — auch entsprechende Entwicklungen machen. Einfacher erscheint es, zum Beweise der allgemeinen Gültigkeit der obigen vier Gleichungen die Formeln des § 3 für die Functionen von Winkeln höherer Quadranten zu benutzen. Nur für den Fall, dass $\alpha + \beta$ stumpf ist, während α und β spitze Winkel sind, ist die Ableitung der Formeln für $sin(\alpha + \beta)$ und $cos(\alpha + \beta)$ an der Figur zu wiederholen. Die Construction der letzteren und die Entwicklung der Formeln geschieht wörtlich ebenso, wie oben, nur dass $cos(\alpha + \beta) = - AC$ zu schreiben ist. Ist dagegen z. B. α stumpf und β spitz, so setze man $\alpha = 180° - \alpha_1$, und man hat

$$sin(\alpha + \beta) = sin[(180° - \alpha_1) + \beta] = sin[180° - (\alpha_1 - \beta)]$$
$$= sin(\alpha_1 - \beta), \text{ also, da } \alpha_1 \text{ und } \beta \text{ spitz sind,}$$
$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha_1\, cos\beta - cos\alpha_1 \cdot sin\beta.$$

Setzt man hier wieder $sin\alpha_1 = sin\alpha$ und $cos\alpha_1 = - cos\alpha$, so erhält man

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta,$$

wie oben. In derselben Weise erhält man auch die drei übrigen Formeln wieder.

Da die sämmtlichen verschiedenen Fälle, welche hierbei im Einzelnen möglich sind, nach der Anleitung des vorstehenden Beispiels ohne Schwierigkeit behandelt werden können, und bei der fortwährenden Wiederholung derselben Gedanken nichts Neues darbieten, so darf die Ausführung des Beweises der allgemeinen Gültigkeit der obigen vier Formeln dem Leser überlassen bleiben.

Auch für den Fall, dass einer der beiden Winkel, oder dass beide negativ werden, oder auch einen Rechten, ein Vielfaches von 90° oder mehr als 360° betragen, erweisen sich diese Formeln als gültig. Es würde hinreichen, diesen ganz allgemeinen Nachweis der Gültigkeit zunächst für eine einzige derselben, z. B. für $sin(\alpha + \beta)$, zu führen, da man dann alle übrigen aus dieser einen mittelst früherer, allgemein gültiger Formeln ableiten kann. So ergiebt sich —

jenen Beweis der allgemeinen Gültigkeit vorausgesetzt — aus der Gleichung für $sin(\alpha + \beta)$ die für $sin(\alpha - \beta)$, indem man in jener $-\beta$ statt β einsetzt, und die für $cos(\alpha + \beta)$ mittelst der Formel $sin^2(\alpha + \beta) + cos^2(\alpha + \beta) = 1$; endlich folgt die für $cos(\alpha - \beta)$, indem man wieder in der eben für $cos(\alpha + \beta)$ abgeleiteten β negativ werden lässt.

4. Aus den vorstehend entwickelten Formeln ergiebt sich nun weiter mit allgemeiner Gültigkeit

$$tang(\alpha + \beta) = \frac{sin(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)} = \frac{sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta - sin\alpha\, sin\beta}.$$

Dividirt man hier, um die Tangente der Summe auch durch die Tangenten der einzelnen Winkel auszudrücken, sowol den Zähler als den Nenner des letzten Bruches durch $cos\alpha \cdot cos\beta$, so erhält man

$$\frac{\dfrac{sin\alpha\, cos\beta}{cos\alpha\, cos\beta} + \dfrac{cos\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha\, cos\beta}{cos\alpha\, cos\beta} - \dfrac{sin\alpha\, sin\beta}{cos\alpha\, cos\beta}},$$

und hieraus durch einige leichte Umformungen

$$tang(\alpha + \beta) = \frac{tang\alpha + tang\beta}{1 - tang\alpha \cdot tang\beta}. \quad (5)$$

Durch ein ganz entsprechendes Verfahren ergiebt sich

$$tang(\alpha - \beta) = \frac{tang\alpha - tang\beta}{1 + tang\alpha \cdot tang\beta}. \quad (6)$$

Ebenso erhält man aus $cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{cos(\alpha \pm \beta)}{sin(\alpha \pm \beta)}$, wenn man den Zähler und den Nenner nach Entwicklung derselben durch $sin\alpha \cdot sin\beta$ dividirt,

$$cot(\alpha + \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta - 1}{cot\beta + cot\alpha} \quad (7)$$

$$cot(\alpha - \beta) = \frac{cot\alpha \cdot cot\beta + 1}{cot\beta - cot\alpha}. \quad (8)$$

5. Die Formeln (1) bis (8) lassen sich leicht auf die Functionen von Winkeln anwenden, welche aus mehr als zwei Gliedern zusammengesetzt sind. Um z. B. $sin(\alpha + \beta - \gamma)$ zu entwickeln, kann man $\alpha + \beta - \gamma$ in Form eines Binoms $(\alpha + \beta) - \gamma$ oder auch $\alpha + (\beta - \gamma)$ u. dgl. m. darstellen und demnach zunächst etwa $sin[(\alpha + \beta) - \gamma] = sin(\alpha + \beta) cos\gamma - cos(\alpha + \beta) sin\gamma$ setzen. Hieraus folgt dann durch weitere Entwicklung

$$(sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta)\, cos\gamma - (cos\alpha\, cos\beta - sin\alpha\, sin\beta)\, sin\gamma =$$
$$sin\alpha\, cos\beta\, cos\gamma + cos\alpha\, sin\beta\, cos\gamma - cos\alpha\, cos\beta\, sin\gamma + sin\alpha\, sin\beta\, sin\gamma.$$

§ 9. Fortsetzung: Functionen von 2α, $\frac{1}{2}\alpha$. Summen und Differenzen von Functionen.

1. Eine andere Anwendung jener Formeln erhält man, wenn man β gleich α annimmt. Aus (1) folgt in diesem Fall $sin 2\alpha = sin\alpha \cdot cos\alpha + cos\alpha \cdot sin\alpha$, d. i.

$$sin 2\alpha = 2 sin\alpha\, cos. \quad (1)$$

Ebenso folgen aus § 8, (2), (5) und (7) leicht die Formeln

$$cos 2\alpha = 2 cos^2\alpha - sin^2\alpha \quad (2)$$

$$tang 2\alpha = \frac{2 tang\alpha}{1 - tang^2\alpha} \quad (3)$$

$$cot\,2\alpha = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}. \quad (4)$$

Die Formeln des § 8 für $\alpha - \beta$ führen durch Gleichsetzung der beiden Winkel auf diejenigen für die Functionen von 0 zurück. Setzt man in entsprechender Weise in den für die Functionen von $\alpha + \beta + \gamma$ abzuleitenden Gleichungen die drei Winkel einander gleich, oder auch zerlegt man 3α zunächst in $2\alpha + \alpha$, so ergeben sich die Gleichungen

$$sin\,3\alpha = 3\,sin\,\alpha\,cos^2\alpha - sin^3\alpha = 3\,sin\,\alpha - 4\,sin^3\alpha$$
$$cos\,3\alpha = cos^3\alpha - 3\,sin^2\alpha\,cos\,\alpha = 4\,cos^3\alpha - 3\,cos\,\alpha$$
$$tang\,3\alpha = \frac{3\,tang\,\alpha - tang^3\alpha}{1 - 3\,tang^2\alpha}$$
$$cot\,3\alpha = \frac{cot^3\alpha - 3\,cot\,\alpha}{3\,cot^2\alpha - 1},$$

und in ähnlicher Weise mittelst $4\alpha = 3\alpha + \alpha$ oder $2 \cdot 2\alpha$, ferner $5\alpha = 4\alpha + \alpha$ oder $3\alpha + 2\alpha$ u. s. w.

$$sin\,4\alpha = 4\,sin\,\alpha\,cos^3\alpha - 4\,sin^3\alpha\,cos\,\alpha$$
$$cos\,4\alpha = cos^4\alpha - 6\,sin^2\alpha\,cos^2\alpha + sin^4\alpha,$$
$$sin\,5\alpha = 5\,sin\,\alpha\,cos^4\alpha - 10\,sin^3\alpha\,cos^2\alpha + sin^5\alpha,$$
$$cos\,5\alpha = cos^5\alpha - 10\,sin^2\alpha\,cos^3\alpha + 5\,sin^4\alpha\,cos\,\alpha,$$

u. s. w.

2. Durch die Formeln (1) bis (4) dieses Paragraphen wird die Aufgabe gelöst, aus den bekannten Functionen eines Winkels α die Functionen des doppelten Winkels 2α zu berechnen. Selbstverständlich können statt α und 2α auch beliebige andere Bezeichnungen für die beiden Winkel gewählt werden, wenn nur der auf der linken Seite der Gleichungen gebrauchte Winkel doppelt so gross ist, als der auf der rechten Seite gebrauchte. Insbesondere kann man daher auch schreiben

$$sin\,\alpha = 2\,sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot cos\tfrac{1}{2}\alpha; \quad cos\,\alpha = cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ u. s. w.}$$

Soll die umgekehrte Aufgabe gelöst, d. h. sollen aus den bekannten Functionen eines Winkels die Functionen des halb so grossen Winkels berechnet werden, so hat man nur in den obigen Gleichungen (1) bis (4) die Functionen von α als die Unbekannten zu betrachten, und jene Gleichungen auf diese aufzulösen. Am einfachsten geschieht dies mit

$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha,$$

indem man zunächst in derselben $cos\,\alpha$ oder $sin\,\alpha$ mittelst der Gleichung

$$1 = cos^2\alpha + sin^2\alpha$$

eliminirt. Die Anwendung der Additions- und Subtractions-Methode führt sofort auf

$$1 + cos\,2\alpha = 2 \cdot cos^2\alpha$$
$$1 - cos\,2\alpha = 2 \cdot sin^2\alpha \quad (5)$$

und aus diesen folgt

$$cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos\,2\alpha}{2}} \quad (6)$$
$$sin\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos\,2\alpha}{2}} \quad (7)$$

Durch Division der beiden letzteren Gleichungen erhält man unter Anwendung bekannter arithmetischer Sätze

$$tang\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos\,2\alpha}{1 + cos\,2\alpha}} \quad (8)$$

$$cot\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos 2\alpha}{1 - cos 2\alpha}} \qquad (9)$$

Selbstverständlich können auch diese Gleichungen in der Form

$cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + cos\alpha)}$, $sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - cos\alpha)}$, u. s. w. geschrieben werden.

Die Aufgabe, in entsprechender Weise die Functionen von α aus denen von 3α zu berechnen, erfordert, wie man leicht aus den oben für letztere aufgestellten Formeln erkennt, die Auflösung von Gleichungen dritten Grades. Eine nähere Betrachtung derselben zeigt, dass sie unter die sog. irreducibelen Gleichungen gehören. Die hieraus resultirende Unmöglichkeit der Auflösung der gestellten Aufgabe mit den gewöhnlichen elementaren Hülfsmitteln der Algebra entspricht der Unmöglichkeit, die entsprechende geometrische Aufgabe der Trisection des Winkels allein mit Anwendung von Zirkel und Lineal zu lösen.

3. Die Analogie im Baue je zweier Formeln, welche die Entwicklung derselben Function von $\alpha + \beta$ und von $\alpha - \beta$ liefern, führt endlich noch zu einer weiteren Gruppe beachtenswerther Gleichungen. Durch Addition, bezw. Subtraction der beiden Formeln § 8, (1) und (3) erhält man zunächst

$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2 sin\alpha \cdot cos\beta \qquad (10)$$
$$sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha - \beta) = 2 cos\alpha \cdot sin\beta. \qquad (11)$$

In derselben Weise ergeben sich aus § 8, (2) und (4) die Gleichungen

$$cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) = 2 cos\alpha \cdot cos\beta \qquad (12)$$
$$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta) = - 2 sin\alpha \cdot sin\beta. \qquad (13)$$

Setzt man nun $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$, so dass also $\alpha = \tfrac{1}{2}(a + b)$, $\beta = \tfrac{1}{2}(a - b)$ zu setzen ist, so nehmen die vorstehenden vier Formeln die folgenden Gestalten an:

$$sin a + sin b = 2 sin\tfrac{1}{2}(a + b) cos\tfrac{1}{2}(a - b) \qquad (14)$$
$$sin a - sin b = 2 cos\tfrac{1}{2}(a + b) sin\tfrac{1}{2}(a - b) \qquad (15)$$
$$cos a + cos b = 2 cos\tfrac{1}{2}(a + b) cos\tfrac{1}{2}(a - b) \qquad (16)$$
$$cos a - cos b = - 2 sin\tfrac{1}{2}(a + b) sin\tfrac{1}{2}(a - b). \qquad (17)$$

Während die Formeln (10)—(13) dazu dienen können ein Produkt zweier Functionen (Sinus oder Cosinus) in eine Summe oder Differenz zu verwandeln, und zu diesem Zweck auch in der Form

$$sin\alpha \cdot cos\beta = \tfrac{1}{2}[sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)], \text{ u. s. w.}$$

geschrieben werden können, dienen die Formeln (14)—(17) zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, also zur Verwandlung einer solchen Summe oder Differenz in ein Produkt.

Die letzteren Formeln sind z. B. zur Erleichterung von logarithmischen Rechnungen von leicht ersichtlicher Bedeutung.

Die bis jetzt entwickelten Gleichungen zwischen trigonometrischen Functionen desselben oder verschiedener Winkel enthalten die nothwendigsten, aber auch hinreichenden Sätze, welche zur Anwendung auf die Berechnung von Figuren gebraucht werden. Wir beschränken uns daher an dieser Stelle auf dieselben und haben nur noch, ehe wir zu den Anwendungen übergehen, die Berechnung der Zahlenwerthe der Functionen für jeden bestimmten Winkel zu erörtern.

Kapitel 2.
Berechnung und Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.
§ 10. Berechnung der Tafeln.

1. Zur Berechnung der trigonometrischen Functionen der Winkel genügt es, den Weg zu zeigen, auf welchem eine einzige Function, z. B. der Sinus, berechnet werden kann, da aus dieser für jeden einzelnen Winkel alle übrigen Functionen-Werthe nach § 2 ermittelt werden können. Es genügt ferner, diese Function für alle spitzen Winkel zu bestimmen, da die Functionen von Winkeln aus den höheren Quadranten sich leicht auf solche von Winkeln des ersten zurückführen lassen. Ja es reicht schon hin, die Berechnung für alle Winkel bis zu 45° durchzuführen, denn die Formeln $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ u. s. w. gestatten jede Function eines mehr als 45° betragenden Winkels durch eine solche eines kleineren darzustellen. So ist z. B. $\sin 72° = \cos(90° - 72°) = \cos 18°$.

Für einige spitze Winkel ergiebt sich eine leichte Berechnung der trigonometrischen Functionen aus einfachen Lehrsätzen der Planimetrie. In jedem Dreieck, welches rechtwinkelig und gleichschenkelig zugleich, in welchem also das Verhältniss der beiden Katheten gleich 1 ist, beträgt jeder spitze Winkel 45°. Es ist also

$$\tan 45° = \cot 45° = 1,$$

und hieraus berechnet man leicht

$$\sin 45° = \cos 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Theilt man ferner ein gleichseitiges Dreieck durch eine seiner Höhen in zwei rechtwinkelige, so ist in jedem der letzteren ein spitzer Winkel gleich 30°, der andere gleich 60°. Setzt man in einem solchen Dreieck der Kürze halber die kleinere Kathete, also die Hälfte der Seite des gleichseitigen Dreiecks, gleich 1, so ist die Hypotenuse gleich 2 und die andere Kathete zufolge des pythagoreischen Lehrsatzes gleich $\sqrt{3}$. Demnach ist

$$\sin 30° = \cos 60° = \tfrac{1}{2};\quad \cos 30° = \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};\quad \cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}.$$

Construirt man ferner in einen Kreis ein regelmässiges Zehneck, so ist, wenn s die Maasszahl der Seite des letzteren und der Radius des Kreises gleich 1 ist, zufolge Planimetrie § 5 6.

$$1 : s = s : (1 - s),$$

also $s^2 + s = 1$, und demnach $s = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Verbindet man nun einen Eckpunkt des Zehnecks mit dem Mittelpunkt und fällt von letzterem die Senkrechte auf eine jenem Eckpunkt angrenzende Seite, construirt also ein Bestimmungsdreieck des Zehnecks, so ist in demselben die Hypotenuse gleich 1, die eine Kathete gleich $\tfrac{1}{2}s = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, folglich die andere Kathete gleich $\tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. Da nun der eine spitze Winkel dieses Dreiecks gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{10} = 18°$, der andere gleich 72° ist, so erhält man

$$\sin 18° = \cos 72° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1);\quad \cos 18° = \sin 72° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},\ \text{u. s. w.}$$

2. Aus den vorstehend berechneten Functionen lassen sich mit Hülfe der

Formeln der Paragraphen 8 und 9 zahlreiche andere berechnen. Aus den Functionen von 30° erhält man durch Anwendung der Formeln für $\frac{1}{2}\alpha$ die von 15°, aus denen von 18° und den eben berechneten von 15° mittelst der Formeln für $\alpha - \beta$ die von 3°. Aus letzteren kann man endlich mittelst der Formeln für die Functionen von 2α und $\alpha + \beta$ die Functionen von 6°, 9°, 12° u. s. w. berechnen und somit schon eine Tabelle der Functionen-Werthe aufstellen, welche von 3 zu 3 Graden fortschreitet.

Aus den so erhaltenen Zahlen lassen sich ferner durch Anwendung der Formeln § 9, (6)—(9) noch die Functionen beliebig vieler anderer Winkel, z. B. von 1°30′, 0°45′, 0°22′30″ u. s. w. berechnen. Man gelangt jedoch auf diesem Wege niemals zur Aufstellung einer von Grad zu Grad, Minute zu Minute oder Secunde zu Secunde fortschreitenden Tabelle, wie sie der Gebrauch in der Praxis erfordert. Zu diesem Zwecke kann man folgendes Verfahren einschlagen:

Aus dem pythagoreischen Lehrsatz ergiebt sich, dass die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks in der Regel in irrationalen Verhältnissen zu einander stehen, und dass somit die trigonometrischen Functionen der Winkel sich zum grössten Theil nur näherungsweise durch (abgekürzte) Decimalbrüche ausdrücken lassen. Für den praktischen Gebrauch genügt es auch vollkommen, wenn man nur so viele Decimalstellen einer verlangten Function kennt, als für die erforderliche Genauigkeit der betreffenden Rechnungen nothwendig ist, also beispielsweise fünf oder sieben Decimalstellen. Dies lässt sich nun zunächst für sehr kleine Winkel erreichen. Da nämlich jede Seite eines einem Kreise umbeschriebenen Polygons grösser, und jede Seite eines einbeschriebenen Polygons kleiner als der zu demselben Centriwinkel mit ihr gehörige Bogen ist, da ferner jede Tangentenlinie als Hälfte einer Seite eines umbeschriebenen, und jede Sinuslinie als Hälfte einer Seite eines einbeschriebenen Polygons betrachtet werden kann, und zu jeder dieser Linien auch die Hälfte des zur ganzen gehörigen Bogens gehört, so folgt, dass jede Tangente eines Winkels α grösser und jeder Sinus kleiner ist als der zugehörige Bogen b (des Kreises mit dem Radius 1). Aus der Gleichung

$$tang\,\alpha > b$$

folgt aber $\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} > b$, also $sin\,\alpha > b \cdot cos\,\alpha$, also $sin\,\alpha > b\sqrt{1 - sin^2\alpha}$.

Da ferner

$$sin\,\alpha < b,$$

so ist um so mehr $sin\,\alpha > b\sqrt{1 - b^2}$. Der Radicand $1 - b^2$ ist stets ein echter Bruch, mithin ist $\sqrt{1 - b^2} > 1 - b^2$, also um so mehr $sin\,\alpha > b \cdot (1 - b^2)$ oder $sin\,\alpha > b - b^3$, daher

$$b - sin\,\alpha < b^3,$$

d. h. der Unterschied zwischen einem Sinus und seinem Bogen ist stets kleiner als die dritte Potenz des Bogens.

Ist nun b so klein, dass b^3 innerhalb der für den Grad von Genauigkeit gesteckten Grenze gleich Null gesetzt werden kann, so darf der Sinus mit dem Bogen verwechselt werden.

So erhält man z. B. für $sin\,1'$, da hier $b = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{60} = 0{,}0002908882\ldots$ ist, $b - sin\,\alpha < (0{,}00029\ldots)^3$, also jedenfalls kleiner als eine Einheit der neunten Decimale, d. h. es ist

$$sin\,1' = 0{,}000290888$$

auf 9 Decimalen genau. Für einen Winkel von einer Secunde ergiebt sich auf diesem Wege der Sinus mit einer Genauigkeit von 15 Decimalstellen.

Hat man so die Functionen von 1′ oder 1″ gefunden, so kann man sich wieder der Formeln 2α und $\alpha + \beta$ bedienen, um nach und nach die aller Winkel von Minute zu Minute oder von Secunde zu Secunde zu berechnen. Da jedoch jene ersteren Functionenwerthe keine absolute Genauigkeit besitzen, so muss man sich stets vergewissern, dass der Fehler der aus ihnen berechneten nicht durch Häufung die erlaubte Grenze übersteige. Hierzu kann man sich der nach dem Vorhergehenden berechneten genauen Werthe der Functionen der Winkel von 3 zu 3 Grad und deren Hälften u. s. w. bedienen.

3. Die Ausführung des im Vorstehenden entwickelten Verfahrens ist überaus umständlich und zeitraubend. Die höhere Mathematik giebt erheblich bequemere Mittel an die Hand, um die Werthe der trigonometrischen Functionen berechnen zu können. Da jedoch diese Mittel der Natur der Sache nach erst in einem späteren Theile erörtert werden können, so soll das Vorstehende dazu dienen, an dieser Stelle wenigstens die Möglichkeit jener Berechnung zu zeigen. Da ferner die letztere bereits mehrfach für alle vorkommenden Winkel ausgeführt worden ist, und die Resultate in zahlreich herausgegebenen Tabellen niedergelegt sind, so wird durch letztere für die gewöhnlichen praktischen Zwecke die Berechnung trigonometrischer Functionen überhaupt überflüssig, indem man dieselben einfach in jenen Tafeln aufschlagen kann.

§ 11. Gebrauch der Tafeln.

Solche trigonometrische Tafeln sind den in der Arithmetik angegebenen Logarithmentafeln beigefügt. Sie enthalten, da die trigonometrischen Rechnungen meist mittelst Logarithmen ausgeführt werden, in der Regel statt der Functionen die Briggischen Logarithmen derselben. Man ist also nicht genöthigt, zu einer in der trigonometrischen Tabelle aufgeschlagenen Function auch noch zum Behufe der Verwendung in der logarithmischen Rechnung den Logarithmus aufzuschlagen. Wird dagegen der Werth der Function selbst verlangt, so ist es selbstverständlich nöthig, zu dem aufgeschlagenen Logarithmus mittelst der Tafel der Logarithmen der Zahlen den Numerus zu suchen, falls nicht für diesen seltener vorkommenden Fall eine besondere Tabelle jener Functionen-Werthe vorhanden ist.

Die besondere Einrichtung der trigonometrischen Tafeln ist nicht uberall die gleiche, und es muss deshalb hier in Betreff derselben und des Gebrauchs a[illegible] die den einzelnen Tabellen-Werken beigegebenen Erläuterungen verwiesen werden. Wir setzen daher im Folgenden voraus, dass der Leser sich in den Stand gesetzt habe, mit Hülfe seiner Tafeln sowol zu jedem gegebenen Winkel die Logarithmen seiner Functionen, als auch umgekehrt zu jeder Function die zugehörigen Winkel rasch und sicher zu ermitteln und wollen im Folgenden nur zur Erleichterung allseitiger Uebung einige Beispiele ausführen.

1. Es sei in fünfstelligen Tafeln $log\ sin\ 118^\circ\, 22'\, 17''$ aufzuschlagen. Man findet denselben gemäss der Formeln $sin\ (180^\circ - \alpha) = sin\,\alpha$ und $sin\,(90^\circ + \alpha$ $= cos\,\alpha$ indem man entweder den Sinus von $61^\circ\, 37'\, 43''$ oder den Cosinus von $28^\circ\, 22'\, 17''$ sucht. Wählen wir das Letztere, so finden wir in der Tafel $log\ cos\ 28^\circ\, 22'$ $= 9{,}94445$ und haben von der daselbst angegebenen Differenz 7 zwischen diesem und dem nächstfolgenden Logarithmus den 60. Theil 17 mal zu nehmen. Dies giebt (im Kopfe zu berechnen) $7 \cdot \frac{17}{60} = 7 \cdot \frac{15}{60} + \frac{7}{30} = \frac{7}{4} + \frac{7}{30}$, wofür weil nur Ganze in Betracht kommen, ohne Weiteres 2 zu setzen ist. Dieses Proportional-

theilchen ist von der obigen Zahl abzuziehen, da der nächstfolgende *log cos* 28° 23′ kleiner ist als der aufgeschlagene obige, und man erhält

$$log\ sin\ 118^\circ\, 22'\, 17'' = 9{,}94443,$$

wobei, wie immer in solchem Fall die in Gedanken zu behaltende negative Charakteristik — 10 zu beachten bleibt.

2. Da eine einzelne Secunde bei fünfstelligen Tafeln oft keinen Einfluss auf die letzte Decimale der aufzuschlagenden Zahl ausübt, mithin also in Beispielen, wie das vorstehende, der Winkel genauer angegeben ist, als der aufgefundenen Function entspricht, so giebt man auch häufig bei dem Gebrauch fünfstelliger Logarithmen statt der Secunden des Winkels nur Zehntel-Minuten an. Ist beispielsweise *log tang* 64° 15′, 8 verlangt, so hat man zu dem in den Tafeln aufgeschlagenen *log tang* 64° 15 = 10,31664 das Achtfache eines Zehntels der Differenz 33, also 3, 3 · 8 = 26 zu addiren. Geht man dagegen von dem näheren Winkel 64° 16′ aus, so hat man von *log tang* 64° 16′ = 10,31697 zwei Zehntel der Differenz 33, also 7 zu subtrahiren. In beiden Fällen erhält man *log tang* 64° 15′, 8 = 10,31690.

3. Es sei *log cos* 0° 46′, 3 zu suchen. Die Tafeln ergeben für 0° 46′ und für 0° 47′ die gleiche Zahl, mithin muss dieselbe auch für den zwischen diesen beiden liegenden Winkel gelten, oder es ist der gesuchte Logarithmus 9,99996. Ist dagegen *log sin* 0° 46′, 3 gesucht, so kann das Proportionaltheilchen für die drei Zehntel-Minuten behufs Addition zu *log sin* 0° 46′ = 8,12647 nicht mittelst der betreffenden Differenz 934 gefunden werden, weil an dieser Stelle der Tafel die Differenzen der aufeinanderfolgenden Logarithmen ganz verschieden sind. Man kann sich in diesem Falle des Satzes bedienen, dass bei fünfstelligen Tafeln bis zu 8° 32′,5,

$log\ sin x = log x + \frac{1}{3} log\ cos x$; $log\ tang x = log x - \frac{2}{3} log\ cos x$ ist. Im vorliegenden Beispiel ist der Bogen $x = 0^\circ\, 46', 3 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 46{,}3 \cdot 0{,}0002909$, also $log x$

$$= 1{,}66558 + 6{,}46373 - 10, = 8{,}12931 - 10,\quad log\ cos x = 9{,}99996 - 10;$$

$$\frac{1}{3}\, log\ cos x = 9{,}99999 - 10$$

also

$$log\ sin\ 0^\circ\, 46' = 8{,}12931 + 9{,}99999 = 8{,}12930.$$

4. Es sei $log\ cot \alpha = 10{,}42026$ gegeben und α gesucht. Der nächstliegende Logarithmus der Tafel ist *log cot* 20° 48′ = 10,42037, der gegebene liegt zwischen ihm und *log cot* 20° 49′. Es ist daher für die Berechnung der zu 20° 48′ zu addirenden Secunden die Differenz 11 des Tafel-Logarithmus und des gegebenen durch den sechzigsten Theil der Tafel-Differenz 38 zu dividiren. Nun ist $11 : \frac{38}{60} = 11 \cdot \frac{30}{19} = 11 \cdot 2 - \frac{88}{19} = 22 - 5 = 17$ zu setzen, also der gesuchte Winkel gleich 20° 48′ 17″ oder — wenn überstumpfe Winkel möglich sind — gleich 180° + 20° 48′ 17″ = 200° 48′ 17″. Sollen dagegen Zehntel-Minuten berechnet werden, so hat man $11 : \frac{38}{10} = 11 : 3{,}8 = 3$, also den gesuchten Winkel gleich 20° 48′, 3 oder 200° 48′,3 zu setzen.

5. Soll zu $log\ sin \alpha = 9{,}99995$ der Winkel gefunden werden, so zeigen die Tafeln, dass alle Winkel zwischen 89° 6′ und 89° 10′ in den ersten fünf Decimalen übereinstimmend denselben Logarithmus des Sinus haben. Der Winkel kann also mit fünfstelligen Tafeln nicht mit grösserer Schärfe gefunden werden. Ausser den obigen Winkeln sind auch noch die von 90° 54′ bis 90° 50′ abwärts für das

Resultat anzugeben, da $sin(180° - \alpha) = sin\,\alpha$ ist. — Dieses Beispiel führt auf die praktische Regel: Für Winkel, welche nahe an 90 sind, vermeide man wo möglich die Bestimmung durch ihre Sinus, für solche, welche nahe an 0° sind, die Bestimmung durch ihre Cosinus.

6. Um zu $log\ cos\,\alpha = 8{,}21004_n$ den Winkel zu bestimmen, bedarf man trotz der grossen Verschiedenheiten der Differenzen an der betreffenden Stelle der Tafel keiner besonderen Interpolationsregel. Man erhält mit der Tafel-Differenz 782 auf dem gewöhnlichen Wege den Winkel 89° 4',24 oder 89° 4' 14",2 mit der erforderlichen Genauigkeit. Im vorliegenden Falle muss dann noch wegen des dem gegebenen Logarithmus angehängten n der entsprechende Winkel des zweiten oder dritten Quadranten genommen werden. Kommen nur concave Winkel in Betracht, so hat man also $\alpha = 90° 55', 8$.

7. Soll zu $log\ tang\,\alpha = 9{,}65890$ der $log\ cos\,\alpha$ aufgeschlagen werden, so ist es nicht nöthig, auch den Winkel α mittelst Interpolation zu berechnen, sondern man kann direkt von der Tangente auf den Cosinus interpoliren. Man hat $log\ tang\ 24°\ 30' = 9{,}65870$ mit der Differenz 34 und $log\ cos\ 24°\ 30' = 9{,}95902$ mit der Differenz 5. Es ist daher vom letzteren Logarithmus $\frac{20 \cdot 5}{34} = 3$ zu subtrahiren, und man hat $log\ cos\,\alpha = 9{,}95899$.

II. Abschnitt.

Ebene Trigonometrie.

Kapitel 3.

Das rechtwinkelige Dreieck.

§ 12. Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke.

Ist von einem Dreieck bekannt, dass es einen rechten Winkel habe, so bedarf man nur noch zweier Stücke desselben, um es zu bestimmen und somit die Möglichkeit zu haben, die übrigen Stücke zu berechnen. Zu diesem Zweck wähle man unter den Gleichungen

$$\frac{a}{c} = sin\,\alpha, \quad \frac{b}{c} = cos\,\alpha, \quad \frac{a}{b} = tang\,\alpha, \quad \frac{b}{a} = cot\,\alpha,$$

welche die Definitionen der gebräuchlichen trigonometrischen Functionen enthalten, sowie den planimetrischen Gleichungen

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad \alpha + \beta = 90°$$

jedesmal eine solche aus, welche die beiden gegebenen und das im einzelnen Fall gesuchte Stück enthält, löse sie, wenn nöthig, auf das letztere als Unbekannte auf, setze dann die etwa gegebenen bestimmten Zahlenwerthe der ersteren ein und berechne den betreffenden Ausdruck numerisch. Die einzelnen Fälle, welche hierbei vorkommen können, sind folgende:

a) Gegeben seien die beiden Katheten a, b. Man findet

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tang\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = 90° - \alpha.$$

Da häufig auch der Flächeninhalt F des gesuchten Dreiecks verlangt wird, so fügen wir diesen Gleichungen noch die aus der Planimetrie bekannte

$$F = \tfrac{1}{2}ab$$

hinzu.

Für die numerische Berechnung ist noch zu bemerken, dass die Formel für c, wenn a und b nicht hinreichend einfache Werthe haben, um die Berechnung ihrer Quadrate bequem ohne Logarithmen ausführen zu können, eine Unterbrechung der logarithmischen Rechnung nöthig macht. Man hat nämlich zu den Logarithmen von a^2 und b^2 die Numeri aufzuschlagen um die Addition vornehmen zu können, und dann zur Summe wieder den Logarithmus zu suchen. Da auf diese Weise die Anzahl der nöthigen Aufschlagungen in der Tafel und damit der meist unbequemste und zeitraubendste Theil der Arbeit, welcher zugleich zu einer Häufung der Ungenauigkeiten Anlass geben kann, ziemlich gross wird, so empfiehlt es sich in solchen Fällen zuerst die Winkel zu berechnen und dann einen derselben zur Bestimmung von c zu benutzen. So erhält man, nachdem α berechnet ist, aus der Gleichung $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ durch Auflösen auf c

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

und findet durch Benutzung dieser Formel die Anzahl der nothwendigen Aufschlagungen verringert.

Bei numerischen Beispielen ist hier, wie in allen ähnlichen Fällen, eine bestimmte Ordnung bei dem Hinschreiben der Zahlen dringend zu empfehlen, wobei namentlich auch das wiederholte Schreiben einer und derselben Zahl als unnütz und zeitraubend vermieden wird. So wird man in dem vorstehenden Fall beachten, dass $\log a$ zweimal gebraucht wird, und dass $\log \sin\alpha$, unmittelbar nachdem α zu $\log tg\,\alpha$ aufgeschlagen worden, aus der noch nicht von der Hand verlassenen Tafel auf derselben Seite und Zeile, wie jener, aufgeschlagen werden kann. Schreibt man etwa in eine Vertical-Colonne unter einander alle gebrauchten Logarithmen, in eine andere die Resultate, und hat man sich gewöhnt auch solche Logarithmen zu addiren und subtrahiren, welche nicht unmittelbar unter einander geschrieben sind, so kann die Ausrechnung eines Zahlenbeispiels zum obigen Fall etwa in folgender einfachen Weise geschrieben werden:

$a = 4{,}1259;\ b = 0{,}9687.$

$\log a =$	0,61552	$\alpha = 76°\,47'\,14''$
$\log b =$	9,98619 — 10	$\beta = 13°12'46''$
$\log tang\,\alpha =$	10,62933	$c = 4{,}2381$
$\log \sin\alpha =$	9,98835	$F = 1{,}9984.$
$\log c =$	0,62717	
$\log (ab) =$	0,60171	
$\log 2 =$	0,30103	
$\log F =$	0,30068.	

Der leicht im Gedächtniss zu behaltende $\log 2$ wird von geübteren Rechnern nicht hingeschrieben, sondern im Kopfe von $\log (ab)$ subtrahirt werden; auch können die Bezeichnungen vor den Logarithmen, als aus der Ordnung der Rechnungen von selbst ersichtlich, weggelassen werden, so dass das vorstehende Schema sich noch mehr vereinfacht.

b. Gegeben seien die Hypotenuse c und eine Kathete a.

Auflösung: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 90° - \alpha$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Bei numerischen Beispielen kann man $b = \sqrt{(c-a)(c+a)}$ setzen, wobei die

Faktoren des Radikanden vor der Anwendung der Logarithmen berechnet werden, die logarithmische Rechnung also keine Unterbrechung erleidet. — Da α durch den Sinus bestimmt ist, so kann ein Mangel an Genauigkeit bei der Berechnung dieses Winkels eintreten, da die Tafeln für Winkel, welche nahe an 90° sind, die letzteren durch die Sinus nicht scharf bestimmen lassen. In diesem Falle kann man $\cos\beta = \frac{a}{c}$ benutzen und hieraus $\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \frac{c-a}{c+a}$ ableiten, so dass man $\tang\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$ und hierdurch den Winkel β stets scharf bestimmt erhält. Da hierbei für β dieselben Logarithmen wie zur Berechnung von b gebraucht werden, so empfiehlt sich dieses Verfahren auch dann, wenn α nicht nahe an 90° ist. Weniger bequem ist es, die Ungenauigkeit für α dadurch zu umgehen, dass man zuerst b und dann mittelst dessen Hülfe $\tang\alpha = a : b$ berechnet.

Beispiel: $c = 23{,}471$; $a = 15{,}961$.

$c - a = 7{,}510$	$\log a = 1{,}20306$	oder $\log\tang^2\frac{1}{2}\beta = 9{,}27979$
$c + a = 39{,}432$	$\log c = 1{,}37053$	$\log\tang\frac{1}{2}\beta = 9{,}63990$
$\log(c-a) = 0{,}87564$	$\log\sin\alpha = 9{,}83253$	$\frac{1}{2}\beta = 23°34',6$
$\log(c+a) = 1{,}59585$	$\alpha = 42°50',8$	$\beta = 47°9',2$
$\log b^2 = 2{,}47149$	$\beta = 47°9',2$	$\alpha = 42°50',8$
$\log b = 1{,}23575$		
$b = 17{,}209$		

c) Gegeben seien die Hypotenuse c und ein Winkel α.

Auflösung: $\beta = 90° - \alpha$; $a = c.\ \sin\alpha$; $b = c\cdot\cos\alpha$.

Beispiel: $c = 146{,}92$, $\alpha = 47°44,'8$.

$\log c = 2{,}16708$	$a = 108{,}75$
$\log\sin\alpha = 9{,}86934$	$b = 98{,}79$
$\log\cos\alpha = 9{,}82764$	$\beta = 42°15,'2$
$\log a = 2{,}03642$	
$\log b = 1{,}99472$	

d) Gegeben seien eine Kathete a und der ihr gegenüberliegende Winkel α.

Auflösung: $\beta = 90° - \alpha$; $c = a : \sin\alpha$; $b = a\cdot\cot\alpha$.

Beispiel: $a = 0{,}31457$, $\alpha = 88°59,'9$

$\log a = 9{,}49772$	$c = 0{,}31462$
$\log\sin\alpha = 9{,}99993$	$b = 0{,}05500$
$\log\cot\alpha = 8{,}24264$	$\beta = 1°0,'1.$
$\log c = 0{,}49779$	
$\log b = 8{,}74036.$	

e) Gegeben seien eine Kathete a und der ihr anliegende Winkel β.

Auflösung: $\alpha = 90° - \beta$; $c = a : \cos\beta$; $b = a\cdot\tang\beta$.

Beispiel: $a = 2594{,}8$, $\beta = 60°0,'5$

$\log a = 3{,}41411$	$c = 5191{,}0$
$\log\cos\beta = 9{,}69886$	$b = 4495{,}9$
$\log\tang\beta = 10{,}23871$	$\alpha = 29°59,'5.$
$\log c = 3{,}71525$	
$\log b = 3{,}65282.$	

Der Flächeninhalt wird in den Fällen b) — e), wenn zuvor die übrigen gesuchten Stücke berechnet sind, immer am kürzesten mittelst der Formel $F = \frac{1}{2}ab$ gefunden. Wird dagegen F allein gesucht, so leitet man leicht aus

den in den einzelnen Fällen oben für a und b gefundenen Werthen direkte Formeln für diesen Zweck ab. Man erhält bezüglich

$F = \frac{1}{2} a \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $\frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4} c^2 . \sin 2\alpha$ oder $\frac{1}{2} a^2 \cdot \cot\alpha$, oder $\frac{1}{2} a^2 \cdot \tan\beta$.

§ 3. Berechnung gleichschenkeliger Dreiecke und regelmässiger Polygone.

Die Berechnung gleichschenkeliger Dreiecke lässt sich unmittelbar auf diejenige von rechtwinkeligen zurückführen, da jedes gleichschenkelige Dreieck durch die auf der Basis desselben senkrechte Höhe in zwei congruente rechtwinkelige zerlegt wird. Die Berechnung der letzteren aus irgend zwei gegebenen Bestimmungsstücken des ersteren (einschliesslich der Höhe) bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Ebenso wird die Berechnung eines regelmässigen Polygons unmittelbar auf die Berechnung eines rechtwinkeligen Dreiecks, nämlich des sogenannten Bestimmungsdreiecks des ersteren zurückgeführt.* Die Stücke dieses Dreiecks, nämlich ein grosser Radius r, ein kleiner Radius ρ, eine halbe Polygonseite, die Hälfte eines Polygonwinkels und die Hälfte des Centriwinkels, gelten zugleich als Bestimmungsstücke des Polygons. Zu denselben tritt die Anzahl n der Seiten, durch welche der Centriwinkel $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ bestimmt wird (und umgekehrt).

Als unmittelbare Anwendung der Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke erscheint endlich die Berechnung von Sehnen eines Kreises aus ihrem Centriwinkel (oder Bogen) und dem Radius, oder umgekehrt eines der letzteren aus den beiden anderen. Zieht man nämlich die Radien nach den Endpunkten der Sehne, so erhält man ein gleichschenkeliges Dreieck, und das durch Halbirung des letzteren, wie oben angegeben, entstehende rechtwinkelige Dreieck liefert ohne Weiteres die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} s : r = \sin \tfrac{1}{2} \alpha,$$

wenn s die Maasszahl der ganzen Sehne, r die des Radius und α die des ganzen Centriwinkels bedeutet. Diese, einfacher in der Form

$$s = 2r \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

geschriebene Gleichung giebt die zwischen s, r und α bestehende Beziehung an und gestattet die Berechnung einer jeden dieser drei Grössen aus den beiden übrigen mittelst Auflösung der Gleichung auf jene.

Man vergleiche Planimetrie § 58.

Die Bestimmung von α ist hierbei, da sie durch den Sinus geschieht, zweideutig, entsprechend den beiden zu einer gegebenen Sehne gehörigen Centriwinkeln oder Bogen.

Statt des halben Centriwinkels kann auch jeder der beiden zur Sehne gehörigen Peripheriewinkel gesetzt werden.

Beispiel: Wieviel beträgt der Flächeninhalt eines regelmässigen Achtzehnecks, dessen Umfang gleich 102,96 dm ist?

Auflösung: Der Flächeninhalt eines regelmässigen Polygons ist gleich der Hälfte des Produkts aus seinem Umfang und seinem kleinen Radius. Es ist also zunächst dieser Radius ρ zu bestimmen, und diese Aufgabe ist identisch mit derjenigen, aus der Länge einer Sehne eines Kreises und dem zugehörigen Centriwinkel den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt, oder auch aus der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks und dem Winkel an der Spitze die Höhe zu berechnen.

Es ist nämlich diese Sehne, bezw. diese Basis s gleich der Seite des Acht-

zehnecks, also gleich dem achtzehnten Theil des gegebenen Umfangs u, und der genannte Winkel α gleich dem achtzehnten Theil von 360° oder gleich 20°. Daher hat man

$$\frac{1}{2}s : \rho = tang\frac{1}{2}\alpha, \text{ oder } \rho = \frac{1}{2}s \cdot cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{51,48}{18} cot 10°,$$

und mithin den gesuchten Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 102,96 \cdot \frac{51,48}{18} cot 10° = \frac{51,48^2}{18} cot 10° = 2,86 \cdot 51,48 \cdot cot 10°.$$

Ausrechnung:

$$\begin{aligned} log\, 2,86 &= 0,45637 \\ log\, 51,48 &= 1,71164 \\ log\, cot\, 10° &= 10,75368 \\ log\, F &= 2,92169 \\ F &= 835,00 \square \text{ dm.} \end{aligned}$$

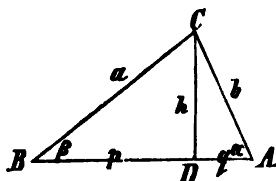
Kapitel 4.
Das allgemeine Dreieck.

§ 14. Die Fundamental-Formeln.

1. Im Folgenden soll das zu berechnende Dreieck stets durch ABC bezeichnet werden. Die an A, B, C liegenden Winkel seien bezüglich gleich α, β, γ, die ihnen gegenüberliegenden Seiten in gleicher Reihenfolge gleich a, b, c.

Die Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke gelingt immer mittelst zweckmässiger Zerlegung derselben durch je eine Höhe in zwei rechtwinkelige. Um aber nicht diese Zerlegung und die Ableitung der Formeln aus derselben in jedem einzelnen Falle auf's Neue vornehmen zu müssen, sollen die zu jener Auflösung führenden Gleichungen auf dem angegebenen Wege ein- für allemal allgemein abgeleitet werden.

Es sei zu diesem Zwecke die Höhe CD auf AB gefällt und $CD = h$, $BD = p$, $AD = q$ gesetzt. Aus dem Dreieck BCD ergiebt sich dann $h = a \cdot sin\beta$, und aus dem Dreieck ACD, $h = b \cdot sin\alpha$. Daher ist $a \cdot sin\beta = b \cdot sin\alpha$. Durch Division beider Seiten dieser Gleichung mit $b \cdot sin\beta$ (Verwandlung der Gleichung zwischen zwei Produkten in eine Proportion) erhält dieselbe die bequemere Form



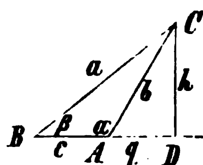
(M. 223.)

$$a : b = sin\alpha : sin\beta.$$

Da sich dieselbe Ableitung mit jeder der Höhen des Dreiecks ABC machen lässt, so ist auch

$$a : c = sin\alpha : sin\gamma \text{ und } b : c = sin\beta : sin\gamma.$$

Diese drei Formeln, welche sich durch blosse Vertauschung der entsprechenden Buchstaben aus einander ergeben, können in die folgende



(M. 224.)

$$a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma. \quad (1)$$

zusammengefasst werden. Der in ihr ausgesprochene Lehrsatz, dass die Seiten eines Dreiecks sich zu einander verhalten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel, wird der Sinussatz genannt.

Man vergleiche Planimetrie § 16.

Man erhält ferner mittelst der rechtwinkeligen Dreiecke BCD und ACD.

$$a^2 = h^2 + p^2;\ h^2 = b^2 - q^2;\ p^2 = (c \mp q)^2, \text{ also}$$
$$a^2 = b^2 - q^2 + (c \mp q)^2 = b^2 - q^2 + c^2 \mp 2cq + q^2, \text{ oder}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq.$$

Hierbei gilt das Zeichen — vor dem letzten Gliede, wenn der Winkel α spitz, das Zeichen +, wenn derselbe stumpf ist. Im ersteren Falle ergiebt sich aus dem Dreieck ACD, $q = b \cdot cos\,\alpha$, im letzteren $q = b \cdot cos\,(180° - \alpha) = - b \cdot cos\,\alpha$, daher ist in beiden Fällen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha. \quad (2)$$

Auch dieser Satz lässt sich selbstverständlich durch Vertauschung der Seiten und Winkel in noch zwei Formen aufstellen, nämlich

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,\beta \quad (2^a)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,\gamma. \quad (2^b)$$

Derselbe ist offenbar identisch mit dem Satze, welcher bereits in der Planimetrie § 44, (3) und § 48, (5) abgeleitet wurde. Wir bezeichnen deshalb denselben auch in seiner hier vorliegenden trigonometrischen Fassung mit dem dort angegebenen Namen des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes.

Die beiden vorstehenden Sätze gelten nicht bloss für schiefwinkelige, sondern auch für rechtwinkelige Dreiecke. Ist z. B. $\gamma = 90°$, so geht der erstere über in

$$a : b : c = sin\,\alpha : sin\,\beta : 1,$$

d. i. in die bekannten Formeln $a : c = sin\,\alpha$, $b : c = sin\,\beta$, $a : b = sin\,\alpha : sin\,\beta$, d. h. wegen $\beta = 90° - \alpha$, $a : b = sin\,\alpha : cos\,\alpha = tang\,\alpha$. Ebenso geht für $\gamma = 90°$ die dritte Form des zweiten Satzes wegen $cos\,\gamma = 0$ über in $c^2 = a^2 + b^2$, d. i. in den speciellen pythagoreischen Lehrsatz, und die beiden anderen Formen in Folge dessen in

$a^2 = b^2 + a^2 + b^2 - 2bc\,cos\,\alpha$, d. i. $2b^2 = 2bc\,cos\,\alpha$; $b = c \cdot cos\,\alpha$, und entsprechend $a = c \cdot cos\,\beta = c \cdot sin\,\alpha$.

Die beiden vorstehenden Lehrsätze haben also allgemeine Gültigkeit und dürfen daher auch auf rechtwinkelige Dreiecke angewendet werden, z. B. wenn es nicht im Voraus bekannt gewesen sein sollte, dass einer der Winkel eines aufzulösenden Dreiecks ein rechter war.

2. Ehe wir zur Anwendung der beiden Sätze (1) und (2) auf die Berechnung von Dreiecken übergehen, wollen wir diese Sätze selbst noch einer genaueren Betrachtung unterziehen.

Der Sinussatz lässt sich auch in der Gestalt

$$\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma}$$

schreiben. In dieser Form haben die drei Seiten desselben eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung: Sind nämlich in einem und demselben Kreise beliebige Sehnen $a, b, c, \ldots$ gezogen, und sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezüglich zu diesen Sehnen gehörige Peripheriewinkel, so ist, wie bereits im § 13 gezeigt wurde,

$$a = 2r \cdot sin\,\alpha,\ b = 2r \cdot sin\,\beta,\ c = 2r \cdot sin\,\gamma,$$

wenn r den Radius des Kreises bedeutet. Daher ist

$$2r = \frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma} = \ldots.$$

Da sich nun um jedes Dreieck ein Kreis beschreiben lässt, so ergiebt sich hieraus der Sinussatz in der obigen Form und zugleich die geometrische Deutung der drei Seiten desselben als des Durchmessers des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz, welcher in seiner obigen

trigonometrischen Form von verschiedenen Schriftstellern noch verschiedene andere Namen (Projectionssatz, Cosinussatz) erhalten hat, gestattet ebenfalls Umformungen. So ist

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc - 2bc\cos\alpha = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha),$$

also wegen $(1+\cos\alpha) = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha$,

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ebenso erhält man, wenn man zuerst $-2bc$ und dann $+2bc$ hinzufügt,

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

Aus diesen beiden Gleichungen leitet man, indem man die erste mit $\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, die zweite mit $\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ multiplicirt und dann addirt, leicht die dritte ab:

$$a^2 = [(b+c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha]^2 + [(b-c)\cos\tfrac{1}{2}\alpha]^2$$

Die beiden in diesem § 14, No. 1. abgeleiteten Lehrsätze reichen hin, um die Berechnung eines Dreiecks in jedem einzelnen Falle zu ermöglichen, wie im Folgenden zunächst nachgewiesen werden soll.

§ 15. Erster Fall: Gegeben sei eine Seite a nebst zwei Winkeln.

Da aus zwei Winkeln eines Dreiecks der dritte stets leicht durch Subtraction der Summe der ersteren von 180 Grad gefunden wird, so können alle drei Winkel α, β, γ als bekannt vorausgesetzt werden.

Der Sinussatz liefert dann leicht durch Auflösen auf die Unbekannten b und c:

$$b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Für die Ausführung numerischer Rechnungen schreibt man besser

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta,\quad c = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma,$$

oder auch

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha},\quad b = 2r\sin\beta,\quad c = 2r\sin\gamma.$$

Diese Formen weisen darauf hin, dass $\frac{a}{\sin\alpha}$ oder $2r$ für die beiden gesuchten Seiten nur einmal zu berechnen ist, und erleichtern überhaupt das Behalten der Gleichungen und das rasche und sichere Hinschreiben auch bei anderer Bezeichnung der gegebenen Stücke. Die logarithmische Rechnung kann somit nach folgendem Schema ausgeführt werden:

a		, z. B. $a = 5{,}4238$	0,73430
α	$\log a$ (−)	$\alpha = 33°17'20''$	9,73946
β	$\log\sin\alpha$	$\beta = 75°39'14''$	0,99484
$\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$	$\log 2r$ (+)	$\gamma = 71°\ 3'26''$	9,98624
	$\log\sin\beta$		9,97582
	$\log\sin\gamma$ (+)	$b = 9{,}5738$	0,98108
b	$\log b$	$c = 9{,}3468$	0,97066
c	$\log c$		

§ 16. Zweiter Fall: Gegeben seien zwei Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ.

1. Durch den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz findet man zunächst die dritte Seite

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}. \quad (1)$$

Mit Hülfe derselben lassen sich dann die fehlenden Winkel durch den Sinussatz finden. Man hat zu diesem Zwecke:

$$2r = \frac{c}{\sin\gamma};\ \sin\beta = \frac{b}{2r},\ \sin\alpha = \frac{a}{2r}.$$

Die Summe der drei Winkel liefert dann eine bequeme Probe der Richtigkeit der Rechnung.

2. Sollen dagegen — wie namentlich bei complicirteren Aufgaben behufs Substitution der Formel-Werthe in andere Gleichungen verlangt werden kann — die gesuchten Winkel unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausgedrückt werden, so ist eine besondere Gleichung abzuleiten: Die im § 14 gebrauchten Figuren führen auf

$$\tan g\,\alpha = \pm\frac{h}{q},\ h = a\cdot\sin\beta,\ q = \pm(c-p) = \pm(c - a\cos\beta),$$

also für spitze wie stumpfe Werthe von α übereinstimmend:

$$\tan g\,\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{c - a\cdot\cos\beta}. \qquad (2)$$

Diese Gleichung lässt sich für jeden der drei Winkel des Dreiecks in zwei Formen aufstellen; man hat nämlich ebenso

$$\tan g\,\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{b - a\cdot\cos\gamma},\ \text{und entsprechend}$$

$$\tan g\,\beta = \frac{b\cdot\sin\gamma}{a - b\cos\gamma} = \frac{b\cdot\sin\alpha}{c - b\cdot\cos\alpha},$$

$$\tan g\,\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{b - c\cos\alpha} = \frac{c\cdot\sin\beta}{a - c\cdot\cos\beta}.$$

Für den in diesen sechs Formen auftretenden Lehrsatz ist der Name separirter Tangentensatz vorgeschlagen worden.

Sind, wie oben angenommen. a, b und γ gegeben, so liefert derselbe durch

$$\tan g\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma},\ \tan g\,\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

die beiden fehlenden Winkel, und man kann sich dann wieder der Winkelsumme zu einer Probe bedienen.

Selbstverständlich kann man auch, nachdem einer der beiden Winkel gefunden ist, stets den dritten mittelst der Winkelsumme berechnen, womit natürlich auf die Benutzung der letzteren zur Probe verzichtet wird. Auch steht nichts im Wege, nach Berechnung des einen Winkels durch die separirte Tangentenformel den anderen mit Hülfe des ersteren durch den Sinussatz zu suchen, bezw. die Berechnung durch letzteren zur Probe zu benutzen.

Endlich kann man auch, nachdem zuerst die Winkel bestimmt sind, c mit ihrer Hülfe durch den Sinussatz berechnen.

3. Die vorstehenden Formeln (1) und (2) gestatten jedoch bei numerischen Rechnungen keine ununterbrochene Anwendung der Logarithmen, und deshalb sollen für den Fall, dass dies in's Gewicht fällt, im Folgenden noch andere Gleichungen abgeleitet werden, welche dann für die vorliegende Aufgabe bequemer sind.

Aus $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ folgt

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

oder wegen $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$,

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

Entsprechend ist

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}, \text{ oder}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Wir formen die so abgeleiteten Gleichungen durch Wegschaffung ihrer Nenner um und erhalten

$$(a-b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}\gamma = c\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad (3)$$

$$(a+b)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\gamma = c\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta). \qquad (4)$$

Diese beiden Gleichungen werden die MOLLWEIDE'sche Doppelformel genannt. Durch Division derselben ergiebt sich der Tangentensatz:

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta), \qquad (5)$$

welcher sich, unter Berücksichtigung, dass $\cot\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ist, auch in der für das gedächtnissmässige Behalten bequemeren Form

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \qquad (6)$$

schreiben lässt.

Dieser Tangentensatz erleichtert auch das sichere Behalten der MOLLWEIDE'schen Formeln. Man zerlege zu diesem Zwecke nur in (5) wieder $\cot\frac{1}{2}\gamma$ in $\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ und $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ in $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$.

Sollen nun aus a, b und γ die übrigen Stücke durch logarithmische Rechnung ermittelt werden, so sind die linken Seiten der Doppelformel (3) und (4) durch die gegebenen Grössen bekannt. Durch Division derselben erhält man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und hieraus den Winkel $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Da nun auch $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ durch die Winkelsumme bekannt ist, so ergiebt die Addition und Subtraction dieser beiden Winkel die Werthe von α und β. — Selbstverständlich kann dann die Winkelsumme nicht auch noch zur Probe dienen.

Zu $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ kann man ferner auch $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $\cos\frac{1}{2}\alpha-\beta$ bestimmen und durch Division dieses Faktors in der betreffenden der Gleichungen (3), (4) erhält man beidemale c.

Die logarithmische Berechnung aller drei gesuchten Grössen kann also nach folgendem Schema geschehen:

a	$\log(a-b)$ } +		$\log(a+b)$ } +		
b	$\log\cos\frac{1}{2}\gamma$		$\log\sin\frac{1}{2}\gamma$		
γ	$\log A$	—	$\log B$	=	$\log tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
$a-b$	$\log\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$		$\log\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$		$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
$a+b$	$\log c$	=	$\log c$		$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
$\frac{1}{2}\gamma$.		c.			α
					β.

Beispiel: $a = 147{,}63$	1,68205	2,39300	9,38594
$b = 99{,}54$	9,89257	9,79568	13°40',1
$\gamma = 77^\circ\,19',3$	1,57462	2,18868	51°20',3
48,09	9,37346	9,98753	65° 0',4 = α
247,17	2,20116	2,20115	37°40',2 = β
38° 39',65	$c = 158{,}91$		

Ist die Berechnung der dritten Seite c nicht erforderlich, so berechnet man die beiden Winkel etwas kürzer, indem man unmittelbar die Tangentenformel (5) anwendet.

§ 17. Dritter Fall: Gegeben seien zwei Seiten und einer der denselben gegenüberliegenden Winkel.

Aus a, b und α findet man zunächst den anderen gegenüberliegenden Winkel mittelst des Sinussatzes:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a},$$

darauf γ durch die Winkelsumme und zuletzt c wieder mittelst des Sinussatzes:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma \text{ oder } \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma.$$

Für die numerische Berechnung beachte man wieder, dass $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$ nur einmal zu berechnen ist, indem man dann

$$\sin\beta = \frac{b}{2r}, \quad c = 2r\sin\gamma$$

hat.

Die Rechnung gestattet ohne Weiteres eine ununterbrochene Anwendung der Logarithmen. Die Bestimmung des Winkels β durch den Sinus führt auf eine Zweideutigkeit der Aufgabe, da es zweifelhaft bleibt, ob für β der spitze oder der stumpfe Winkel zu diesem Sinus zu wählen ist. Nur, wenn der gegebene Winkel α der grösseren der gegebenen Seiten gegenüberliegt, hier also wenn $a > b$ ist, versteht es sich von selbst, dass der andere Winkel β nicht stumpf sein kann, denn nur der grössten Seite eines Dreiecks kann ein stumpfer Winkel gegenüberliegen. Der angegebene Zweifel besteht also nur für den Fall, dass der gegebene Winkel der kleineren gegebenen Seite gegenüberliegt, und dann ist stets die Rechnung für beide möglichen Dreiecke neben einander durchzuführen, falls nicht etwa jener Zweifel von anderer Seite her gehoben wird. Letzteres kann in praktischen Fällen durch eine schon vorher gegebene Anschauung des zu berechnenden Dreiecks geschehen sein.

Werden für a, b und α ganz willkürlich Zahlenwerthe angenommen, so kann in dem vorliegenden Falle die Auflösung ganz unmöglich werden. Dies tritt ein, wenn $b \cdot \sin\alpha > a$ ist, also für $\sin\beta$ ein Werth grösser als 1, bezw. für $\log\sin\beta$ ein Werth grösser als 0 (10,00000) gefunden wird, zu welchem sich selbstverständlich auch aus den Tafeln kein Winkel ergiebt. Findet man $b \cdot \sin\alpha = a$, so ist $\beta = 90°$, das Dreieck also bestimmt, und die weitere Berechnung kann mit den einfacheren Formeln geschehen, welche für das rechtwinkelige Dreieck gelten. Ist $b \sin\alpha < a$, so gelten die vorhergehenden Erwägungen. Der daselbst nicht erwähnte Fall $a = b$, in welchem ebenfalls nur ein Dreieck möglich ist, kommt hier nicht in Betracht, da man in demselben das Dreieck von vorneherein als gleichschenkeliges behandeln wird.

Vergl. Planimetrie § 18, (4) und § 32, (10).

Beispiel: $a = 3{,}456$	$\log a = 0{,}53857$	$\beta_1 = 74° 18'$	
$b = 4{,}720$	$\log\sin\alpha = 9{,}84812$	$\beta_2 = 105° 42'$	
$\alpha = 44° 49',2$	$\log 2r = 0{,}69045$	$\gamma_1 = 60° 53'$	
	$\log b = 0{,}67394$	$\gamma_2 = 29° 29'$	
	$\log\sin\beta = 9{,}98349$		
	$\log\sin\gamma_1 = 9{,}94133$		
	$\log\sin\gamma_2 = 9{,}69212$		
	$\log c_1 = 0{,}63178$	$c_1 = 4{,}283$	
	$\log c_2 = 0{,}38257$	$c_2 = 2{,}413,$	

[illegible] drei Seiten.

[illegible] in seinen drei Formen [illegible] zur Behandlung dieses [illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible] mit dem von anderen für [illegible]

[illegible] dass die Berechnung der [illegible] macht, so tritt bei [illegible] dass dieselben keine [illegible] dieser Voraussetzung [illegible] zweckmässigerer Formeln [illegible]

[illegible]

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

[illegible] Lehrsatz $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ [illegible] gefundenen Ausdruck in die Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

[illegible]

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}}, \qquad (1)$$

[illegible]

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a + b - c)(b + c - a)}{4ac}}, \qquad (1^a)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(b + c - a)(a - b + c)}{4ab}}. \qquad (1^b)$$

Aus diesen drei Formeln kann man schon die drei Winkel durch ununterbrochene logarithmische Rechnung finden, da die Trinome in den Zählern der Radicanden vor dem Gebrauch der Logarithmentafel ausgerechnet werden.

Man kann aber auch in ganz analoger Weise, wie folgt, verfahren:

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}, \text{ also}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}}, \qquad (2) \text{ und entsprechend}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a - b + c)}{4ac}} \qquad (2^a)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4ab}} \qquad (2^b)$$

3. Die vorstehenden Formeln können ganz in gleicher Weise wie die vorangegangenen benutzt werden. Zweckmässiger noch ist, aus beiden Gruppen von Formeln durch Division je zweier einander entsprechenden eine dritte Gruppe abzuleiten. Unter Berücksichtigung der arithmetischen Sätze

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ und } \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \text{ erhält man leicht}$$

$$\begin{aligned} tang\, \tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}} \\ tang\, \tfrac{1}{2}\beta &= \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a-b+c)}} \qquad (3) \\ tang\, \tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{\frac{(b+c-a)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}} \end{aligned}$$

Man kann die für die Functionen der halben Winkel in diesem Paragraphen gefundenen Formeln noch in abgekürzter Weise schreiben, indem man für den Umfang $a+b+c$ des Dreiecks die Bezeichnung $2 \cdot s$ einführt. Dann ist

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2(s-c), \text{ und entsprechend}$$
$$a-b+c = 2(s-b),\; b+c-a = 2(s-a).$$

Durch Einführung dieser Abkürzungen erhalten die Formeln (3) die Gestalt

$$\begin{aligned} tang\, \tfrac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ tang\, \tfrac{1}{2}\beta &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \qquad (3^a) \\ tang\, \tfrac{1}{2}\gamma &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned}$$

4. Für die gleichzeitige numerische Berechnung der drei Winkel lassen sie sich endlich in eine noch bequemere Form bringen, indem man die Radicanden bezüglich mit $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ erweitert und die in den Nennern entstehenden quadratischen Faktoren vor die Wurzelzeichen bringt, also z. B.

$$tang\, \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s \cdot (s-c)^2}} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

setzt. Führt man dann noch für die allen drei Formeln jetzt gemeinschaftliche Wurzelgrösse eine kürzere Bezeichnung ein, setzt also

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \rho, \qquad (4)$$

so hat man die einfachen Gleichungen:

$$tang\, \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\rho}{s-a},\; tang\, \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\rho}{s-b},\; tang\, \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\rho}{s-c}. \qquad (5)$$

Die numerische Berechnung kann nunmehr nach Anleitung des folgenden Schemas und Beispiels geschehen:

$$\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right\} + & \left.\begin{array}{l} log\,(s-a) \\ log\,(s-b) \\ log\,(s-c) \end{array}\right\} + & \begin{array}{ll} log\, tang\, \tfrac{1}{2}\alpha & \alpha \\ log\, tang\, \tfrac{1}{2}\beta & \beta \\ log\, tang\, \tfrac{1}{2}\gamma & \gamma. \end{array} \\ \hline 2s & log\, Z & \tfrac{1}{2}\alpha \\ \left.\begin{array}{l} s \\ s-a \\ s-b \\ s-c \end{array}\right\} + & \left.\begin{array}{l} log\, Z \\ log\, s \end{array}\right\} - & \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\beta \\ \tfrac{1}{2}\gamma \end{array} \\ & log\, \rho^2 & \hline 90^\circ \\ \hline 2s & log\, \rho & \end{array}$$

9,768	0,57217	9,83670	$\alpha = 68°56'49''$
8,324	0,71416	9,69471	$\beta = 52°40'54''$
8,912	0,66181	9,74706	$\gamma = 58°22'16''$
27,004	1,94814	34°28'24''4	179°59'59''
13,502	1,13040	26°20'27''1	
3,734	0,81774	29°11' 8''0	
5,178	0,40887	89°59'59''5	
4,590			
27,004			

Die Winkelsumme bietet hier eine Probe, welche jedoch, wie das vorstehende Beispiel zeigt, in Folge der Ungenauigkeiten der Rechnung mit abgekürzten Zahlen eine kleine Abweichung zeigen kann. Durch eine etwas genauere Interpolation, welche bei den Logarithmen die sechste Decimale mit berücksichtigt, kann dieselbe ausgeglichen werden.

§ 19. Berechnung des Flächeninhalts.

Die Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks kann in jedem der vorstehenden einzelnen Fälle der Berechnung der übrigen Stücke angeschlossen werden, indem man sich der Gleichung

$$F = \tfrac{1}{2}ab \cdot sin\gamma, \quad (1)$$

oder $F = \frac{1}{2}ac\ sin\beta = \frac{1}{2}bc\ sin\alpha$ bedient, welche aus dem planimetrischen Lehrsatz $F = \frac{1}{2}ch$ hervorgeht, wenn man daselbst $h = b\,sin\alpha$ einsetzt. Es ist also der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks gleich der Hälfte des Produkts aus zwei beliebigen seiner Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Soll jedoch der Flächeninhalt unmittelbar aus den gegebenen Stücken gefunden werden, etwa weil die übrigen Stücke gar nicht verlangt sind, oder behufs Einsetzung des Formelwerthes von F in eine andere Gleichung, so ist der vorstehende Lehrsatz nur dann zu gebrauchen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. In den übrigen Fällen kann man die erforderlichen Formeln durch Einsetzung der für die betreffenden nicht gegebenen Stücke gefundenen Ausdrücke in die obige Gleichung ableiten. So erhält man z. B. für den ersten Fall, wenn a und die Winkel gegeben sind, mittelst $b = \frac{a}{sin\alpha} \cdot sin\beta$,

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 sin\beta\, sin\gamma}{sin\alpha}.$$

Eine besonders bequeme direkte Formel erhält man für den Fall, in welchem die drei Seiten gegeben sind. Aus den früher (§ 18) abgeleiteten Formeln, welche $sin\frac{1}{2}\alpha$ und $cos\frac{1}{2}\alpha$ durch a, b und c ausdrücken, folgt mit Hülfe von $sin\alpha = 2 \cdot sin\frac{1}{2}\alpha \cdot cos\frac{1}{2}\alpha$,

$$sin\,\alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} \cdot \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}},$$

oder nach Einführung von $a + b + c = 2s$ und Ausführung der Multiplication

$$sin\,\alpha = 2\sqrt{\frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4 \cdot 4 \cdot (bc)^2}}, \text{ d. i.}$$

$$sin\,\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Die Aufstellung der entsprechenden Formeln für die Sinus von β und γ kann dem Leser überlassen bleiben. Durch Substitution in $F = \frac{1}{2}bc \cdot sin\alpha$ ergiebt sich nun

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (2)$$

Die Formel ist, da sie keine trigonometrische Function mehr enthält, der Natur der Sache nach gar keine trigonometrische, sondern eine — hier nur mit Hülfe der Trigonometrie abgeleitete — rein geometrische. Dieselbe kann daher auch rein geometrisch abgeleitet werden. Vergl. Plan. § 48, (5).

Die numerische Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks nach dieser Formel bedarf keiner Erläuterung. Sind die Winkel vorher nach der Anleitung in § 18 berechnet worden, so ergiebt sich ein leichter Anschluss an diese Rechnung. Man hat nur die schon vorhandenen Logarithmen von ρ und von s zu addiren, um den $\log F$ zu erhalten. So war in dem obigen Zahlenbeispiel

$$\log \rho = 0{,}40887$$
$$\log s = 1{,}13040$$

also ist

$$\log F = 1{,}53927$$
$$F = 34{,}615.$$

III. Abschnitt.
Sphärische Trigonometrie.

Vorbemerkung.

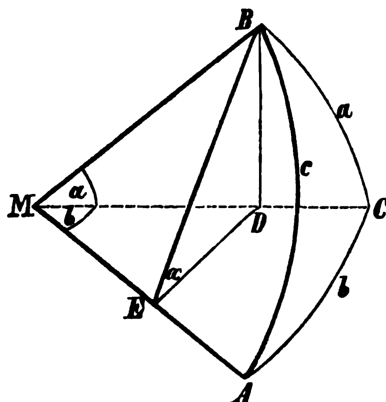
Die sphärische Trigonometrie hat die Aufgabe zu lösen, aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreiecks die übrigen zu berechnen. Hierzu wird an dieser Stelle der Begriff des sphärischen Dreiecks nebst den in Stereometrie § 15 und § 19 behandelten Eigenschaften desselben als bekannt vorausgesetzt. Wir beschränken uns ferner im Folgenden auf die Auflösung solcher sphärischen Dreiecke, in denen jede Seite kleiner als ein Halbkreis ist. Dreiecke, welche diese Bedingung nicht erfüllen, können leicht durch Zerlegung in zwei oder mehrere auf solche zurückgeführt werden, bei welchen dies der Fall ist. Die Aufstellung dieser beschränkenden Bedingung ist übrigens nicht nothwendig, vielmehr könnte durch Beseitigung derselben den nachfolgenden Entwicklungen mit geringer Abänderung der Charakter völliger Allgemeinheit gewahrt werden, doch gewinnt im anderen Falle die Darstellung an Einfachheit und leichterer Verständlichkeit.

Wir bezeichnen im Folgenden in entsprechender Weise wie bei den ebenen Dreiecken ein sphärisches Dreieck stets durch ABC, die Maasszahlen seiner Seiten BC, AC, AB bezüglich durch a, b, c und die den Eckpunkten A, B, C anliegenden inneren Winkel der Reihe nach durch α, β, γ, endlich den Flächeninhalt des Dreiecks durch F. Die Maasszahlen der Seiten werden stets in Gradmaass ausgedrückt, so dass der Radius der betreffenden Kugel ohne Einfluss auf dieselben ist und, wo es erforderlich erscheinen sollte, denselben in die Entwicklungen einzuführen, in der Regel der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt werden kann. Auch der Flächeninhalt F werde zunächst für den Radius 1 bestimmt gedacht und kann dann auch für jeden anderen Radius r, ebenso wie die Maasszahlen der Seiten in Längenmaass, wenn sie verlangt werden sollten, nach bekannten geometrischen Sätzen (Planimetrie § 58; Stereometrie § 19, (5) berechnet werden.

Kapitel 5.
Rechtwinkelige sphärische Dreiecke.

§ 20. Die Fundamental-Formeln.

Es sei im sphärischen Dreieck ABC der Winkel γ als rechter bekannt, und es seien die übrigen Stücke des Dreiecks zunächst sämmtlich kleiner als 90° vorausgesetzt. Ferner sei M der Mittelpunkt der Kugel, also $MA = MB = MC = 1$ angenommen und $\angle BMC = a$, $\angle CMA = b$, $\angle BMA = c$. Fällt man nun die Gerade BD senkrecht auf MC, BE senkrecht auf MA und verbindet D mit E, so ist nach Stereom. § 2, (5) DE senkrecht auf MA und der Winkel BED daher der Neigungswinkel des Flächenwinkels an MA, also gleich dem Winkel α des sphärischen Dreiecks. Ferner ist nach Stereom. § 5 ($3a$) BD senkrecht zur Ebene MCA und also auch zu DE. Nun ist im rechtwinkeligen Dreieck MBD,



(M. 225.)

$$MD = \cos a,\ BD = \sin a,$$

im rechtwinkeligen Dreieck MBE

$$ME = \cos c,\ BE = \sin c,$$

und im rechtwinkeligen Dreieck MDE

$$ME = MD \cos b = \cos a \cdot \cos b,\ DE = MD \sin b = \cos a \cdot \sin b.$$

Die Vergleichung der beiden im Vorstehenden für ME gefundenen Ausdrücke liefert unmittelbar die Formel

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \qquad (1)$$

Setzt man in den durch das rechtwinkelige Dreieck BED gegebenen Gleichungen

$$\sin \alpha = \frac{BD}{BE},\ \cos \alpha = \frac{DE}{BE},\ \tang \alpha = \frac{BD}{DE}$$

die im Vorstehenden für die betreffenden Strecken gefundenen Werthe ein, so erhält man

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad (2)$$

ferner $\cos \alpha = \frac{\cos a \ \sin b}{\sin c}$, und wenn man hier aus (1) $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$ einsetzt, durch eine leichte Umformung

$$\cos \alpha = \frac{\tang b}{\tang c} \qquad (3)$$

und $\tang \alpha = \frac{\sin a}{\cos a \cdot \sin b}$, oder

$$\tang \alpha = \frac{\tang a}{\sin b} \qquad (4)$$

Den Formeln (2) bis (4) entsprechend müssen für den Winkel β des sphärischen Dreiecks die Gleichungen

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c},\ \cos \beta = \frac{\tang a}{\tang c},\ \tang \beta = \frac{\tang b}{\sin a}$$

bestehen. Durch Verbindung der ersten derselben mit der vorher abgeleiteten Formel $\cos\alpha = \frac{\cos a \cdot \sin b}{\sin c}$ erhält man noch

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta, \quad (5)$$

und durch Verbindung der letzten mit (4) endlich

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\cos a \cdot \cos b},$$ oder unter Anwendung von (1)

$$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta. \quad (6)$$

Die vorstehend entwickelten sechs Formeln enthalten, wie sogleich im Einzelnen gezeigt werden soll, die Lösung der Aufgabe, aus zwei neben dem rechten Winkel gegebenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks die übrigen zu berechnen. Da dieselben aber nur unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass alle Stücke des Dreiecks ausser γ kleiner als 90° seien, so muss vor jener Anwendung der Beweis geliefert werden, dass dieselben auch ohne diese Bedingung gültig bleiben. Für diesen Beweis ist nur nöthig, noch die beiden Fälle zu unterscheiden, dass eine einzelne der Katheten und dass beide Katheten grösser als 90° sind, denn nach Stereom. § 15 ist im ersteren Fall der der kleineren Kathete gegenüberliegende Winkel nothwendig spitz, der der grösseren gegenüberliegende stumpf und die Hypotenuse grösser als 90°, während im letzteren Fall nothwendig beide Winkel stumpfe sein müssen und die Hypotenuse kleiner als 90° sein muss. Man kann nun in beiden Fällen eine Figur in analoger Weise, wie vorhin geschehen, construiren und dann an ihr dieselben Formeln wie oben, ebenfalls in ganz entsprechender Weise ableiten. Es fällt dabei, wenn $BC < 90°$, $AC > 90°$ ist, E auf die Verlängerung von AM, wenn $BC > 90°$ und $AC > 90°$ ist, D auf die Verlängerung von CM, und im letzteren Fall enthält das Dreieck BDE statt des Winkels α den Nebenwinkel desselben. Entsprechendes ergiebt sich, wenn $BC > 90°$ und $AC < 90°$ ist. Eine nähere Ausführung des Beweises wird hiernach nicht nothwendig sein, und es kann somit die allgemeine Gültigkeit der obigen sechs Gleichungen für constatirt gelten.*)

§ 21. Die Berechnung der Dreiecke.

Die einzelnen Fälle, welche bei der Berechnung rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke vorkommen können, sind folgende:

1) Gegeben seien die beiden Katheten a, b. Man findet die Hypotenuse c unmittelbar durch die Gleichung (1) und die Winkel durch (4) und die ihr entsprechende Gleichung für β.

Es sei beispielsweise $a = 20°\ 5',7$, $b = 72°\ 8',9$ gegeben, so hat man folgende Ausrechnung:

$\log\cos a = 9{,}97272$	$\log\operatorname{tang} a = 9{,}56330$	$\log\operatorname{tang} b = 0{,}49207$
$\log\cos b = 9{,}48651$	$\log\sin b = 9{,}97857$	$\log\sin a = 9{,}53603$
$\log\cos c = 9{,}45923$	$\log\operatorname{tang}\alpha = 9{,}58473$	$\log\operatorname{tang}\beta = 0{,}95604$
$c = 73°\ 16',1$	$\alpha = 21°\ 1',5$	$\beta = 83°\ 41',1.$

Zu einer Probe der Richtigkeit kann die Gleichung (6) dienen, der zufolge $\log\cos c + \log\operatorname{tang}\alpha + \log\operatorname{tang}\beta = 0$ sein muss.

---

*) Die Fälle, in welchen eine oder beide Katheten gleich 90° sind, bedürfen zufolge Stereom. § 7 keiner weiteren Behandlung.

Da bei dieser Aufgabe c durch den Cosinus bestimmt wird, so liefern die Tafeln kein genaues Resultat, wenn c nahe an $0°$ liegt. In solchem Fall kann man nach Berechnung von α den hierfür gefundenen Werth benutzen, um c, wie nachher gezeigt wird, aus a und α oder b und α zu bestimmen.

2) Gegeben seien die Hypotenuse c und eine Kathete a. Man findet α unmittelbar aus (2), β aus der (3) entsprechenden Formel und b durch Auflösung von (1) auf $\cos b$.

Beispiel: $c = 93° 12',4$; $a = 120° 41',2$.

$\log \sin c = 9{,}99932$	$\log \tang c = 11{,}25162\, n$	$\log \cos c = 8{,}74770\, n$
$\log \sin a = 9{,}93448$	$\log \tang a = 10{,}22662\, n$	$\log \cos a = 9{,}70786\, n$
$\log \sin \alpha = 9{,}93516$	$\log \cos \beta = 8{,}97500$	$\log \cos b = 9{,}03984$
$\alpha = 120° 32',1.$	$\beta = 84° 35',0$	$b = 83° 42',4.$

Für α war in diesem Beispiel der stumpfe Winkel zu nehmen, weil jede Kathete mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel gleichartig ist. Die Bestimmung von α durch den Sinus ist in Folge dieses Satzes nicht zweideutig. Zu einer Probe kann die der Gleichung (5) entsprechende für $\cos \beta$ dienen, der zufolge $\log \cos \beta = \log \cos b + \log \sin \alpha$ sein muss.

Ist α nahe an $90°$, geben also die Tafeln zu dem Sinus den Winkel nicht genau, so benutze man zur Berechnung von α die Formel

$$\tang^2 (45° - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tang \tfrac{1}{2}(c-a) \cot \tfrac{1}{2}(c+a).$$

Man erhält dieselbe, wenn man beide Seiten von (2) von 1 subtrahirt, ebenso beide Seiten zu 1 addirt, die homologen Seiten der entstandenen Gleichungen dividirt und, wie folgt, nach goniometrischen Sätzen umformt:

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin c - \sin a}{\sin c + \sin a} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(c+a) \sin \frac{1}{2}(c-a)}{2 \sin \frac{1}{2}(c+a) \cos \frac{1}{2}(c-a)} = \tang \tfrac{1}{2}(c-a) \cot \tfrac{1}{2}(c+a).$$

$$\text{und } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \cos (90° - \alpha)}{1 + \cos (90° - \alpha)} = \tang^2 (45° - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

In ähnlicher Weise erhält man, wenn β durch den Cosinus nicht genau genug bestimmt wird, aus der oben für β benutzten Formel die ein genaues Resultat ergebende

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sin (c-a)}{\sin (c+a)}.$$

Es ist nämlich

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\beta = \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} = \frac{\tang c - \tang a}{\tang c + \tang a} = \frac{\sin c \cos a - \cos c \sin a}{\sin c \cos a + \cos c \sin a}.$$

Wird endlich b nicht genau durch den Cosinus bestimmt, so bediene man sich der wieder in ganz entsprechender Weise abzuleitenden Formel

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2}(c-a) \cdot \tang \tfrac{1}{2}(c+a).$$

3) Gegeben seien die Hypotenuse c und ein Winkel α. Man erhält a durch Auflösung von (2) auf $\sin a$, b durch Auflösen von (3) auf $\tang b$ und β durch Auflösung von (6) auf $\cot \beta$.

Beispiel: $c = 53° 9',8$; $\alpha = 22° 17',1$.

$\log \sin c = 9{,}90328$	$\log \tang c = 10{,}12547$	$\log \cos c = 9{,}77781$
$\log \sin \alpha = 9{,}57888$	$\log \cos \alpha = 9{,}96628$	$\log \tang \alpha = 9{,}61260$
$\log \sin a = 9{,}48216$	$\log \tang b = 10{,}09175$	$\log \cotg \beta = 9{,}39041$
$a = 17° 40',1$	$b = 51° 0',5$	$\beta = 76° 11',7.$

Probe: $\log \sin a = \log \tang b + \log \cotg \beta$ nach (4).

Auch hier ist die Bestimmung von a durch den Sinus nicht zweideutig, da wie bei 2) a mit α gleichartig sein muss. Für den Fall, dass a durch den

Sinus nicht genau genug bestimmt wird, berechne man dieses Stück mittelbar, indem man den vorher berechneten Werth von b oder β benutzt, also z. B. nach 2) aus c und b.

4) Gegeben sei eine Kathete a und der ihr gegenüberliegende Winkel α. Man erhält c durch Auflösung von (2) auf $\sin c$, b durch Auflösung von (4) auf $\sin b$ und β durch Auflösen von (5) auf $\sin \beta$.

Bei dieser Aufgabe werden also alle drei gesuchten Stücke durch ihre Sinus ermittelt. Hierbei findet eine Zweideutigkeit statt, und zwar in folgender Weise: Zunächst ist vorauszusetzen, dass die gegebenen Stücke a, α gleichartig sind, da im anderen Falle das Dreieck nicht möglich sein würde. Dann müssen ebenso b und β gleichartig sein, und es sind dabei die zwei Fälle möglich: 1) b ist kleiner als 90°, also β ebenfalls kleiner als 90°, und es muss dann c mit a gleichartig sein; 2) b und β sind grösser als 90°, dann ist c mit a ungleichartig. (Stereom. § 15.)

Beispiel: $a = 60° 39',3$; $\alpha = 72° 5',9$.

$\log \sin a = 9{,}94036$	$\log \tang a = 10{,}25011$	$\log \cos \alpha = 9{,}48768$
$\log \sin \alpha = 9{,}97845$	$\log \tang \alpha = 10{,}49077$	$\log \cos a = 9{,}69025$
$\log \sin c = 9{,}96191$	$\log \sin b = 9{,}75934$	$\log \sin \beta = 9{,}79743$
$c_1 = 66° 21',2$	$b_1 = 35° 4',2$	$\beta_1 = 38° 50',8$
$c_2 = 113° 38',8$	$b_2 = 144° 55',8$	$\beta_2 = 141° 9',2$.

Probe: $\log \sin c + \log \sin \beta = \log \sin b$.

Wird eine oder die andere der drei gesuchten Grössen durch den Sinus nicht genau genug bestimmt, so bediene man sich für dieselbe einer Gleichung, welche ganz entsprechend, wie früher in ähnlichen Fällen geschehen, abzuleiten ist. Die drei betreffenden Gleichungen, welche man hierbei erhält, sind

$$\tang^2 (45° - \tfrac{1}{2} c) = \tang \tfrac{1}{2} (\alpha - a) \cdot \cotg \tfrac{1}{2} (\alpha + a),$$
$$\tang^2 (45° - \tfrac{1}{2} b) = \sin (\alpha - a) : \sin (\alpha + a),$$
$$\tang^2 (45° - \tfrac{1}{2} \beta) = \tang \tfrac{1}{2} (\alpha - a) \cdot \tang \tfrac{1}{2} (\alpha + a).$$

5) Gegeben sei eine Kathete b und der ihr anliegende Winkel α. Man erhält c durch Auflösung von (3) auf $\tang c$, a durch Auflösung von (4) auf $\tang a$ und β durch die der Gleichung (5) entsprechende $\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$.

Beispiel: $b = 5° 47',4$; $\alpha = 8° 0',0$.

$\log \tang b = 9{,}00603$	$\log \sin b = 9{,}00382$	$\log \cos b = 9{,}99778$
$\log \cos \alpha = 9{,}99575$	$\log \tang \alpha = 9{,}14780$	$\log \sin \alpha = 9{,}14356$
$\log \tang c = 9{,}01028$	$\log \tang a = 8{,}15162$	$\log \cos \beta = 9{,}14134$
$c = 5° 50',8$	$a = 0° 48',7$	$\beta = 82° 2',5$

Probe: $\log \tang c + \log \cos \beta = \log \tang a$.

Wird β durch den Cosinus nicht genau genug bestimmt, so benutze man zur Berechnung eine der vorher ermittelten Grössen c, a.

6) Gegeben seien die beiden Winkel α. β. Man erhält c aus (6), a durch Auflösung von (5) auf $\cos a$ und b durch Auflösung der (5) entsprechenden Gleichung auf $\cos b$.

Beispiel; $\alpha = 98° 59',9$, $\beta = 10° 5',0$

$\log \cotg \alpha = 9{,}19963\,n$	$\log \cos \alpha = 9{,}19425\,n$	$\log \cos \beta = 9{,}99324$
$\log \cotg \beta = 10{,}75000$	$\log \sin \beta = 9{,}24324$	$\log \sin \alpha = 9{,}99462$
$\log \cos c = 9{,}94963\,n$	$\log \cos a = 9{,}95101\,n$	$\log \cos b = 9{,}99862$
$c = 152° 56',1$	$a = 153° 17',7$	$b = 4° 34'(?)$

Probe: $\log \cos c = \log \cos a + \log \cos b$.

Alle drei gesuchten Grössen werden hier durch ihre Cosinus bestimmt. Ist eine oder die andere dieser Bestimmungen nicht genau genug, wie im vorliegenden Beispiel diejenige von b, so hat man, wie früher in ähnlichen Fällen, z. B. in 4), abgeleitete Gleichungen anzuwenden. Man erhält hier auf entsprechendem Wege wie früher die drei Gleichungen

$$tang^2 \tfrac{1}{2} c = - cos(\alpha + \beta) : cos(\alpha - \beta)$$
$$tang^2 \tfrac{1}{2} a = tang\,[45^\circ + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] \cdot tang\,[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45^\circ]$$
$$tang^2 \tfrac{1}{2} b = tang\,[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] \cdot tang\,[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45^\circ].$$

Für das vorstehende Beispiel führt die letzte dieser Formeln zu

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 44^\circ\, 27',45\ ;\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 54^\circ\, 32',45;$$

$$\begin{array}{ll} log\, tang\,[45^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] & = 7,97629 \\ log\, tang\,[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45^\circ] & = 9,22550 \\ \hline log\, tang^2 \tfrac{1}{2} b & = 7,20179 \\ log\, tang\ \tfrac{1}{2} b & = 8,60090 \\ b & = 4^\circ\, 34',1. \end{array}$$

Anmerkung: Bildet man zu den vorstehend behandelten Aufgaben Zahlenbeispiele mit willkürlich gewählten Zahlen, so kann der Fall vorkommen, dass für die letzteren ein Dreieck nicht möglich ist. Dieser Fall tritt ein und zeigt sich in der Rechnung von selbst an, wenn eine gesuchte Grösse durch ihren Sinus oder Cosinus bestimmt wird und die Berechnung nach der betreffenden Formel für diese Function einen Werth ergiebt, welcher grösser als 1 ist. So darf beispielsweise im vorstehenden sechsten Fall nicht $cot\,\alpha \cdot cot\,\beta > 1$ oder $log\, cot\,\alpha + log\, cot\,\beta$ nicht grösser als $10,00000 - 10$ werden.

§ 22. Zusammenhang der Fundamentalformeln.

Die Fundamentalformeln (1) — (6) des § 20 für das rechtwinkelige sphärische Dreieck lassen sich in folgender Weise zusammenfassen, wodurch auch das gedächtnissmässige Behalten derselben erleichtert wird: Verlängert man die Hypotenuse AB und die Kathete CB des rechtwinkeligen Dreiecks ABC, beide über B bis die Bogen ABF, CBG zu Quadranten geworden sind, und zieht man dann den grössten Kreisbogen FG, so erhält man das Ziegler'sche Complementardreieck BFG, in welchem $BG = 90^\circ - a$, $BF = 90^\circ - c$, $GF = 90^\circ - \alpha$, $\angle\, BGF = 90^\circ - b$, $\angle\, GBF = \beta$ und $\angle\, GFB = 90^\circ$ ist. Wendet man nun die Formel (2) zweimal auf dieses Dreieck an, so erhält man die Formeln (1) und (5), und wendet man zweimal die Formel (4) auf dasselbe an, so erhält man (3) und (6). Die sechs Gleichungen sind also hierdurch auf zwei zurückgeführt.

Ueberhaupt müssen zwei dieser Gleichungen zur Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke ausreichen, denn da stets drei der fünf Stücke des Dreiecks aus den beiden anderen gesucht werden sollen, so bedarf man überhaupt nur dreier Gleichungen zwischen den fünf Stücken, die in jedem einzelnen Falle, soweit erforderlich, auf die gesuchten drei Unbekannten aufgelöst werden können. Nun lässt sich aber jede für eine Function von α aufgestellte Formel ohne Weiteres durch eine entsprechende für β ergänzen, und somit genügen schon zwei der obigen sechs Gleichungen. Wählt man z. B. die Gleichung (2) in ihren beiden Formen und daneben die Gleichung (1) und soll etwa α aus a und b berechnet werden, so hat man in den beiden ersten der Gleichungen

$$cos\, c = cos\, a \cdot cos\, b;\ sin\,\alpha = sin\, a : sin\, c;\ sin\,\beta = sin\, b : sin\, c$$

c zu eliminiren. Mittelst $sin^2 c + cos^2 c = 1$ erhält man

$$\frac{sin^2 a}{sin^2 \alpha} + cos^2 a \cdot cos^2 b = 1,\ \text{also}\ sin^2 \alpha = \frac{sin^2 a}{1 - cos^2 a \cdot cos^2 b},$$

welche Gleichung aber keine logarithmisch ununterbrochene Berechnung von α zulässt und daher besser durch folgende Entwicklung verändert wird:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 a}{1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 b} = \frac{\cos^2 a - \cos^2 a \cdot \cos^2 b}{1 - \cos^2 a \cdot \cos^2 b},$$

$$\tang^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a\,(1 - \cos^2 b)} = \frac{\tang^2 a}{\sin^2 b}, \text{ also}$$

$$\tang \alpha = \frac{\tang a}{\sin b},$$

d. i. die obige Gleichung (4). Man sieht hieraus, dass die Aufstellung von sechs Gleichungen statt der nothwendigen zwei nur die Resultate der erforderlichen Eliminationen den letzteren hinzufügt und so zur Ersparung von Arbeit dient.

Das gedächtnissmässige Behalten der sechs Fundamentalformeln wird ferner unterstützt durch Vergleichung dieser Formeln mit den für ebene rechtwinkelige Dreiecke geltenden, wobei sich manche Analogieen ergeben. Eine andere Beziehung beider Formel-Gruppen ergiebt sich daraus, dass die für das sphärische Dreieck abgeleiteten in die des ebenen Dreiecks übergehen müssen, wenn man annimmt, dass der Radius der Kugel bis in's Unendliche wachse, oder mit anderen Worten, dass die Seiten des sphärischen Dreiecks im Verhältniss zum Kugelradius unendlich klein werden. In diesem Falle sind die Cosinus der Seiten gleich 1, die Verhältnisse der Sinus und Tangenten der Seiten gleich den entsprechenden Verhältnissen dieser letzteren selbst zu setzen. Man erhält so aus (2) — (6) bezüglich die bekannten Gleichungen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},\ \cos \alpha = \frac{b}{c},\ \tang \alpha = \frac{a}{b},\ \cos \alpha = \sin \beta;\ (\alpha + \beta = 90^\circ),\ 1 = \cot \alpha \cdot \cot \beta.$$

Dagegen führt (1) auf die werthlose Gleichung $1 = 1 \cdot 1$. Um dies zu vermeiden, ersetze man in (1) die Cosinus durch die Sinus, bilde also die Gleichungen

$$\cos^2 c = \cos^2 a \cdot \cos^2 b;\ 1 - \sin^2 c = (1 - \sin^2 a) \cdot (1 - \sin^2 b),$$

woraus dann, indem man die Sinus der unendlich kleinen Bogen mit diesen selbst vertauscht,

$$1 - c^2 = (1 - a^2)(1 - b^2) = 1 - a^2 - b^2 + a^2 b^2,$$

und wenn man das Produkt der beiden unendlich kleinen Grössen a^2, b^2 gegen diese selbst als verschwindend weglässt, der pythagoreische Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$ folgt.

§ 23. Unmittelbare Anwendungen.

1. Die Auflösung rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke führt ohne Weiteres auf diejenige von gleichschenkligen Dreiecken, da letztere stets durch den von ihrer Spitze nach der Mitte der Grundlinie gehenden Bogen eines grössten Kreises in zwei symmetrische rechtwinkelige getheilt werden. Eine nähere Ausführung der einzelnen hierbei möglichen Fälle wird nicht nothwendig sein, und dürfen wir uns wol auf ein einzelnes Beispiel beschränken:

Es sei die Aufgabe gestellt, den Neigungswinkel zweier aneinanderstossenden Seitenflächen einer geraden, regelmässig-zehnseitigen Pyramide zu berechnen, wenn der Winkel an der Spitze einer Seitenfläche derselben gleich 18° gegeben ist. An jedem Eckpunkte der Grundfläche der Pyramide besteht eine gleichschenkelige Ecke, deren gleiche ebene Winkel sich aus dem Winkel an der Spitze eines Seitendreiecks zu 90° — 9° = 81° berechnen, und deren dritter ebener Winkel als Winkel eines ebenen, regelmässigen Zehnecks gleich 144° ist. In dem zu dieser Ecke gehörigen gleichschenkeligen sphärischen Dreieck sind also

die drei Seiten bekannt; der gesuchte Winkel ist gleich dem Winkel an der Spitze dieses Dreiecks. Zerlegt man nun das letztere in die beiden rechtwinkeligen, so ist in jedem derselben die Hypotenuse $c = 81^\circ$ und die eine Kathete $a = 72^\circ$ bekannt. Man erhält hieraus durch $\log \sin \alpha = \log \sin a - \log \sin c = 9{,}97821 - 9{,}99462 = 9{,}98359$, $\alpha = 74^\circ\,21'$, und mithin den gesuchten Winkel $2\,\alpha = 148^\circ\,42'$.

2. Eine andere unmittelbare Anwendung der Auflösung rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke liefert die Aufgabe der Berechnung regelmässiger sphärischer Polygone, also solcher sphärischer Figuren, welchen regelmässige Ecken am Mittelpunkt der Kugel entsprechen. Aus Stereom. §§ 9 u. 15 geht hervor, dass die Achse einer solchen Ecke die Oberfläche der Kugel in einem Punkte M treffen muss, so dass die durch M und je einen Eckpunkt des Polygons gelegten Bogen grösster Kreise einander gleich sind und jedesmal den zugehörigen Winkel des Polygons halbiren. Diese Bogen heissen die grossen sphärischen Radien des Polygons und ihre Maasszahl soll im Folgenden durch r bezeichnet werden. Ferner sind diejenigen Bogen grösster Kreise, welche den Mittelpunkt M mit je einem der Halbirungspunkte der Seiten verbinden, einander gleich und stehen jedesmal zu der zugehörigen Seite senkrecht; sie heissen die kleinen sphärischen Radien des Polygons, und ihre Maasszahl soll im Folgenden durch ρ bezeichnet werden. Die grossen und die kleinen Radien vereint theilen das n-Eck in $2\,n$ congruente oder symmetrische rechtwinkelige sphärische Dreiecke. Ein solches Dreieck heisst das Bestimmungsdreieck des Polygons, da es alle wesentlichen Bestimmungsstücke desselben enthält, nämlich ausser der Hypotenuse r, der einen Kathete ρ und dem von beiden eingeschlossenen, die Seitenzahl n bestimmenden Winkel gleich $\frac{180^\circ}{n}$ auch die andere Kathete gleich der Hälfte der Polygonseite a, und den anderen Winkel gleich der Hälfte des Polygonwinkels α. Hiernach lassen sich mittelst dieses Dreiecks aus je zweien dieser Stücke die übrigen trigonometrisch berechnen.

Es sei beispielsweise von einem regelmässigen Pentagonal-Dodekaeder (Stereom. § 14) die Länge einer Kante gleich s gegeben, und man denke sich den Mittelpunkt des Körpers, d. h. den von allen Eckpunkten desselben gleichweit entfernten Punkt, mit allen Eckpunkten einer Seitenfläche verbunden. Diese Verbindungslinien sind die Kanten einer regelmässigen fünfseitigen Ecke, zu welcher auf der Oberfläche der dem Polyeder umbeschriebenen Kugel ein regelmässiges Fünfeck gehört. Ist aus der Kante s des Körpers der Radius R der demselben umbeschriebenen Kugel gleich $\frac{1}{4}\,s\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$ berechnet, so ergiebt sich für die Seite a dieses Fünfecks

$$\sin \tfrac{1}{2}\,a = \tfrac{1}{2}\,s : R = \tfrac{1}{6}\sqrt{18 - 6\sqrt{5}} = 0{,}35682,$$
$$\text{also } \log \sin \tfrac{1}{2}\,a = 9{,}55245;\ \tfrac{1}{2}\,a = 20^\circ\,54',3,$$

und der der Kathete $\frac{1}{2}\,a$ gegenüberliegende Winkel des Bestimmungsdreiecks ist gleich $\frac{1}{5}\cdot 180^\circ = 36^\circ$. Aus diesen beiden Stücken erhält man auf die oben angegebene Weise die beiden sphärischen Radien des Polygons und die Hälfte des Winkels desselben. Der letztere ergiebt sich übrigens auch daraus, dass je drei jener sphärischen Fünfecke auf der Kugel in einem Eckpunkt so aneinanderstossen, dass die Summe der betreffenden drei ganzen Winkel 360° betragen muss.

Wählt man dagegen die dreiseitige Ecke, in welcher drei Grenzflächen des Pentagonaldodekaëders zusammenstossen, zur Berechnung, so erhält man in dem Bestimmungsdreieck derselben die Hälfte des Neigungswinkels zweier benach-

barter Flächen zu einander mittelst $\sin \frac{1}{2} \alpha = \cos 60° : \cos 54°$, also $\frac{1}{2} \alpha = 58° 16',9$, $\alpha = 116° 33',8$. Auf ähnliche Weise lassen sich die übrigen regelmässigen Polyëder behandeln.

3. Endlich kann man auch solche sphärische Dreiecke, in denen eine Seite gleich 90° ist, mittelst der obigen Formeln (1) — (6) berechnen, indem man zunächst das Polardreieck derselben, welches (Stereom. § 15) rechtwinkelig sein muss, berechnet und aus den betreffenden Stücken des letzteren ohne Weiteres die ihnen supplementären Stücke des ursprünglichen Dreiecks bestimmt.

Kapitel 6.
Das allgemeine sphärische Dreieck.

§ 24. Die Fundamentalformeln.

1. Jedes schiefwinkelige Dreieck lässt sich mittelst jeder einzelnen seiner drei Höhen, d. h. der von je einem Eckpunkt senkrecht zu der gegenüberliegenden Seite gezogenen Bogen grösster Kreise als Summe oder als Differenz zweier rechtwinkeligen Dreiecke darstellen. In beiden Fällen lässt sich der Sinus der Höhe, z. B. *CD*, als gemeinschaftliche Kathete beider Dreiecke mittelst der Gleichungen

$$\sin \alpha = \sin h : \sin b, \quad \sin \beta = \sin h : \sin a$$

doppelt ausdrücken, und durch Verbindung der beiden Werthe von $\sin h$ erhält man die Gleichung

$$\sin b \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin \beta,$$

oder in Form einer Proportion:

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

(M. 226.)

(M. 227.)

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz, dass die Sinus zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks sich zu einander verhalten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel muss für jedes Paar der Seiten oder Winkel gelten (die Höhe kann auf jede der drei Seiten gefällt sein), und lässt sich daher noch auf zweifache Weise in einer Gleichung darstellen. Alle drei Formen dieses Sinussatzes der sphärischen Trigonometrie lassen sich zusammenfassen in

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma, \qquad (1)$$

oder auch

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Der vorstehende Satz führt auf den Sinussatz der ebenen Trigonometrie zurück, wenn die Seiten *a*, *b*, *c* als in Beziehung auf den bis in's Unendliche wachsenden Radius der Kugel unendlich klein gedacht und demgemäss die Sinus derselben mit den Seiten selbst vertauscht werden. — Für $\gamma = 90°$ führt er auf

die für das rechtwinkelige sphärische Dreieck gefundene Gleichung $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, welche somit ein besonderer Fall der vorstehenden ist.

2. Bezeichnet man ferner die Maasszahl des durch den Fusspunkt D der Höhe auf BA gebildeten Abschnitts BD durch p und die von DA durch q, so ist

$$\cos a = \cos h \cdot \cos p,$$

und $\cos h = \frac{\cos b}{\cos q}$, $p = c \mp q$, also

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos q} \cos (c \mp q) = \cos b \cos c \pm \cos b \sin c \cdot \tang q.$$

Setzt man hier noch für $\tang q$ den aus $\cos \alpha = \pm \tang q : \tang b$ folgenden Werth ein, so erhält man durch eine leichte Umformung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \qquad (2)$$

Diese Formel, welche zuweilen der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie genannt wird, lässt sich selbstverständlich ebenfalls in drei Formen, nämlich ausser der vorstehenden noch in den folgenden

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \qquad (2^a)$$

aufstellen. Für $\gamma = 90°$ führt die letzte derselben auf die Formel (1) des vorigen Kapitels, nämlich auf $\cos c = \cos a \cos b$ als besonderen Fall zurück. Für einen unendlich grossen Radius giebt sie, wenn man die Cosinus der Seiten zunächst durch die Sinus derselben ausdrückt und das Produkt $a^2 b^2$ als verschwindend gegen a^2 und b^2 weglässt,

$$\sqrt{1 - c^2} = \sqrt{1 - a^2 - b^2} + a b \cos \gamma,$$

woraus durch Quadriren

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma \sqrt{1 - a^2 - b^2} - a^2 b^2 \cos \gamma^2,$$

oder nach nochmaliger Weglassung von $-a^2 - b^2$ gegen 1 unter der Wurzelgrösse und von $a^2 b^2 \cos \gamma^2$,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma,$$

d. i. der allgemeine pythagoreische Lehrsatz folgt.

3. Da das Polardreieck des gegebenen Dreiecks die Seiten $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ und entsprechend die Winkel $180° - a$, $180° - b$, $180° - c$ hat, so führt die Anwendung der Formel (2) auf dieses Polardreieck zu der neuen Gleichung

$$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a, \qquad (3)$$

welche selbstverständlich wieder in noch zwei anderen Formen aufgestellt werden kann.

Für $\gamma = 90°$ führt dieselbe auf $\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a$, bezw. $\cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b$, und in ihrer dritten Form auf $\cos c = \cot \alpha \cdot \cot \beta$ als besondere Fälle. Für $r = \infty$ führt sie auf $\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$ oder $\cos \alpha = - \cos (\beta + \gamma)$, oder $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

4. Setzt man aus der ersten der oben bei (2^a) gefundenen Gleichungen für $\cos b$ und $\cos c$ den Werth von $\cos b$ in die zweite ein, so erhält man

$$\cos c = \cos^2 a \cos c + \sin a \cos a \sin c \cos \beta + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

oder $\cos c \sin^2 a = \sin a \cos a \sin c \cos \beta + \sin a \sin b \cos \gamma$.

Dividirt man beide Seiten dieser letzteren Gleichung durch $\sin a \sin c$ und setzt in der entstehenden Gleichung

$$\cot c \sin a = \cos a \cos \beta + \frac{\sin b}{\sin c} \cos \gamma$$

für $\frac{\sin b}{\sin c}$ nach (1) $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ ein, so erhält man, wenn man ausserdem das letzte Glied transponirt,

$$\cos a \cdot \cos \beta = \sin a \cot c - \sin \beta \cot \gamma. \quad (4)$$

Diese Gleichung lässt sich in sechs verschiedenen Formen aufstellen und in folgender Weise gedächtnissmässig merken: Dieselbe enthält Functionen zweier Seiten, in der vorstehenden Form a und c, und Functionen zweier Winkel β, γ. Jene Seiten schliessen den Winkel β, diese Winkel die Seite a ein; die nicht eingeschlossene Seite c und der nicht eingeschlossene Winkel γ liegen einander gegenüber. Es ist nun das Product der Cosinus der beiden eingeschlossenen Stücke gleich der Differenz zweier Produkte aus je einem Sinus und einer Cotangente. Der Sinus ist immer der eines eingeschlossenen, die Cotangente die eines nicht eingeschlossenen Stücks. Das erste Produkt enthält die Functionen der Seiten, das letzte die der Winkel.

Für $\gamma = 90^\circ$ erhält man die Formeln (3) und (4) des vorigen Kapitels, für $r = \infty$ die sogenannte separirte Tangentenformel der ebenen Trigonometrie.

Die Gleichungen (1)—(4) dieses Paragraphen in ihren verschiedenen Formen gestatten die Auflösung eines jeden sphärischen Dreiecks aus irgend welchen drei Bestimmungsstücken desselben. Man bedarf überhaupt zur Auffindung der drei Unbekannten nur dreier Gleichungen zwischen denselben und den gegebenen Grössen, die dann auf erstere (bezw. die betreffenden Functionen derselben) aufzulösen sind. Durch die genannten vorstehenden Gleichungen wird also bereits — behufs Vereinfachung der Arbeit — mehr geboten, als unumgänglich nothwendig wäre. Im Folgenden soll diese Auflösung der Dreiecke mittelst der Gleichungen (1)—(4) für die einzelnen möglichen Fälle ausgeführt werden. Da aber diese Gleichungen zum Theil keine logarithmisch ununterbrochene Rechnung gestatten, so sollen gleichzeitig noch andere Methoden für die einzelnen Fälle entwickelt werden, welche diese letztere Eigenschaft nicht besitzen.

§ 25. Erster Fall: Gegeben seien die drei Seiten a, b, c.

Die Gleichung (2) des § 24 gestattet mittelst ihrer drei Formen die Berechnung aller drei Winkel. So findet man beispielsweise

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \quad (1)$$

und entsprechende Formeln ergeben sich ohne Weiteres für β und γ.

Für numerische Beispiele kann man sich um die Unterbrechung der logarithmischen Rechnung zu vermeiden, anderer Formeln bedienen, welche, wie folgt, abgeleitet werden können:

Aus der vorstehenden Gleichung (1) folgt

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(b - c + a) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}$$

Setzt man der Abkürzung halber $a + b + c = 2s$, so ist

$$b - c + a = 2(s - c)\ , \ a - b + c = 2(s - b)$$

zu setzen, und man erhält, wenn man noch für $1 - \cos \alpha$, $2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$ schreibt, nach Division mit 2 und Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}} \quad (2)$$

Entsprechende Formeln müssen für $sin\ \frac{1}{2}\beta$ und $sin\ \frac{1}{2}\gamma$ gelten, und man kann dieselben leicht aufstellen, wenn man das Bildungsgesetz der Formel (2) beachtet, nach welchem unter dem Wurzelzeichen vier Sinus stehen, und zwar im Nenner die der Seiten b, c, welche den gesuchten Winkel α einschliessen, während dieselben zwei Seiten im Zähler als Subtrahenden vorkommen. Mit Hülfe der so gewonnenen drei Formeln lässt sich schon eine logarithmisch ununterbrochene Berechnung der drei Winkel des Dreiecks ausführen. Man kann aber auch zu gleichem Zwecke noch eine andere Formelgruppe durch ein dem vorstehenden entsprechendes Verfahren, wie folgt, ableiten: Aus der obigen Gleichung (1) ergiebt sich wieder

$$1 + cos\ \alpha = 1 + \frac{cos\ a - cos\ b\ cos\ c}{sin\ b\ sin\ c} = \frac{sin\ b\ sin\ c - cos\ b\ cos\ c + cos\ a}{sin\ b\ sin\ c}$$

$$= \frac{cos\ a - cos(b + c)}{sin\ b\ sin\ c} = \frac{2\ sin\ \frac{1}{2}(a + b + c)\ sin\ \frac{1}{2}(b + c - a)}{sin\ b\ sin\ c}$$

Führt man hier wieder die Grösse s ein, setzt für $1 + cos\ \alpha$, $2\ cos^2 \frac{1}{2}\alpha$, dividirt durch 2 und zieht die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$cos\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{sin\ s \cdot sin\ (s - a)}{sin\ b\ sin\ c}}. \qquad (3)$$

Zu dieser Formel ergeben sich unter Beachtung ihres Bildungsgesetzes wieder die entsprechenden Formeln für β und γ.

Durch Verbindung der Formeln (2) und (3) dieses Paragraphen erhält man ferner eine dritte Gruppe von Gleichungen, deren Anwendung für die vorliegende Aufgabe derjenigen jener ersteren Formeln vorzuziehen ist. Durch Division der entsprechenden Seiten von (2) und (3) folgt nämlich nach einigen leichten Umformungen

$$tang\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{sin\ (s - b)\ sin\ (s - c)}{sin\ s \cdot sin\ (s - a)}} \qquad (4)$$

und entsprechende Gleichungen ergeben sich selbstverständlich wieder für β und γ.

Soll nur ein Winkel eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten numerisch berechnet werden, so empfiehlt sich die Anwendung dieser Gleichung (4). Werden aber alle drei Winkel zugleich verlangt, so erweitere man den Radicanden in (4) mit $sin\ (s - a)$ und ziehe aus dem im Nenner entstehenden quadratischen Factor $sin^2\ (s - a)$ die Wurzel aus. Verfährt man in entsprechender Weise mit den betreffenden Gleichungen für β und γ, so ist die Wurzelgrösse für alle drei Winkel nunmehr dieselbe und braucht nur einmal berechnet zu werden. Bezeichnen wir dieselbe abgekürzt, indem wir

$$\frac{sin\ (s - a)\ sin\ (s - b)\ sin\ (s - c)}{sin\ s} = tang^2\ \rho \qquad (5)$$

setzen, so erhalten die drei für die numerische Berechnung der drei Winkel aus den drei Seiten bequemsten Gleichungen die Form

$$tang\ \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{tang\ \rho}{sin\ (s - a)},\ tang\ \tfrac{1}{2}\beta = \frac{tang\ \rho}{sin\ (s - b)},\ tang\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{tang\ \rho}{sin\ (s - c)}. \qquad (6)$$

Als Beispiel und zugleich als Schema einer praktischen Schreibweise derartiger Rechnungen diene Folgendes:

$a = 27^\circ\, 15',8$	$\log\sin(s-a) = 9{,}75638$	$\log\tan g \frac{1}{2}\alpha = 9{,}38622$
$b = 39^\circ\, 12',3$	$\log\sin(s-b) = 9{,}58928$	$\log\tan g \frac{1}{2}\beta = 9{,}55332$
$c = 57^\circ\, 39',1$	$\log\sin(s-c) = 8{,}88572$	$\log\tan g \frac{1}{2}\gamma = 10{,}25688$
$2s = 124 \cdot 7,2$	$8{,}23138$	$\frac{1}{2}\alpha = 13^\circ\, 40',6$
$s = 62 \cdot 3,6$	$\log\sin s = 9{,}94618$	$\frac{1}{2}\beta = 19^\circ\, 40',4$
$s-a = 34 \cdot 47,8$	$\log\tan g^2 \rho = 8{,}28520$	$\frac{1}{2}\gamma = 61^\circ\, 2',1$
$s-b = 22 \cdot 51,3$ +	$\log\tan g\, \rho = 9{,}14260$	$\alpha = 27^\circ\, 21',2$
$s-c = 4 \cdot 24,5$		$\beta = 39^\circ\, 20',8$
$2s = 124 \cdot 7,2$		$\gamma = 122^\circ\, 4',2.$

Will man eine Probe der Rechnung haben, welche die Wiederholung derselben unnöthig macht, so kann man sich dazu des Sinussatzes bedienen, demzufolge

$$\log\sin a - \log\sin\alpha = \log\sin b - \log\sin\beta = \log\sin c - \log\sin\gamma$$

sein muss.

Eine andere, in den Lehrbüchern häufig enthaltene Methode, welche die Formel (1) durch Einführung eines Hülfswinkels logarithmisch ununterbrochen macht, ist weitläufiger als die vorstehende und nicht zu empfehlen. Dieselbe beruht darauf, dass wenn man

$$\cos a = n \sin c \cos\varphi, \ \cos b = n \sin\varphi,$$

$$\text{also } \tan g\,\varphi = \frac{\cos b \sin c}{\cos a}, \ n = \frac{\cos b}{\sin\varphi}$$

setzt, die Formel (1) in

$$\cos\alpha = \frac{n\sin(c-\varphi)}{\sin b \sin c}, \text{ oder } \cos\alpha = \frac{\cot b \cdot \sin(c-\varphi)}{\sin c \sin\varphi}$$

übergeht.

§ 26. Zweiter Fall: Gegeben seien die drei Winkel α, β, γ.

Wir lassen diesen Fall auf den vorigen folgen, weil er demselben polar ist, d. h. es sind $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$ die Maasszahlen der Seiten des Polardreiecks, und man könnte daher die Aufgabe lösen, indem man dieses Polardreieck nach dem vorigen Fall berechnete. Die Supplemente der so gefundenen Winkel des Polardreiecks liefern dann die gesuchten Seiten des ursprünglichen. Führt man dieses Verfahren allgemein, d. h. mit den Buchstaben-Gleichungen aus, so erhält man als Resultate die Formeln zur unmittelbaren Auflösung des vorliegenden Falles. Da man aber in gleicher Weise die Berechnung des Dreiecks aus den drei Seiten mittelst des Polardreiecks auf diejenige aus den drei Winkeln stützen könnte, wenn diese letztere der anderen vorausgegangen wäre, so sollen im Folgenden die betreffenden Formeln unmittelbar in ganz analoger Weise wie die vorhergehenden aufgestellt werden.

Aus der Gleichung (3) des § 24 folgt

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \qquad (1)$$

und diese Gleichung, welche leicht noch in den beiden Formen für b und c aufgestellt werden kann, gestattet bereits die Berechnung der drei Seiten aus den drei Winkeln.

Um numerische Rechnungen logarithmisch bequemer zu gestalten, leiten wir wieder aus derselben andere Formeln wie folgt ab:

$$1 - \cos a = \frac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= -\frac{\cos\alpha + \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma} = -\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta\ \sin\gamma},$$

oder für $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$,

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{2\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\ \sin\gamma}, \text{ also}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}. \quad (2)$$

Entsprechend ist

$$1+\cos a = \frac{\sin\beta\ \sin\gamma + \cos\beta\ \cos\gamma + \cos\alpha}{\sin\beta\ \sin\gamma} = \frac{\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma}$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma},$$

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{2\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\ \sin\gamma},$$

$$\text{also } \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\ \cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}. \quad (3)$$

Durch Division ergiebt sich ferner aus (2) und (3):

$$\cot\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\ \cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}, \quad (4)$$

und wenn man den Bruch unter dem Wurzelzeichen mit $\cos(\sigma-\alpha)$ erweitert und die dann für alle drei Seiten übereinstimmend gebrauchte Wurzelgrösse

$$\sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}} = \cot r \quad (5)$$

setzt, so erhält man die drei Formeln:

$$\cot\tfrac{1}{2}a = \frac{\cot r}{\cos(\sigma-\alpha)},\ \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\cot r}{\cos(\sigma-\beta)},\ \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cot r}{\cos(\sigma-\gamma)}. \quad (6)$$

Das Schema der Rechnung und eine Probe können ähnlich wie im vorigen Fall gemacht werden. — Die andere Methode, welche einen Hülfswinkel benutzt, indem

$$\cos\alpha = n\sin\beta\cos\varphi,\ \cos\gamma = n\sin\varphi,$$

$$\text{also } \tan\varphi = \frac{\cos\gamma\ \sin\beta}{\cos\alpha},\ \cos a = \frac{\cot\gamma\ \sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta\ \sin\varphi}$$

gesetzt wird, ist auch hier nicht zu empfehlen.

Beispiel:

$\alpha = 86°\,15',3$	9,27527	0,08960
$\beta = 152°\,43',9$	9,98931	9,37556
$\gamma = 91°\,47',7$	9,45088	9,91399
330 · 46,9	8,71546	
165 · 23,45	9,98572n	39° 7',85
79 · 8,15	8,72974	76° 38',57
12 · 39,55	9,36487	50° 38',20
73 · 35,75		$a = 78°\,15',7$
330 · 46,90		$b = 153 \cdot 17,1$
		$\gamma = 101 \cdot 16,4$.

§ 27. Dritter Fall: Gegeben seien zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α.

1. Man findet a mittelst § 24 (2), β und γ mittelst § 24 (4), hat also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cot \beta &= \frac{\sin c \cot b - \cos c \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \cot \gamma &= \frac{\sin b \cot c - \cos b \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}\right\} (1)$$

Da auch diese Formeln für numerische Beispiele keine logarithmisch ununterbrochene Rechnung zulassen, so leiten wir für diesen Zweck wieder im Folgenden andere Gleichungen ab.

2. Entwickelt man $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ nach § 8, (2) und setzt dann für die Cosinus und Sinus der einzelnen Winkel die vorher bei dem ersten Fall gefundenen Ausdrücke, § 25, (3) und (2) ein, so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}$$
$$- \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin a \sin c}},$$

woraus weiter leicht folgende Umformungen hervorgehen:

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\sin s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \cdot \sin (s-b)}{\sin a \sin b}} - \frac{\sin (s-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}}$$
$$= \frac{\sin s - \sin (s-c)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Setzt man hier für die Wurzelgrösse nach § 25, (2) $\sin \frac{1}{2}\gamma$ ein und formt $\sin s - \sin (s-c)$ nach § 9, (15) um, so erhält man unter Berücksichtigung von $2s - c = a + b$,

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2}(a+b)}{\sin c} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\gamma,$$

oder, wenn man noch $\sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c$ einsetzt,

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Wie hier mit $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, so lässt sich in ganz entsprechender Weise mit $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ verfahren, und man erhält so im Ganzen vier Formeln, welche sich in folgender Weise schreiben lassen:

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma \quad (2)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2} c = \cos \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \quad (3)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \sin \tfrac{1}{2}\gamma \quad (4)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}\gamma. \quad (5)$$

Dieselben heissen die Gaussischen Gleichungen.

Dividirt man die homologen Seiten je zweier derselben, so erhält man durch einfache Umformungen

$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}\gamma \quad (6)$$
$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}\gamma \quad (7)$$
$$\tan \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tan \tfrac{1}{2} c \quad (8)$$
$$\tan \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tan \tfrac{1}{2} c. \quad (9)$$

Diese vier Gleichungen werden die Neperschen A n a l o g i e e n genannt.

Um die Gaussischen Formeln (2) bis (5) gedächtnissmässig zu behalten, kann man die Zieglersche Regel benutzen: Mit der Aenderung eines Zeichens müssen

die Functionen für das andere Alphabet geändert werden. Mittelst dieser Regel können aus jeder der vier Gleichungen die drei anderen abgeleitet werden, indem man nach einander die möglichen Veränderungen der Zeichen in $\alpha + \beta$, $a + b$, bezw. $\alpha - \beta$, $a - b$ vornimmt. Man kann sich ferner merken, dass jede der Gleichungen drei Cosinus oder drei Sinus nach einander enthält, sowie endlich die Regel: Denkt man sich die Functionen von Summen oder Differenzen entwickelt, so stehen jedesmal auf beiden Seiten gleiche Zeichen. Die NEPER'schen Analogieen werden dann mittelst ihrer Ableitung aus den GAUSSischen Gleichungen leicht behalten.

3. Die Anwendung der vorstehend abgeleiteten Gleichungen zur Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel kann, wie folgt, geschehen: Wir wählen, obigen Formeln entsprechend zur Bezeichnung der Seiten a, b und für den gegebenen Winkel γ. Man erhält dann unmittelbar durch (6) und (7) die Werthe von $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, und die Addition und Subtraction derselben liefert die einzelnen unbekannten Winkel α und β. Sind diese gefunden, so kann man sich zur Berechnung der fehlenden Seite c des Sinussatzes bedienen, und die nothwendige Uebereinstimmung der beiden Resultate der Doppelformel

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin \gamma = \frac{\sin b}{\sin \beta} \sin \gamma$$

liefert noch eine Probe der Rechnung.

Noch einfacher ist es, die vier GAUSSischen Formeln anzuwenden. Die rechten Seiten derselben können unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnet werden, und die paarweise Subtraction ihrer Logarithmen führt dann — entsprechend der Ableitung der vorher gebrauchten beiden NEPER'schen Gleichungen — wie vorhin auf $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und somit auf die Winkel α, β selbst. Schlägt man nunmehr die Sinus und Cosinus der eben bekannt gewordenen halben Summe und halben Differenz der Winkel auf, so kann man nach Anleitung der GAUSSischen Formeln (2)—(5) durch geeignete Subtraction ihrer Logarithmen von denjenigen der rechten Seiten vier Werthe von $\log \cos \frac{1}{2} c$, bezw. $\log \sin \frac{1}{2} c$ erhalten, von denen jeder einzelne zur Bestimmung von c genügt. Hiernach ist folgendes **Beispiel** und **Schema** entworfen:

$a = 70^\circ 20',8$	$\log \sin \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}43875$	$\log \sin \frac{1}{2}(a + b) = 9{,}91018$
$b = 38^\circ 28',0$	$\log \cos \frac{1}{2}\gamma = 9{,}95273$	$\log \sin \frac{1}{2}\gamma = 9{,}64571$
$\gamma = 52^\circ 30',0$	$\log \cos \frac{1}{2}(a - b) = 9{,}98297$	$\log \cos \frac{1}{2}(a + b) = 9{,}76494$
$a - b = 31 \cdot 52{,}8$	$9{,}39148$	$9{,}93570$
$a + b = 108 \cdot 48{,}8$	$9{,}55589$	$9{,}41065$
$\frac{1}{2}(a - b) = 15 \cdot 56{,}4$	$\log \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 8{,}83559$	$\log \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0{,}52505$
$\frac{1}{2}(a + b) = 54 \cdot 24{,}4$	$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 9{,}91649$	$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 9{,}45642$
$\frac{1}{2}\gamma = 26 \cdot 15{,}0$	$\log \sin \frac{1}{2}c = 9{,}63940$	$\log \cos \frac{1}{2}c = 9{,}95423$

$$\log \tan \tfrac{1}{2}c = 9{,}68516.$$

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 34^\circ 24',3$
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 73 \cdot 22{,}8$
$\frac{1}{2}c = 25 \cdot 50{,}6$
$\alpha = 107 \cdot 47{,}1$
$\beta = 38 \cdot 58{,}5$
$c = 51 \cdot 41{,}2.$

Zur Erklärung des Schemas sei Folgendes bemerkt: Die erste Columne ist von selbst verständlich; in der zweiten stehen zunächst die Logarithmen zur

Berechnung der rechten Seiten der Formeln (5) und (3), wobei der für beide benutzte $\log\cos\frac{1}{2}\gamma$ nur einmal geschrieben zu werden brauchte. Entsprechendes gilt für die dritte Columne mit Beziehung auf die Gleichungen (4) und (2). Bei den nun in beiden Columnen den Formeln entprechend vorgenommenen Additionen sind nur die Resultate nicht untereinander in die jedesmal zugehörige Columne, sondern horizontal nebeneinander in beide Columnen vertheilt geschrieben. Die Subtraction der jedesmal untereinander gestellten beiden Resultate führt dann den betreffenden Formeln entsprechend auf die nachfolgenden Logarithmen der Tangenten. Aus diesen sind zunächst die beiden ersten Zeilen der vierten Columne berechnet, die dann zur Fortsetzung der Rechnung in von selbst ersichtlicher Weise benutzt wurden. Die für $\log\sin\frac{1}{2}c$ und $\log\cos\frac{1}{2}c$ erhaltenen Werthe müssen zu demselben Werthe von c führen. Da die Sinus und Cosinus nicht immer genau bestimmen, so ist in diesem Beispiel durch Subtraction ihrer beiden Logarithmen $\log\tan\frac{1}{2}c$ entwickelt und dazu $\frac{1}{2}c$ aufgeschlagen worden.

4. Auch für den vorliegenden Fall findet man mehrfach den Gebrauch eines Hülfswinkels statt der Gaussischen Gleichungen empfohlen. Setzt man nämlich in den obigen Formeln (1)

$$\cos b = n\cdot\cos\varphi,\quad \sin b\cos\alpha = n\cdot\sin\varphi,\quad \text{also}\quad \cot\varphi = \frac{\cot b}{\cos\alpha}$$

so wird

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(c-\varphi);\quad \cot\beta = \frac{\cot\alpha}{\sin\varphi}\sin(c-\varphi).$$

Diese Methode ist übrigens durchweg identisch mit einer successiven Berechnung der durch die auf AB senkrechte Höhe entstehenden beiden rechtwinkeligen Dreiecke; die Hülfsgrösse φ ist, wie leicht ersichtlich, nichts anders als der früher mit q bezeichnete Abschnitt AD der Seite AB. Diese Berechnung verdient in dem Falle angewendet zu werden, dass nicht alle drei unbekannten Stücke, sondern nur die fehlende Seite berechnet werden soll.

§ 28. Vierter Fall: Gegeben seien zwei Winkel β, γ und die eingeschlossene Seite a.

Dieser Fall ist dem vorhergehenden dritten polar und es gilt daher dem an entsprechender Stelle bei dem zweiten Fall Gesagten Analoges. Für die unmittelbare Behandlung desselben hat man durch die Formeln (3) und (4) des § 24:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

$$\cot b = \frac{\cos a\cos\gamma + \sin\gamma\cot\beta}{\sin a}$$

$$\cot c = \frac{\cos a\cos\beta + \sin\beta\cot\gamma}{\sin a}$$

und man kann diese Gleichungen für die logarithmische Berechnung numerischer Beispiele mittelst der Substitution

$$\cos\gamma = n\cos\varphi,\quad \sin\gamma\cos a = n\sin\varphi,$$

also

$$\tan\varphi = \frac{\cos a}{\cot\gamma},\quad \cos\alpha = -\frac{\cos\gamma\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi},$$

$$\cot c = \frac{\cot a\sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi},$$

bezw.

$$\tan\psi = \frac{\cos a}{\cot\beta},\quad \cot b = \frac{\cot a\sin(\psi+\gamma)}{\sin\psi}$$

bequemer machen. Man erhält die gleiche Rechnung mittelst der durch die auf *AC*, bezw. *AB* senkrechten Höhe entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke. Sind alle drei unbekannten Stücke, oder auch sind die beiden unbekannten Seiten verlangt, so ist die Anwendung der Neper'schen oder der Gaussischen Gleichungen vorzuziehen. Dieselbe geschieht in entsprechender Weise, wie im vorigen Fall, mit dem Unterschied, dass die beiden Seiten der Gaussischen Gleichungen ihre Rollen vertauschen, bezw. dass statt der Neper'schen Gleichungen (6) und (7) die beiden anderen (8) und (9) angewendet werden. Eine weitere Ausführung des Verfahrens wird hiernach erlässlich sein.

§ 29. Fünfter Fall: Gegeben seien zwei Seiten b, c und ein gegenüberliegender Winkel γ.

Man findet zunächst den anderen gegenüberliegenden Winkel β mittelst des Sinussatzes, also durch die Gleichung

$$\sin\beta = \frac{\sin b \cdot \sin\gamma}{\sin c},$$

und diese, auch logarithmisch ununterbrochene Rechnung ist in allen Fällen die einfachste. Die Bestimmung von β durch den Sinus führt auf die aus Stereom. § 8, 3 und § 15 bekannte Zweideutigkeit des Falls. Ueber die Fälle, in welchen das Dreieck durch die gegebenen Stücke eindeutig bestimmt ist, findet man das Nothwendige am angeführten Orte. In praktischen Fällen wird in der Regel eine allgemeine Kenntniss der Gestalt des zu berechnenden Dreiecks vorhanden sein, aus welcher es sich von vornherein ergiebt, ob für β der spitze oder der stumpfe Winkel zu rechnen ist. Deshalb ist es auch nicht nothwendig, hier näher auf jene Zweideutigkeit einzugehen.

Es erübrigt nun noch die Berechnung der fehlenden Seite a und des ihr gegenüberliegenden Winkels α. Um unmittelbare Formeln für dieselben zu erhalten, kann man aus § 24 (3) den Ausdruck für $\cos\alpha$ in § 24 (2), oder aus (2) den Ausdruck für $\cos a$ in (3) einsetzen. Die Ausführung dieses Verfahrens kann dem Leser überlassen bleiben, da aber die entsprechenden Formeln für numerische Rechnung unbequem sind, so ist für solche das folgende Verfahren vorzuziehen:

Die Gleichung § 24, (4) ist in der Form

$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \cot\gamma$$

eine unmittelbare Beziehungsgleichung zwischen α und den gegebenen Stücken. Da in derselben $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ neben einander vorkommen, so bedient man sich zur Auflösung zweckmässig eines Hülfswinkels, indem man etwa

$$\cot\gamma = n \cdot \sin\varphi, \quad \cos b = n \cos\varphi$$

setzt, woraus

$$\cot\varphi = \cos b \cdot \tang\gamma; \quad \cos(\alpha - \varphi) = \tang b \cot c \cos\varphi$$

hervorgeht. Ist hieraus α gefunden, so kann a auf doppelte Weise mittelst des Sinussatzes berechnet werden. Man kann aber auch ganz entsprechend dem Vorstehenden die Gleichung § 24, (2) in der Form

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

benutzen. Setzt man hier behufs der Auflösung auf a

$$\cos b = n \cdot \cos\psi, \quad \sin b \cos\gamma = n \cdot \sin\psi,$$

so erhält man

$$\tang\psi = \tang b \cos\gamma; \quad \cos(a - \psi) = \frac{\cos c}{\cos b}\cos\psi.$$

Ist so zuerst a berechnet, so kann auch α mittelst des Sinussatzes gefunden werden.

Die hier gebrauchten Hülfsgrössen φ und ψ sind wieder Stücke der durch die Höhe auf der Seite BC bestimmten rechtwinkeligen Dreiecke, nämlich ψ gleich einem der Abschnitte dieser Seite und φ gleich dem entsprechenden Theil des gegenüberliegenden Winkels. Das vorstehende Verfahren kann also als eine successive Berechnung der genannten rechtwinkeligen Dreiecke dargestellt werden.

Die Berechnung von β durch den Sinus erfordert noch die Bemerkung, dass man für den Fall einer nicht hinreichend genauen Bestimmung durch die Tafeln sich der Gleichung

$$\sin c \cdot \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = \sin b \, \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma) - \sin \tfrac{1}{2}(b - c) \cos \tfrac{1}{2}(b + c)$$

bedienen kann. Man erhält dieselbe aus dem Sinussatze

$$\sin b \cdot \sin \gamma = \sin c \, \sin \beta,$$

wenn man für $\sin \beta$, $\cos (90^\circ - \beta) = 1 - 2 \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta)$ und für $\sin \gamma$, $\cos (90^\circ - \gamma) = 1 - 2 \sin^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma)$ setzt und einige dann nahe liegende Umformungen vornimmt.

§ 30. Sechster Fall: Gegeben seien zwei Winkel β, γ und eine gegenüberliegende Seite c.

Für diesen, dem vorigen polaren Fall erhält man die nothwendigen Formeln in ganz entsprechender Weise, wie vorher. Man hat also zunächst

$$\sin b = \frac{\sin \beta \, \sin c}{\sin \gamma},$$

und es gilt in Betreff der Zweideutigkeit des Falls Analoges wie im § 29. Setzt man in

$$\cos a \cos \beta = \sin a \cot c - \sin \beta \cot \gamma$$

$$\cot c = n \cos \varphi; \quad \cos \beta = n \sin \varphi, \text{ also } \tan \varphi = \cos \beta \cdot \tan c,$$

so wird

$$\sin (a - \varphi) = \tan \beta \cdot \cot \gamma \cdot \sin \varphi,$$

und setzt man in

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

$$\cos \beta = n \sin \psi, \ \sin \beta \cdot \cos c = n \cos \psi, \text{ also } \cot \psi = \cos c \cdot \tan \beta,$$

so wird

$$\sin (\alpha - \psi) = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \sin \psi.$$

Dieselben Formeln findet man wieder direkt aus den beiden rechtwinkeligen Dreiecken, welche durch die zu BC senkrechte Höhe entstehen; es ist φ gleich dem einen Abschnitt von BC, ψ gleich dem diesem Abschnitt gegenüberliegenden Winkeltheil.

§ 31. Der Flächeninhalt.

Der Flächeninhalt F eines sphärischen Dreiecks wird nach Stereom. § 19, (5) aus den drei Winkeln des letzteren ohne trigonometrische Rechnung mittelst der Formel

$$F = e \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

(oder für den Radius r, mittelst $r^2 e \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ}$) gefunden, in welcher e den sphärischen Excess bedeutet, also gleich $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ ist.

Sind zur Berechnung von F aber nicht die drei Winkel gegeben, sondern

ist die Auswahl der gegebenen Bestimmungsstücke eine andere, so können zunächst die fehlenden Winkel nach dem vorher bei dem betreffenden Fall angegebenen Verfahren berechnet werden.

Da es sich hierbei nicht um die Kenntniss der einzelnen Winkel selbst, sondern nur um die des sphärischen Excesses e handelt, so kann man unmittelbare Formeln für letzteren suchen. Für den Fall, dass die drei Seiten gegeben sind, gelangt man hierbei zu einem bemerkenswerthen Resultat. Schreibt man nämlich die Gaussische Gleichung

$$cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot cos\tfrac{1}{2}c = cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

in der Form

$$\frac{cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{cos(90^\circ-\frac{1}{2}\gamma)} = \frac{cos\frac{1}{2}(a+b)}{cos\frac{1}{2}c},$$

so kann man daraus mittelst eines bekannten Satzes der Proportionslehre die andere Gleichung

$$\frac{cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-cos(90^\circ-\frac{1}{2}\gamma)}{cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+cos(90^\circ+\frac{1}{2}\gamma)} = \frac{cos\frac{1}{2}(a+b)-cos\frac{1}{2}c}{cos\frac{1}{2}(a+b)+cos\frac{1}{2}c}$$

ableiten, woraus dann weiter in bekannter Weise

$$tang\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ)\cdot tang\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma+180^\circ) = tang\tfrac{1}{4}(a+b-c)\, tang\tfrac{1}{4}(a+b+c)$$

hervorgeht. Führt man hier wieder die Abkürzung $a+b+c=2s$ ein, und setzt $\alpha+\beta-\gamma+180^\circ = e+360^\circ-2\gamma$, so erhält man

$$tang\tfrac{1}{4}e\cdot cot\tfrac{1}{4}(2\gamma-e) = tang\tfrac{1}{2}s\cdot tang\tfrac{1}{2}(s-c). \quad (1)$$

Verfährt man in gleicher Weise mit der Gaussischen Gleichung

$$sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot cos\tfrac{1}{2}c = cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cdot cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

so erhält man die entsprechende Formel

$$tang\tfrac{1}{4}e\cdot tang\tfrac{1}{4}(2\gamma-e) = tang\tfrac{1}{2}(s-a)\cdot tang\tfrac{1}{2}(s-b). \quad (2)$$

Multiplicirt man die homologen Seiten der Gleichungen (1) und (2) mit einander, so ergiebt sich

$$tang^2\tfrac{1}{4}e = tang\tfrac{1}{2}s\cdot tang\tfrac{1}{2}(s-a)\cdot tang\tfrac{1}{2}(s-b)\cdot tang\tfrac{1}{2}(s-c). \quad (3)$$

Diese letztere Gleichung zeigt, wie der sphärische Excess e unmittelbar aus den drei Seiten des Dreiecks berechnet werden kann.

Beispiele der Anwendung dieser Formeln, sowie zu den vorhergehenden Fällen der Dreiecks-Berechnung findet man in Reidt, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie, 1. Theil: Trigonometrie. Zweite Auflage. Leipzig 1877, B. G. Teubner.

Anhang 1, zum ersten Abschnitt.

Die Auflösung trigonometrischer Bestimmungs-Gleichungen.

1. Enthält eine Bestimmungsgleichung trigonometrische Functionen eines unbekannten Winkels oder Bogens, so entzieht sie sich als transscendente Gleichung der unmittelbaren Anwendung der in der Arithmetik für die Auflösung algebraischer Gleichungen angegebenen Methoden.

Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, in welchem eine gegebene Gleichung nur eine einzige trigonometrische Function einer Unbekannten und ausserdem diese letztere in keiner anderen Verbindung enthält. Beispiele dieses Falls bieten die Gleichungen

$$9\,sin^2 x + 27\,sin\,x = 10$$

$$\left(\frac{3}{cos\,x}-4\right)^2 - \left(\frac{1}{cos\,x}-1\right)^2 = 3$$

$$\frac{2}{cot\,x} + \frac{cot\,x}{2} = 2\,cot\,x,$$

von denen die erste nur $sin\,x$, die zweite nur $cos\,x$, die dritte nur $cot\,x$ enthält. Bei solchen Gleichungen kann man statt x die betreffende Function als die gesuchte Unbekannte ansehen, die in Beziehung auf letztere algebraische Gleichung in bekannter Weise auflösen und schliesslich zu den gefundenen Werthen der Function auch die Winkel durch Aufschlagen in den Tafeln oder durch direkte Berechnung ermitteln, falls dies überhaupt als nöthig erscheint. So führt die erste der oben beispielsweise aufgestellten Gleichungen, indem man sie als quadratische Gleichung für die Unbekannte $sin\,x$ behandelt, auf

$$sin\,x = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{11}{6}.$$

Von den beiden so gewonnenen Wurzeln der Gleichung $sin\,x_1 = \frac{1}{3}$, $sin\,x_2 = -\frac{10}{3}$ ist die zweite unmöglich, da der absolute Werth eines Sinus nie grösser als 1 sein kann. Da diese in dem Begriff des Sinus liegende Bedingung bei der Behandlung der gegebenen Gleichung als einer algebraischen mit der Unbekannten $sin\,x$ unberücksichtigt bleiben musste, so kann es nicht überraschen, dass durch die Auflösung ganz allgemein alle Zahlen gefunden werden, welche für diese Unbekannte gesetzt der Gleichung genügen. Es ergiebt sich hieraus die Nothwendigkeit, die bei solchem Auflösen einer trigonometrischen Gleichung erhaltenen Wurzelwerthe mit Rücksicht auf die etwa sonst vorhandenen und bei der Auflösung unbeachtet gebliebenen Bedingungen auf ihre Zulässigkeit zu prüfen.

Für die Auflösung $sin\,x = \frac{1}{3}$ ergeben nun die Tafeln den Winkel $x = 19°\,28',3$. Daraus, dass $sin\,19°\,28',3 = \frac{1}{3}$ ist, kann jedoch nicht umgekehrt gefolgert werden, dass ein Winkel, dessen Sinus den Werth $\frac{1}{3}$ habe, gleich $19°\,28',3$ sein müsse, vielmehr genügt auch zufolge § 3 bezw. § 6 der Winkel $180° - 19°\,28',3 = 160°\,31',7$ der Gleichung. Ausserdem haben alle diejenigen Winkel denselben Werth des Sinus, welche aus den beiden genannten durch Addition oder Subtraction von 360° oder einem Vielfachen von 360° hervorgehen. Der obigen Gleichung genügen also alle in den Ausdrücken

$$19°\,28',3 \pm n \cdot 360° \quad \text{und} \quad 160°\,31',7 \pm n \cdot 360°$$

für jeden beliebigen ganzen Werth von n einschliesslich der Null enthaltenen Winkel.

Das vorstehend Gesagte lässt sich leicht verallgemeinern. Es ergiebt sich so, dass zu jeder trigonometrischen Gleichung unzählig viele Wurzeln gehören, von denen jedesmal mindestens zwei in einem der vier ersten Quadranten liegen und als die — bei praktischen Anwendungen in der Regel ausschliesslich zu berücksichtigenden — Haupt-Auflösungen betrachtet werden können.

So erhält man beispielsweise aus der zweiten der oben angeführten Gleichungen, nachdem zunächst durch Ordnen

$$6\,cos^2 x - 11\,cos\,x = -4$$

abgeleitet ist,

$$cos\,x = \frac{\pm 5 + 11}{12}.$$

Von den beiden so gewonnenen Werthen ist nur $cos\,x = \frac{1}{2}$ brauchbar, und da $cos\,60° = \frac{1}{2}$, so hat man die beiden Haupt-Auflösungen $x_1 = 60°$ und $x_2 = 300°$.

Die dritte der obigen Gleichungen führt auf $cot\,x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ oder $tang\,x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und hier sind beide Wurzeln der Gleichung brauchbar, und man erhält

deshalb vier Haupt-Auflösungen, nämlich $x_1 = 40° 53',6$; $x_2 = 139° 6',4$; $x_3 = 220° 53',6$; $x_4 = 319° 6',4$.

2. Enthält eine Gleichung verschiedene Functionen eines unbekannten Winkels oder Bogens, aber ausserdem den letzteren in keiner anderen Weise, so kann man alle vorkommenden Functionen der Unbekannten durch eine und dieselbe Function ausdrücken und so diesen Fall auf den vorigen zurückführen.

Entweder wählt man eine der schon vorhandenen Functionen des gesuchten Winkels als Unbekannte und drückt alle übrigen durch diese aus, oder man führt sämmtliche vorkommende solche Functionen, falls dies vortheilhafter erscheinen sollte, auf eine und dieselbe der noch übrigen zurück. Es sei z. B. die Gleichung

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

gegeben, so kann man $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$ einsetzen und dann auf $\cos x$ auflösen, oder man kann $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$ einsetzen und dann auf $\sin x$ auflösen. Beide Methoden haben den Nachtheil, dass durch das Quadriren behufs der nothwendigen Wegschaffung der Wurzelgrösse die Zahl der Wurzeln der Gleichung vermehrt wird. Setzt man z. B. den Ausdruck für $\sin x$ ein, so erhält man

$$a\,(1 - \cos^2 x) + b \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} + c \cos^2 x = 0,$$

oder

$$b \cos x \sqrt{1 - \cos^2 x} = -a + (a - c) \cos^2 x,$$

und erhebt man nun beide Seiten in's Quadrat, so muss die entstehende Gleichung nicht nur die Wurzeln der oben gegebenen, sondern auch die der anderen

$$a \sin^2 x - b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

haben, da auch diese durch dasselbe Verfahren auf dieselbe Gleichung wie vorhin führt. Ausserdem wird mit dieser Verdoppelung der Anzahl der Wurzeln — von denen also die für die gegebene Gleichung gültigen durch eine besondere Untersuchung zu ermitteln wären — auch der Grad der Gleichung erhöht. Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, bei dem vorstehenden Beispiel keinen der beiden angegebenen Wege einzuschlagen und vielmehr sowol $\sin x$ als $\cos x$ durch eine und dieselbe dritte Function auszudrücken. Dies geschieht hier sehr leicht, indem man alle Glieder durch $\cos^2 x$ dividirt. Man erhält so

$$a \cdot \tang^2 x + b \cdot \tang x + c = 0$$

und hieraus auf bekannte Weise zwei Werthe für $\tang x$.

3. Enthält eine Gleichung Functionen verschiedener unbekannter Winkel und stehen diese Winkel zu einander in bestimmten Beziehungen, wie z. B. x und $2x$ oder $x + \alpha$ und $x - \alpha$ u. dgl., so kann man zunächst diese Winkel sämmtlich durch Entwicklung oder Zusammenfassung der Functionen mittelst früherer Formeln durch einen und denselben Winkel ausdrücken, um dann wie vorher zu verfahren.

Es sei z. B. die Gleichung

$$\sin (x + a) + \cos (x - a) = b$$

aufzulösen. Durch Entwicklung erhält man zunächst

$$\sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a + \cos x \cdot \cos a + \sin x \cdot \sin a = b,$$

oder

$$\sin x \cdot (\cos a + \sin a) + \cos x \cdot (\sin a + \cos a) = b,$$

oder

$$\sin x + \cos x = \frac{b}{\sin a + \cos a},$$

worauf sich das weitere Verfahren aus dem Vorigen ergiebt. Man kann ebenso für $\sin (x + a) + \sin (x - a) = b$ durch Benutzung der Formel

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b)$$

die linke Seite der gegebenen Gleichung zu $2 \sin x \cdot \cos a$ zusammenfassen und erhält dann ohne Weiteres

$$\sin x = \frac{b}{2 \cos a}.$$

Zuweilen ist es vortheilhaft, umgekehrt statt des in der gegebenen Gleichung enthaltenen unbekannten Winkels x einen anderen, von ihm abhängigen Winkel einzuführen und die Gleichung auf eine Function des letzteren aufzulösen. So kann man z. B. die Gleichung

$$\sin x + \cos x = c$$

durch Erheben beider Seiten in's Quadrat zunächst in

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = c^2$$

umformen, woraus dann leicht

$$1 + \sin 2x - c^2,$$
$$\sin 2x = c^2 = 1$$

folgt. Hierbei ist jedoch wieder die Vermehrung der Wurzeln durch das Quadriren zu beachten. Ist beispielsweise $c = + \frac{1}{2}\sqrt{6}$, so ist $\sin 2x = \frac{1}{2}$, woraus $2x = 30^\circ$ oder 150° oder 390°, 510° u. s w., also $x = 15^\circ$, 75°, 195°, 255° u. s. w. folgen würde. Allein die Winkel 195° und 255° haben negative Sinus und Cosinus und entsprechen daher nicht der oben gegebenen Gleichung, sondern der anderen

$$\sin x + \cos x = -c,$$

welche durch Quadriren beider Seiten zu derselben Schlussgleichung, wie jene führt.

Enthält endlich eine Gleichung Functionen zweier oder mehrerer Winkel, die sich nicht auf denselben Winkel zurückführen lassen, so hat man ebenso viele verschiedene Unbekannte anzunehmen, bedarf dann selbstverständlich einer gleichen Anzahl von Bestimmungsgleichungen und bedient sich der aus der Arithmetik bekannten Eliminations-Methoden.

4. Kommen in einer oder mehreren gegebenen Gleichungen nicht bloss trigonometrische Functionen unbekannter Winkel, sondern auch solche Winkel selbst vor, so kann die Auflösung erheblich erschwert sein. Wir wollen zunächst den einfacheren Fall voraussetzen, dass jede einzelne gegebene Gleichung entweder nur trigonometrische Functionen der Unbekannten oder nur diese letzteren selbst enthalte, dass aber zwei oder mehrere solche Gleichungen von beiden Arten für mehrere Unbekannte verbunden seien.

In diesem Falle kann man stets aus denjenigen gegebenen Gleichungen, welche die unbekannten Winkel selbst enthalten, eine gleiche Anzahl der letzteren durch die übrigen ausdrücken, die gefundenen Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen der anderen Art substituiren und dann die Eliminationsgleichungen, wie vorher angegeben, behandeln.

Es seien z. B. die Gleichungen

$$x + y = a$$
$$\sin x + \sin y = b$$

aufzulösen, so kann man aus der ersten derselben $y = a - x$ in die zweite einsetzen, und dann die Eliminationsgleichung

$$\sin x + \sin(a - x) = b$$

mittelst der Umformungen

$$\sin x + \sin a \cos x - \cos a \cdot \sin x = b$$
$$\sin x (1 - \cos a) + \sin a \cdot \cos x = b$$

$$\sin x (1 - \cos a) + \sin a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x} = b$$

zu einer Gleichung mit einer Unbekannten $\sin x$ umgestalten. Nach Auflösung derselben ergiebt sich dann y durch $y = a - x$ oder auch durch $\sin y = b - \sin x$.

Das vorstehende Beispiel gehört einer Gruppe häufig vorkommender Aufgaben an, welche zugleich zeigen, dass sich das so eben beschriebene, zuweilen zu Umständlichkeiten führende Verfahren in manchen Fällen durch ein zweckmässigeres ersetzen lässt. In den obigen Gleichungen wird man nämlich vorziehen, in die zweite Gleichung statt der unbekannten Winkel x, y die Differenz derselben als Unbekannte einzuführen. Nach § 9, (14) führt nämlich diese Gleichung zu

$$2 \sin\tfrac{1}{2}(x + y) \cos\tfrac{1}{2}(x - y) = b,$$

und da $x + y = a$ aus der ersten Gleichung bekannt ist, ergiebt sich

$$\cos\tfrac{1}{2}(x - y) = \frac{b}{2 \cdot \sin\frac{1}{2} a}.$$

Ist hieraus $\frac{1}{2}(x - y)$ gefunden, so ergeben sich x und y leicht durch Addition des betreffenden Werthes zu $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2} a$ bezw. durch Subtraction beider.

In entsprechender Weise ergeben sich zu folgenden Aufgaben die beigesetzten Auflösungen.

a) $x - y = a$ $\sin x + \sin y = b$	$\sin\frac{1}{2}(x + y) = \dfrac{b}{2 \cos\frac{1}{2} a}$.
b) $x + y = a$ $\sin x - \sin y = b$	$\sin\frac{1}{2}(x - y) = \dfrac{b}{2 \cos\frac{1}{2} a}$.
c) $x - y = a$ $\sin x - \sin y = b$	$\cos\frac{1}{2}(x + y) = \dfrac{b}{2 \sin\frac{1}{2} a}$

In ähnlicher Weise behandelt man die Fälle, in welchen der Werth von $x + y$ oder $x - y$ in Verbindung mit demjenigen von $\cos x \pm \cos y$ gegeben ist.

Ist dagegen in der zweiten Gleichung $\sin x \pm \cos y$ gegeben, so kann man die Aufgabe auf eine der vorhergehenden zurückführen, indem man entweder für x oder für y das Complement dieses Winkels als Unbekannte einführt.

Ist ferner statt der Summe oder Differenz zweier unbekannten Sinus oder Cosinus das Produkt derselben gegeben, so beachte man, dass z. B.

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\left(\sin(x + y) + \sin(x - y)\right)$$

ist, so dass man, wenn etwa

$$x + y = a; \quad \sin x \cdot \cos y = b$$

gegeben wäre, zu der ersteren Gleichung die fernere

$$\sin(x - y) = 2b - \sin a$$

erhält. Hiernach ist das Verfahren für die Fälle, in welchen $\cos x \cdot \sin y$ oder $\cos x \cdot \cos y$ oder $\sin x \cdot \sin y$ gegeben sind, von selbst einleuchtend.

Ist ferner in der zweiten Gleichung $\tang x \pm \tang y$ oder $\cot x \pm \cot y$ gegeben, so beachte man, dass z. B.

$$\tang x \pm \tang y = \frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y}$$
$$= \frac{\sin(x \pm y)}{\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]}$$

ist, so wie die entsprechende Formel für die Cotangenten.

Ist endlich in der zweiten Gleichung ein Produkt zweier Tangenten oder Cotangenten gegeben, so setze man beispielsweise

$$\tang x \cdot \tang y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)},$$

so dass, wenn etwa $x + y = \alpha$, $tang\, x \cdot tang\, y = b$ gegeben wäre, zu der Summe der unbekannten Winkel die Differenz derselben aus

$$cos\, (1 - y) = \frac{(1 + b)\ cos\, \alpha}{1 - b}$$

gefunden werden kann. In ganz entsprechender Weise sind die analogen Fälle, in welchen $cot\, x \cdot cot\, y$ oder $tang\, x \cdot cot\, y$ gegeben sind, zu behandeln.

5. Kommen dagegen in einer und derselben Gleichung ein oder mehrere unbekannte Winkel selbst neben trigonometrischen Functionen derselben vor, so kann nur bei numerischen Aufgaben durch ein näherungsweises Verfahren zum Ziel gelangt werden. Dieses Verfahren soll im Folgenden durch einige Beispiele erläutert werden.*)

Aufgabe 1: Die Gleichung $x = 332°28'55'' + 14°3'20'' \cdot sin\, x$ aufzulösen.

Durch Versuche, d. h. hier durch Substitution von nur ganze Grade enthaltenden Winkeln für x findet man als erste Annäherung den Werth 330° und kann daher

$$x = 330° + y'$$

setzen. Nun erhält man mit Benutzung der Proportionaltheilchen der Tafeln, wenn man noch der Kürze halber 332°28'55'' durch a und 14°3'20'' durch b bezeichnet,

$$\begin{aligned}
log\ \ sin\, x &= 9{,}69897\, n - 22\, y \\
log\, b = \quad log\, 50600'' &= 4{,}70415 \\
\hline
log\, (b \cdot sin\, x) &= 4{,}40312\, n - 22\, y \\
b \cdot sin\, x &= -25300'' + 22\, y \cdot \tfrac{10}{17}'' \\
&= -7°1'40'' + 13\, y'' \\
a + b\, sin\, x &= 325°27'15'' + 13\, y'' \\
&= 330° \qquad + 60\, y'', \\
\hline
\text{also} \qquad 47\, y'' &= -4°32'45'' = -16356'' \\
y'' &= -348 \\
y' &= -5°48'.
\end{aligned}$$

Die Anbringung dieser Correctur führt zu dem zweiten Näherungswerth

$$x = 324°12',$$

mit welchem das Verfahren wiederholt wird. Auf dieselbe Weise fortschreitend, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, erhält man folgende weitere Ausrechnung:

$$\begin{aligned}
x &= 324°12' + z'' \\
log\ \ sin\, x &= 9{,}76712\, n - \frac{17{,}5}{60} z \\
log\, b &= 4{,}70415 \\
\hline
log\, (b\ sin\, x) &= 4{,}47127\, n - \frac{17{,}5}{60} z \\
b \cdot sin\, x &= -29599'' + \frac{17{,}5}{60}\, z \cdot \frac{10''}{15} \\
&= -8°13'19'' + 0{,}19\, z'' \\
a + b\, sin\, x &= 324°15'36'' + 0{,}19\, y'' \\
&= 324°12' \quad + \quad y'' \\
\hline
0{,}81\, y'' &= 3'36'' = 216'' \\
y'' &= 267'' = +4'27''.
\end{aligned}$$

3. Annahme:

$$\begin{aligned}
x &= 324°16'27'' + u'' \\
log\ \ sin\, x &= 9{,}7663439\, n - 29{,}27\, u'' \\
log\, b &= 4{,}7041505 \\
\hline
log\, (b\ sin\, x) &= 4{,}4704944\, n - 29{,}27\, u''
\end{aligned}$$

*) Dieselben sind des Verf. »Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie, Leipzig 1877, B. G. Teubner« entnommen.

$$b \sin x = -29545'',7 + \frac{29,27}{147} u''$$
$$= -8^\circ 12' 25'',7 + 0,1992\, u''$$
$$a + b \sin x = 324^\circ 16' 29'',3 + 0,1992\, u''$$
$$= 324^\circ 16' 27'' + u''$$
$$0,8008\, u'' = +2'',3; \quad u'' = +2'',87.$$

4. Annahme: $x = 324^\circ 16' 29'',87 + v''$

$$9,7663354\, n + 29,27\, v''$$
$$4,7041505$$
$$4,4704859\, n + 29,27\, v''$$
$$-8^\circ 12' 25'',13 + \frac{29,27}{147} v''$$
$$324^\circ 16' 29'',87 + 0,1992\, v''$$
$$= 324^\circ 16' 29'',87 + v''$$
$$0,8008\, v'' = 0'',00 \ldots,$$

also $x = 324^\circ 16' 29'',87$.

Aufgabe 2: Die Gleichung $\frac{x^0}{\sin^2 x} = 80^\circ$ aufzulösen.

1. Annahme: $x = 50^\circ + y' = 3000' + y'$

$$\log x' = 3,47712 = 15 y$$
$$\log \sin^2 x = 9,76850 + 22 y$$
$$3,70862 - 7 y = 3,68124$$
$$7 y = +0,02738; \quad y' = +391' = +6^\circ 31'.$$

2. Annahme: $x = 56^\circ 31' + z' = 3391' + z'$

$$\log x' = 3,53033 + 13 z$$
$$\log \sin^2 x = 9,84238 + 16 z$$
$$3,68795 - 3 z = 3,68124$$
$$3 z = 671'; \quad z = 224' = +3^\circ 44'.$$

3. Annahme: $x = 60^\circ 15' + u' = 3615' + u'$

$$\log x' = 3,55811 + 12 u$$
$$\log \sin^2 x = 9,87724 + 14 u$$
$$3,68087 - 2 u = 3,68124$$
$$2 u = -37'; \quad u = -18' 30''$$

4. Annahme: $x = 59^\circ 56' 30'' + v' = 3596',5 + v'$

$$3,55588 + 12 v$$
$$9,87455 + 14 v$$
$$3,68133 - 2 v = 3,68124$$
$$2 v = +9, \quad v = +4'',5.$$

5. Annahme: $x = 60^\circ 1' + w'' = 216060'' + w''$

$$\log x'' = 5,3345744 + 20,1 w$$
$$\log \sin^2 x = 9,8752070 + 24,28 w$$
$$5,4593674 - 4,18 w$$
$$5,4593925 = \log 288000''$$
$$4,18 w = -251''; \quad w = -60''$$

6. Annahme: $x = 60^\circ 0' 0'' + q'' = 216000$

$$5,3344538 + 20,1 q$$
$$9,8750612 + 24,3 q$$
$$5,4593926 - 4,2 q$$
$$= 5,4593925.$$
$$x = 60^\circ 0' 0''.$$

6. Die Auflösung trigonometrischer Bestimmungsgleichungen wird häufig sehr erleichtert durch die Anwendung sogenannter Hülfswinkel. Dieselbe beruht darauf, dass jede reelle (unbenannte) Zahl gleich der Tangente oder der Cotangente eines Winkels, jede reelle, positive oder negative Zahl, deren absoluter Werth nicht grösser als 1 ist, gleich dem Sinus oder dem Cosinus eines Winkels gesetzt werden kann. Ferner kann man, wenn x und y irgend zwei reelle Zahlen sind, stets

$$x = n \cdot \sin \varphi, \quad y = n \cdot \cos \varphi$$

setzen, wo φ ein zu bestimmender Hülfswinkel, n ein zu bestimmender reeller Faktor ist. Durch Quadriren und Addiren erhält man aus den vorstehenden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = n^2 (sin^2 \varphi + cos^2 \varphi), \text{ also } n = \sqrt{x^2 + y^2},$$

durch Dividiren

$$tang\, \varphi = \frac{x}{y}.$$

Aus diesen letzteren Gleichungen geht hervor, dass φ und n sich stets bestimmen lassen. Ist φ gefunden, so ergiebt sich n auch aus

$$n = \frac{x}{sin\, \varphi} = \frac{y}{cos\, \varphi}.$$

Als Beispiele der Anwendung der Hülfswinkel mögen folgende Aufgaben dienen:

Aufgabe 1: Die Gleichung $a \cdot sin\, x \pm b \cdot cos\, x = c$ aufzulösen.

Setzt man $a = n \cdot cos\, \varphi$, $b = n \cdot sin\, \varphi$, so erhält man

$$n \cdot (sin\, x \cdot cos\, \varphi \pm cos\, x \cdot sin\, \varphi) = c$$

oder $\quad n \cdot sin\, (x \pm \varphi) = c.$

Man bestimme hiernach zuerst φ durch

$$tang\, \varphi = \frac{b}{a},$$

so ist aus $sin\, (x \pm \varphi) = \frac{c}{n}$ oder, wegen $n = \frac{a}{cos\, \varphi}$, aus

$$sin\, (x \pm \varphi) = \frac{c\, cos\, \varphi}{a}$$

leicht $x \pm \varphi$ und hieraus x zu ermitteln.

Aufgabe 2: Die folgenden Gleichungen aufzulösen:

$$a\, sin\, x + b\, sin\, y = c$$
$$x + y = 2\sigma.$$

Setzt man $x - y = 2\delta$, wo δ eine neue Unbekannte bezeichnet, so ist $x = \sigma + \delta$, $y = \sigma - \delta$, und durch Substitution dieser Werthe in die erste gegebene Gleichung geht diese über in

$$a \cdot sin\, (\sigma + \delta) + b \cdot sin\, (\sigma - \delta) = c,$$

woraus leicht

$$(a + b)\, sin\, \sigma \cdot cos\, \delta + (a - b)\, cos\, \sigma \cdot sin\, \delta = c$$

folgt. Diese letztere Gleichung lässt sich auf dem in der vorigen Aufgabe angegebenen Wege auf δ auflösen. Aus δ und σ ergeben sich dann leicht x und y.

Anhang 2, zum zweiten Abschnitt.

Berechnung anderweiter Stücke des ebenen Dreiecks.

1. Ausser den Seiten und Winkeln oder dem Flächeninhalt eines Dreiecks können noch anderweite Stücke verlangt sein, wie z. B. eine oder mehrere Höhen, der Radius des umbeschriebenen und die Radien der verschiedenen Berührungskreise, die innerhalb des Dreiecks fallenden Abschnitte der winkelhalbirenden Transversalen oder der Mittellinien, u. dgl. m. Die Formeln, welche die Resultate solcher Aufgaben angeben, werden selbstverständlich für ein und dasselbe gesuchte Stück sehr verschieden ausfallen, je nachdem die gegebenen Bestimmungsstücke verschieden sind. Es sei deshalb hier zunächst verlangt,

jene mittelbaren Grössen durch den Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises und die Winkel α, β, γ auszudrücken, wobei die Resultate eine möglichst symmetrische Form erhalten. Da ferner zwischen diesen Grössen und den Seiten des Dreiecks die bereits bekannten Gleichungen

$$a = 2r \cdot \sin\alpha,\quad b = 2r \cdot \sin\beta,\quad c = 2r \cdot \sin\gamma$$

bestehen, so kann man auch die gewonnenen Resultate für solche Fälle umformen, in welchen die gegebenen Bestimmungsstücke drei beliebig unter den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgewählte sind. Man hat nämlich zu diesem Zwecke die nicht gegebenen der Grössen r, α, β, γ mit Hülfe der vorstehenden Formeln zu eliminiren.

Bezeichnen wir die Maasszahlen der Höhen AA_1, BB_1, CC_1 des Dreiecks ABC bezüglich durch h_a, h_b, h_c und setzen die von diesen Höhen gebildeten Seitenabschnitte $BA_1 = q_a$, $CA_1 = p_a$, $CB_1 = q_b$, $AB_1 = p_b$, $AC_1 = q_c$, $BC_1 = p_c$, so erhält man beispielsweise aus dem rechtwinkeligen Dreieck ACA_1,

$$h_a = b \cdot \sin\gamma, \text{ und folglich wegen } b = 2r\sin\beta$$

$$h_a = 2r\sin\beta\ \sin\gamma.$$

Entsprechend ist

$$h_b = 2r\sin\alpha\ \sin\gamma.$$

$$h_c = 2r\sin\alpha\ \sin\beta.$$

Ferner ist $p_a = b \cdot \cos\gamma = 2r\sin\beta\ \cos\gamma$; $q_a = c \cdot \cos\beta = 2r\cos\beta\ \sin\gamma$; und entsprechend erhält man noch

$$p_b = 2r\cos\alpha\ \sin\gamma;\quad q_b = 2r\sin\alpha\ \cos\gamma$$

$$p_c = 2r\sin\alpha\ \cos\beta;\quad q_c = 2r\sin\beta\ \cos\alpha.$$

2. Es sei ferner O der Mittelpunkt und A_2 der auf BC liegende Berührungspunkt des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises. Zieht man OA_2, OB, OC, so erhält man die rechtwinkeligen Dreiecke OBA_2, OCA_2, in denen nach Planimetrie § 22, $\angle OBA_2 = \frac{1}{2}\beta$, $\angle OCA_2 = \frac{1}{2}\gamma$ sein muss. Bezeichnet nun ρ die Maasszahl des Radius OA_2 des Kreises O, so ist hiernach

$$BA_2 = \rho \cdot \cot\tfrac{1}{2}\beta;\quad CA_1 = \rho \cdot \cot\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ also wegen } a = BA_2 + CA_2,$$

$$a = \rho\ (\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Nun ist $\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \dfrac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma}$

$= \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma}$, also wegen $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, gleich $\dfrac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma}$.

Demnach erhält man

$$\rho = \frac{a}{\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma} = \frac{a \cdot \sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

oder wenn man $a = 2r\sin\alpha = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha$ einsetzt,

$$\rho = 4r \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

In ganz entsprechender Weise ergiebt sich für den Radius ρ_a des Kreises, welcher die Seite BC und die Verlängerungen von AB und AC berührt, wenn O_aA_3 der zu BC gehörige Berührungsradius dieses Kreises ist, aus den rechtwinkeligen Dreiecken O_aBA_3, O_aCA_3,

$$BA_3 = \rho_a \cdot \cot\tfrac{1}{2}(180° - \beta) = \rho_a \tan\tfrac{1}{2}\beta;\quad CA_3 = \rho_a \tan\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$a = BA_3 + CA_3 = \rho_a(\tan\tfrac{1}{2}\beta + \tan\tfrac{1}{2}\gamma) = \rho_a \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\rho_a\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\ \cos\frac{1}{2}\gamma}$$

woraus wieder mittelst $a = 4r\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha$ leicht

$$\rho_a = 4r\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\beta\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

folgt. Entsprechend muss

$$\rho_b = 4r \cos \tfrac{1}{2}\alpha \; \sin \tfrac{1}{2}\beta \; \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\rho_c = 4r \cos \tfrac{1}{2}\alpha \; \cos \tfrac{1}{2}\beta \; \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

sein.

3. Um die winkelhalbirenden Transversalen des Dreiecks ABC zu berechnen, sei $AA_1 = w_a$ eine solche Transversale, dann ist in dem Dreieck AA_1B der Winkel AA_1B (als Aussenwinkel des Dreiecks AA_1C) gleich $\gamma + \frac{1}{2}\alpha = \gamma + 90^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. In demselben Dreieck ergiebt sich durch den Sinussatz $w_a = \dfrac{c \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$, und setzt man hier $c = 2r \sin\gamma$ und stellt auch die entsprechenden Formeln für die beiden anderen winkelhalbirenden Transversalen auf, so hat man

$$w_a = \frac{2r \sin\beta \; \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)},$$
$$w_b = \frac{2r \sin\alpha \; \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)},$$
$$w_c = \frac{2r \sin\alpha \; \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Für die auf BC gebildeten Abschnitte $CA_1 = u$, $A_1B = v$ erhält man in entsprechender Weise

$$u = \frac{2r \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\beta}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}, \quad v = \frac{2r \sin\frac{1}{2}\alpha \; \sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}.$$

Um endlich auch die Mittellinien des Dreiecks zu berechnen, kann man beispielsweise für die Mittellinie m_a, welche die Seite BC halbirt, die Gleichung

$$b^2 + c^2 = 2\, m_a{}^2 + \tfrac{1}{2} a^2$$

benutzen, aus welcher nach Einsetzung der betreffenden Ausdrücke für die Seiten

$$m_a = r\sqrt{2 \sin^2\beta + 2 \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}$$

hervorgeht. Die entsprechenden Formeln für die übrigen Mittellinien sind hiernach leicht anzugeben.

4. Wir fügen den vorstehenden Gleichungen noch die folgenden hinzu, deren Ableitung in entsprechender Weise geschieht und dem Leser überlassen bleibe. Ausser den bereits gebrauchten Bezeichnungen soll dabei F den Flächeninhalt, h'_a den oberen (d. i. dem Eckpunkt anliegenden) und h''_a den unteren der durch den Durchschnittspunkt der drei Höhen gebildeten Abschnitte der auf BC senkrechten Höhe bedeuten.

$$F = 2r^2 \sin\alpha \; \sin\beta \; \sin\gamma$$
$$h'_a = 2r \cos\alpha$$
$$h''_a = 2r \cos\beta \; \cos\gamma$$
$$OO_a = 4r \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$O_a O_b = 4r \cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Man kann ferner aus solchen Formeln durch Zusammensetzung noch anderweite ableiten, wie beispielsweise die folgenden:

$$\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\tfrac{1}{2}(a + b - c) = (s - c) = 4r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$a + b = 4r \cos\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$
$$a - b = 4r \sin\tfrac{1}{2}\gamma \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$
$$p_a - q_a = 2r \sin(\beta - \gamma)$$
$$\rho_a - \rho = 4r \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\rho_a - \rho_b = 4r \cos\tfrac{1}{2}\gamma \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

dgl. m.

5. Die im Vorigen abgeleiteten oder anderweite entsprechende Formeln können selbstverständlich als trigonometrische Lehrsätze in Worten ausgesprochen werden. Durch geeignete Elimination der trigonometrischen Functionen entstehen aus ihnen andere Gleichungen, welche, weil sie keine solche Functionen mehr enthalten, auch nicht mehr als trigonometrische bezeichnet werden können, sondern rein planimetrische Lehrsätze liefern. So erhält man z. B.

$$h'_a \cdot h''_a = h'_b \cdot h''_b = h'_c \cdot h''_c,$$

d. h. das Produkt aus den beiden Abschnitten einer Höhe eines Dreiecks hat für alle drei Höhen denselben Werth. Es ergiebt sich nämlich dieser Werth für alle drei Produkte gleich $4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Selbstverständlich können Lehrsätze wie dieser auch ohne Vermittlung trigonometrischer Functionen bewiesen werden, der vorstehende z. B. mittelst der über den Seiten als Durchmesser beschriebenen Halbkreise, von denen jeder durch die Fusspunkte zweier Höhen gehen muss, so dass diese Höhen als einander schneidende Sehnen desselben erscheinen. Es soll also das Vorstehende nur ein Beispiel der Anwendung trigonometrischer Functionen zum Auffinden und Ableiten solcher Lehrsätze sein. Andere derartige Beispiele bieten die Gleichungen

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$
$$\rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c = F^2$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\rho}$$
$$3(b^2 - c^2) = 4(m_c^2 - m_b^2)$$

u. dgl. m.

6. Man kann ferner jedes der im Vorigen berechneten mittelbaren Stücke eines Dreiecks als ein gegebenes Bestimmungsstück für ein solches Dreieck ansehen und die Aufgabe stellen, das letztere aus drei solchen Stücken — die theilweise auch unmittelbar Seiten oder Winkel des Dreiecks sein dürfen, oder statt deren auch Summen, Differenzen und andere aus ihnen zusammengesetzte Ausdrücke gegeben sein können — zu berechnen. Man kann als eine allgemeine Anleitung zur Auflösung der überaus grossen Anzahl solcher Aufgaben kurz Folgendes ansehen:

Man drücke alle gegebenen Stücke mittelst der betreffenden Formeln durch r und die Winkel aus. Man hat dann drei Gleichungen, welche in Verbindung mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ die vier Grössen r, α, β, γ im Allgemeinen bestimmen werden. Löst man die Gleichungen auf diese vier Unbekannten auf, so kann man die nicht gegebenen Seiten mittelst

$$a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta, \quad c = 2r \sin\gamma,$$

und ebenso jedes andere etwa noch verlangte mittelbare Stück mittelst der betreffenden Formel für dieses berechnen.

Es sei beispielsweise der Umfang $a + b + c = 2s$, der Radius ρ des einbeschriebenen Kreises und eine Höhe h_a gegeben. Man hat dann aus dem Vorigen die drei Gleichungen

$$s = 4r \cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\rho = 4r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$h = 2r \sin\beta \sin\gamma.$$

Um dieselben auf r und die Winkel aufzulösen, kann man zunächst r durch

paarweise Division eliminiren und erhält, wenn man zugleich in der dritten Gleichung $sin\,\beta$ und $sin\,\gamma$ durch die halben Winkel ausdrückt und die gleichen Faktoren in Zähler und Nenner aufhebt,

$$\frac{s}{h} = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,\alpha}{2\,sin\,\frac{1}{2}\,\beta\,sin\,\frac{1}{2}\,\gamma};\ \frac{\rho}{h} = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{2\,cos\,\frac{1}{2}\,\beta\,cos\,\frac{1}{2}\,\gamma}.$$

Um nun diese beiden Gleichungen auf die Winkel aufzulösen, kann man die beiden Nenner durch $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ und $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ausdrücken, wodurch man

$$\frac{s}{h} = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,\alpha}{cos\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma) - sin\,\frac{1}{2}\,\alpha};\ \frac{\rho}{h} = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{cos\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma) + sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}$$

erhält. Die zweite dieser Gleichungen liefert

$$cos\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{(h - \rho)\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\rho},$$

und durch Substitution in die erste erhält man

$$\frac{s}{h} = \frac{\rho \cdot cot\,\frac{1}{2}\,\alpha}{h - 2\,\rho},$$

so dass $cot\,\frac{1}{2}\,\alpha = \dfrac{s\,(h - 2\rho)}{h\rho}$

als diejenige Gleichung entsteht, mittelst welcher der Winkel α gefunden werden kann. Ist dies geschehen, so erhält man aus der vorhergehenden für $cos\,\frac{1}{2}\,(\beta - \gamma)$ die halbe Differenz der beiden anderen Winkel und aus dieser in Verbindung mit $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ diese Winkel selbst. Der Werth von r kann darauf mittelst jeder der drei ursprünglichen Gleichungen berechnet werden, worauf sich die drei Seiten in der bereits erwähnten Weise ergeben.

Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde hier zu weit führen, und darf in Betreff desselben auf die ausführlicheren Aufgaben-Sammlungen zur Trigonometrie verwiesen werden.

Anhang 3, zum zweiten Abschnitt.

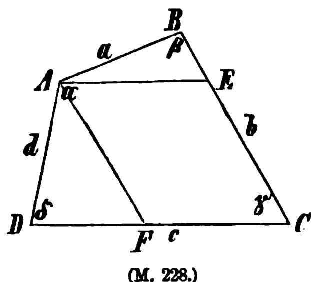
Polygonometrie.

1. Die Aufgabe, eine ebene, geradlinige Figur von vier oder mehr Seiten aus gegebenen Bestimmungsstücken trigonometrisch zu berechnen, kann in den meisten Fällen durch Zerlegung der Figur in Dreiecke und successive Berechnung der letzteren gelöst werden.

Dass die Zerlegung eines n-Ecks in Dreiecke mittelst der Diagonalen jedoch nicht in allen Fällen zur Berechnung desselben hinreicht, zeigt schon das Beispiel des Vierecks, wenn von demselben zwei einander gegenüberliegende Seiten und drei Winkel, sowie wenn drei Seiten und die beiden von denselben nicht eingeschlossenen Winkel als Bestimmungsstücke gegeben sind. In allen anderen Fällen kann die Berechnung des Vierecks (Tetragonometrie) aus der erforderlichen Anzahl von 5 gegebenen Seiten oder Winkeln auf die vorher angegebene Weise ausgeführt werden. Es unterliegt jedoch auch die Zurückführung jener beiden Fälle auf die Berechnung von Dreiecken keiner Schwierigkeit, sofern man nur die letzteren auf gewisse andere Weisen als durch Diagonalen construirt.

Sind zwei einander gegenüberliegende Seiten $AB = a$, $CD = c$ eines Vierecks $ABCD$ nebst drei Winkeln α, β, γ gegeben, so ergiebt sich zunächst der

vierte Winkel δ ohne Weiteres aus der bekannten Winkelsumme des Vierecks.



(M. 228.)

Zieht man dann AE parallel zu DC, AF parallel zu BC, wie in nebenstehender Zeichnung, so ist $\angle AEB = \angle AFD = \gamma$, und man erhält aus dem Dreieck ABE:

$$AE = \frac{a}{\sin\gamma} \sin\beta, \text{ also } DF = c - AE = \frac{c \sin\gamma - a \sin\beta}{\sin\gamma},$$

also aus dem Dreieck ADF, wieder mittelst des Sinussatzes:

$$d = \frac{c \sin\gamma - a \sin\beta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

In entsprechender Weise muss

$$b = \frac{a \sin\alpha - c \sin\delta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

sein, wobei man noch auf $\sin(\alpha + \beta) = -\sin(\gamma + \delta)$ zu achten hat.

Sind die drei Seiten $AB = a$, $DA = d$, $CD = c$ nebst den nicht eingeschlossenen Winkeln β, γ gegeben, so kann man dieselbe Zerlegung wie vorher benutzen. Aus dem Dreieck ABE, in welchem a nebst β und $\angle AEB = \gamma$ bekannt sind, erhält man $FC = AE$, und hieraus DF für das Dreieck ADF, in welchem noch d und $\angle AFD = \gamma$ bekannt sind, und die Berechnung dieses letzteren Dreiecks führt auf die noch fehlenden Stücke des Vierecks.

Hiermit ist die trigonometrische Berechnung des Vierecks aus Seiten und Winkeln desselben für alle Fälle ermöglicht.

2. Soll in entsprechender Weise ein n-Eck ($n > 4$) berechnet werden, so müssen $2n - 3$ Bestimmungsstücke gegeben sein, und man kann die einzelnen möglichen Fälle in folgender Weise unterscheiden und ordnen:

Erster Hauptfall: Die drei nicht gegebenen Stücke sind ein Winkel und zwei Seiten. In diesem Falle ergiebt sich der fehlende Winkel ohne Weiteres aus der bekannten Winkelsumme; die Lage dieses Winkels gegen die übrigen Stücke ist daher gleichgültig. In Betreff der Seiten aber sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die fehlenden Seiten liegen aneinander. Das n-Eck lässt sich dann mittelst einer Diagonale in ein Dreieck, welches diese Seiten enthält, und ein $n - 1$-Eck, von welchem alle Stücke ausser dreien bekannt sind, zerlegen. Dieses $n - 1$-Eck ist also durch die gegebenen Stücke bestimmt, und falls die fehlenden trigonometrisch berechnet werden können, liefern diese die nöthigen Stücke zur Berechnung des abgeschnittenen Dreiecks. Die Aufgabe der Berechnung des n-Ecks erscheint also auf diejenige der Berechnung eines $n - 1$-Ecks zurückgeführt.

b) Die fehlenden Seiten liegen nicht aneinander. Man verbinde die Endpunkte der fehlenden Seiten mit einander, so dass das n-Eck in eine oder zwei Figuren von höchstens $n-2$ Seiten und ein Viereck zerfällt. Die ersteren Figuren sind durch die gegebenen Stücke bestimmt, und ihre Berechnung liefert die fehlenden Stücke zur Berechnung des Vierecks. Die Aufgabe ist also wieder auf diejenige der Auflösung einer Figur von weniger als n Seiten zurückgeführt.

Zweiter Hauptfall. Die drei nicht gegebenen Stücke sind zwei Winkel und eine Seite. Wir unterscheiden dann wieder folgende Fälle:

a) Die drei Stücke liegen aneinander, die Winkel also an der fehlenden Seite. Die Figur lässt sich dann durch eine Diagonale in ein $n-1$-Eck und ein Dreieck zerlegen, welche nach einander berechnet werden können.

b) Die beiden Winkel folgen auf einander, die fehlende Seite liegt zwischen einem von ihnen und einem bekannten Winkel. Auch hier genügt die Construction einer Diagonale um die Aufgabe auf die successive Berechnung eines $n-1$-Ecks und eines Dreiecks zurückzuführen.

c) Die drei Stücke liegen auf beliebige andere Weise. Man verbinde die Endpunkte der fehlenden Seite mit den Scheitelpunkten der fehlenden Winkel. Das n-Eck wird hierdurch in Theile zerlegt, von denen der eine ein die fehlende Seite enthaltendes Viereck ist, welches nach Berechnung der übrigen, sämmtlich durch gegebene Stücke bestimmten Theile, in vorher angegebener Weise berechnet werden kann.

Dritter Hauptfall. Die nicht gegebenen Stücke sind drei Winkel.

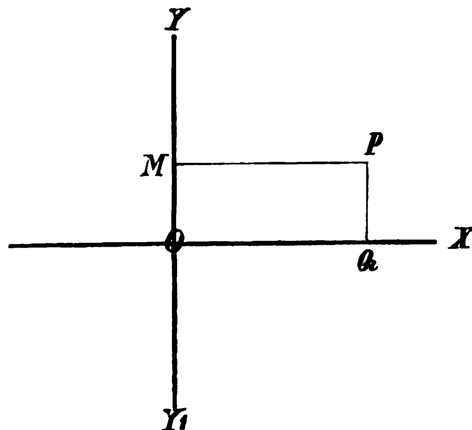
a) Die drei Winkel folgen auf einander. Man kann wieder mittelst einer Diagonale die Figur in ein durch die gegebenen Stücke bestimmtes $n-1$-Eck und ein nach Auflösung des letzteren zu berechnendes Dreieck zerlegen.

b) Die drei Winkel liegen sonst in beliebiger Weise. Man verbinde die Scheitel derselben, so entsteht ein Dreieck, von welchem durch Berechnung der übrigen, durch die gegebenen Stücke bestimmten Theile des n-Ecks die drei Seiten bekannt werden.

Hiermit sind alle möglichen Fälle erschöpft. Da hiernach die Berechnung stets auf die eines Dreiecks oder Vierecks und die eines Polygons von höchstens $n-1$ Seiten zurückgeführt werden kann, auf letzteres aber dasselbe Verfahren auf's Neue Anwendung findet, u. s. w., so erhellt, wie schliesslich die Berechnung eines jeden n-Ecks auf diejenige von lauter Dreiecken, bezw. Vierecken zurückkommt. Da die Auflösung der letzteren für alle Fälle durchgeführt ist, so ist somit auch für diejenige beliebiger n-Ecke in allen Fällen ein Weg gezeigt.

3. Im Vorigen sind zwar nur Vier- und n-Ecke im engeren Sinne vorausgesetzt worden, d. h. solche, deren Umfänge einander nicht schneiden, man kann jedoch das beschriebene Verfahren mit den leicht ersichtlichen nebensächlichen Abänderungen auch dann anwenden, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist.

Eine andere Methode der Berechnung von Polygonen, welche insbesondere mit dem Namen Polygonometrie bezeichnet zu werden pflegt, gründet sich auf den — in der analytischen Geometrie näher zu erörternden — Gebrauch der Coordinaten. Dieselbe soll im Nachstehenden kurz entwickelt werden.



(M. 229.)

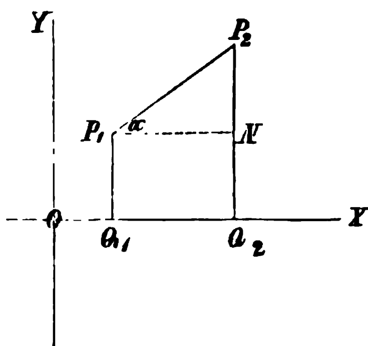
Es seien XX_1 und YY_1 zwei beliebige Gerade, welche einander in einem Punkte O unter rechten

Winkeln schneiden, und deren Lage in der Ebene als fest gegeben angenommen wird. Die Lage eines Punktes P der Ebene kann dann durch die senkrechten Abstände PQ, PM desselben von jenen beiden Geraden angegeben werden. Diese Abstände werden die Coordinaten des Punktes P genannt, und zwar soll der Abstand PM von der mit YY_1 bezeichneten Geraden die Abscisse und der Abstand PQ von der mit XX_1 bezeichneten Geraden die Ordinate des Punktes P heissen. Statt dieser Abstände können bezüglich die ihnen gleichen Abschnitte OQ, OM der beiden Geraden XX_1, YY_1 genommen werden. Im Folgenden ist unter der mit x bezeichneten Abscisse die Strecke OQ und unter der mit y bezeichneten Ordinate die Strecke PQ verstanden. Die Geraden XX_1 und YY_1 heissen die Coordinaten-Achsen, und zwar XX_1 die Abscissenachse oder die Achse der x, YY_1 die Ordinatenachse oder die Achse der y; O heisst der Ursprung der Coordinaten.

Jeder beliebige Punkt P der Ebene hat hiernach in Beziehung auf ein angenommenes oder gegebenes festes »Coordinatensystem« ganz bestimmte Zahlenwerthe y, x seiner Coordinaten. Dagegen ist nach dem Gesagten noch nicht umgekehrt die Lage eines Punktes P durch die Angabe seiner Coordinaten unzweideutig bestimmt, vielmehr giebt es im Allgemeinen je vier Punkte, welche dieselben Längen der Coordinaten haben, nämlich in jedem der vier durch die unendlichen Geraden XX_1 und YY_1 begrenzten Theile (Quadranten) der Ebene einen. Diese Unbestimmtheit verschwindet, wenn man die von O aus nach einer vorher festgesetzten der beiden Richtungen von XX_1, bezw. YY_1 gemessenen Coordinaten als positiv, die nach den entgegengesetzten Richtungen gemessenen als negativ annimmt. Im Folgenden sollen die Richtungen OX, OY als die positiven, OX_1, OY_1 als die negativen angenommen werden. Sind also $x = a$, $y = b$ die absoluten Längen der Coordinaten eines Punktes, so unterscheiden sich die vier Punkte, welche diese Coordinatenlängen haben, wie folgt durch die Vorzeichen: Es sind die Coordinaten derselben bezüglich: für $P_1: x = +a,\ y = +b$, für $P_2: x = -a,\ y = +b$, für $P_3: x = -a,\ y = -b$, für $P_4: x = +a,\ y = -b$.

Diese Annahme der Vorzeichen ist keine willkürliche, sondern durch die Sache bedingt, denn ist z. B. $OQ = x = a$ und soll ein zweiter Punkt angegeben werden, dessen Abscisse x_1 um b kleiner ist, so ist $x_1 = a - b$ zu setzen. Ist nun $b > a$, so gelangt man in der That zu einem Punkte auf der Abscissenachse, welcher von O aus um $b - a$ in der Richtung OX_1 liegt.

Die Lage eines jeden Punktes P der Ebene ist nunmehr durch seine beiden Coordinaten, d. h. durch die gleichzeitige Angabe der Längen und der Vorzeichen derselben völlig bestimmt. Man kann daher im Folgenden jeden vorkommenden Punkt als durch seine beiden Coordinaten gegeben ansehen.



(M. 230.)

Es sei ferner P_1P_2 eine Strecke, deren Länge durch s bezeichnet werde, x_1, y_1 seien die Coordinaten ihres Endpunktes P_1, x_2, y_2 diejenigen von P_2. Zieht man nun durch P_1 die Parallele P_1N zur Abscissenachse bis zum Durchschnitt mit der Ordinate P_2Q_2, so ist stets

$P_1N = Q_1Q_2 = OQ_2 - OQ_1 = x_2 - x_1$ und $P_2N = P_2Q_2 - P_1Q_1 = y_2 - y_1$. Daher erhält man aus dem rechtwinkeligen Dreieck P_1P_2N für die Länge s von P_1P_2 die Gleichung

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}, \quad (1)$$

welche die Berechnung des Abstandes zweier Punkte aus ihren Coordinaten ermöglicht.

Es sei ferner der Winkel, um welchen die der positiven Richtung OX entsprechende Richtung von P_1N um P_1 gedreht werden muss, um in die Richtung P_1P_2 zu gelangen, durch α bezeichnet. Hierbei werde die Drehung immer in demselben Sinne genommen, in welchem die positive Richtung OX der Abscissenachse gedreht werden muss, um nach einer Viertel-Umdrehung mit OY zusammenzufallen. Der Winkel α heisse im Folgenden das Azimuth von P_1P_2.

Um also beispielsweise das Azimuth von P_2P_1 zu erhalten, muss man durch P_2 die zu OX parallele und gleichgerichtete Gerade ziehen und findet dann leicht, dass das gesuchte Azimuth gleich $360° - P_2P_1N$ ist, d. h. dass das Azimuth von P_2P_1 das Azimuth von P_1P_2 zu vier Rechten ergänzt. — Der einer anderen Wissenschaft (der Astronomie) entnommene Ausdruck Azimuth bezeichnet eigentlich den Winkel einer gegebenen Richtung mit dem Meridian des Ausgangspunktes derselben.

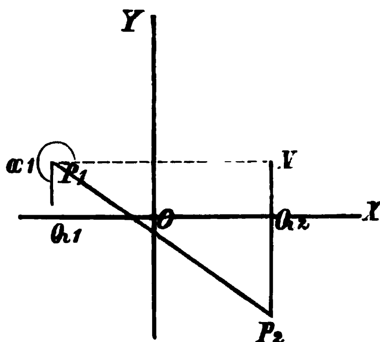
Es ist nun stets in dem Dreieck P_1P_2N,

$$P_2N = P_1P_2 \cdot \sin\alpha;\ P_1N = P_1P_2 \cos\alpha.$$

Hieraus ergeben sich leicht die Gleichungen

$$y_2 = y_1 + s \cdot \sin\alpha;\ x_2 = x_1 + s \cdot \cos\alpha;\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha. \quad (2)$$

Diese Gleichungen haben allgemeine Gültigkeit, welches auch die Lage von P_1P_2 sein mag, wie man durch Wiederholung der vorstehenden Ableitung für alle möglichen Fälle nachweisen kann. Hat beispielsweise P_1P_2 die Lage wie in nebenstehender Figur, so ist das Azimuth α ein überstumpfer Winkel, und wenn w den Winkel NP_1P_2 des entsprechend wie vorher construirten Dreiecks NP_1P_2 bezeichnet, so ist $\alpha = 360° - w$. Ferner sind x_1 und y_2 negativ, und man hat



(M. 231.)

$$y_2 = -P_2Q_2 = -(NP_2 - NQ_2)$$
$$= -P_1P_2 \sin w + P_1Q_1$$
$$= +P_1P_2 \sin(360° - w) + y_1$$
$$= y_1 + s \cdot \sin\alpha,$$

$$x_2 = OQ_2 = P_1N - OQ_1 =$$
$$P_1P_2 \cos w - (-x_1) = s \cdot \cos(360° - w) + x_1 = x_1 + s \cdot \cos\alpha,$$

so dass also die obigen Gleichungen (2) auch für diesen Fall gefunden sind.

4. Ist ein System von n Punkten in der Ebene vorhanden, und sind diese Punkte durch eine zusammenhängende gebrochene Linie, welche von einem Punkte zum anderen führt, verbunden, so mögen diese Punkte in der betreffenden Reihenfolge durch $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$, die Strecken $P_1P_2, P_2P_3, \ldots P_nP_1$ bezüglich durch $s_1, s_2, \ldots s_n$, ihre Azimuthe durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und die Coordinaten jener Punkte durch $x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \ldots x_ny_n$ bezeichnet werden. Dann ist nach dem Vorhergehenden

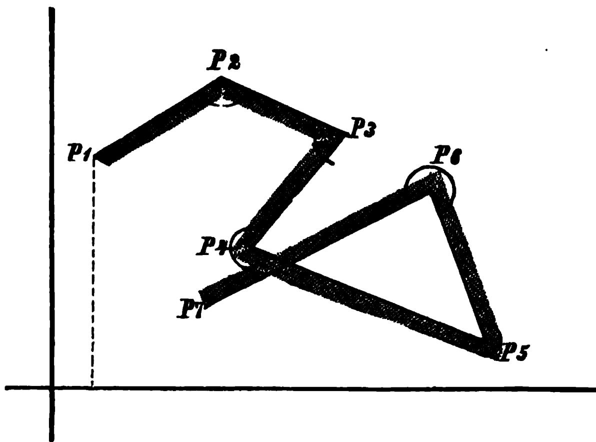
$x_2 = x_1 + s_1 \cos \alpha_1$; $x_3 = x_2 + s_2 \cos \alpha_2 = x_1 + s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2$, allgemein $x_{p+1} = x_p + s_p \cos \alpha_p = x_1 + s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \ldots s_p \cos \alpha_p$.

In entsprechender Weise ist

$$y_{p+1} = y_p + s_p \sin \alpha_p = y_1 + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \ldots + s_p \sin \alpha_p.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Coordinaten eines jeden von jenen Punkten aus den Coordinaten des ersten, den Längen der dazwischen liegenden einzelnen Strecken und den Azimuthen der letzteren berechnen. Die Coordinaten des ersten Punktes müssen entweder gegeben sein, oder man kann die Lagen der Coordinatenachsen noch in der Weise bestimmen, dass dieselben bekannte Werthe erhalten. Am einfachsten nimmt man in diesem Falle den ersten Punkt zum Ursprung der Coordinaten, so dass also $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ wird.

Die Azimuthe $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ lassen sich aus dem ersten Azimuth α_1 und den Winkeln, welche je zwei aufeinanderfolgende Strecken mit einander bilden, berechnen. Um dabei über diese letzteren Winkel jeden Zweifel auszuschliessen, setzen wir vorher Folgendes fest: Man denke sich einen Punkt, welcher durch seine von P_1 ausgehende Bewegung die gebrochene Linie $P_1 P_2 \ldots P_n$ nach der Reihenfolge dieser Punkte beschreibe. Unter den Winkeln der einzelnen Strecken, welche diese in P_2, $P_3 \ldots$ mit einander bilden, und welche bezüglich durch w_2, $w_3, \ldots$ bezeichnet werden mögen, sollen dann diejenigen verstanden werden, welche sämmtlich auf einer und derselben — an sich beliebig wählbaren — Seite für den beschreibenden Punkt (der rechten oder der linken liegen, so dass also hierdurch in jedem einzelnen Falle entschieden ist, ob der betreffende hohle oder der convexe Winkel zu nehmen ist. Es sei ferner stets der Winkel, welchen die Verlängerung einer vorangehenden Strecke mit der nächstfolgenden Strecke selbst bildet, also derjenige Winkel, welcher die Grösse der Drehung angiebt, die an dem betreffenden Eckpunkt von dem beschreibenden Punkt zu machen ist, um in der Richtung der folgenden Strecke weiter gehen zu können, bezüglich durch r_2, $r_3, \ldots$ bezeichnet. Diese Aussenwinkel sollen dabei immer so genommen werden, dass die gedachte Drehung stets in demselben Sinne genommen wird, und zwar in demjenigen Sinne, in welchem auch das Azimuth an demselben Punkte beschrieben gedacht wurde. Für hohle Winkel w kann dann immer $r_p = 180° - w_p$ gesetzt werden, für überstumpfe Winkel w dagegen ist $r_p = 360° + 180° - w_p = 540° - w_p$ zu setzen.



(M. 232.)

Ist nun das Azimuth α_1 bekannt, so ist offenbar dasjenige von P_2 oder α_2 gleich $\alpha_1 - r_2$, das von P_3 oder $\alpha_3 = \alpha_2 - r_3$, u. s. w., wobei man, falls die betreffende Differenz negativ wird, jedesmal 360° zu addiren hat.

Hiernach ergiebt sich durch Zusammenstellung folgende Anweisung für die Berechnung der Coordinaten der Punkte P aus den Längen s und den Winkeln w der einzelnen Strecken, sowie den Coordinaten des ersten Punktes und dem Azimuth der ersten Strecke:

Aus den Winkeln $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ berechne die Aussenwinkel $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ mittelst der Formel

$$r_p = 180^\circ - w_p, \text{ bezw. } r_p = 540^\circ - w_p.$$

Aus den Aussenwinkeln berechne sodann die Azimuthe mittelst der Formel

$$a_p = a_{p-1} - r_p.$$

Endlich berechne die Coordinaten successive nach den Formeln

$$x_{p+1} = x_p + s_p \cdot \cos a_p;\ y_{p+1} = y_p + s_p \sin a_p.$$

5. Kehrt die gebrochene Linie $P_1 \ldots P_n$ von P_n zu ihrem Ausgangspunkt P_1 zurück, bildet also eine geschlossene Figur, so muss schliesslich auch $x_1 = x_n + s_n \cos a_n$, $y_1 = y_n + s_n \cos a_n$ sein, und man erhält durch Zusammensetzung aus den entsprechenden Gleichungen

$$x_n = x_{n-1} + s_{n-1} \cos a_{n-1};\ x_{n-1} = x_{n-2} + s_{n-2} \cos a_{n-2}, \ldots;$$
$$x_2 = x_1 + s_1 \cos a_1,$$

die Gleichung

$$x_1 = x_1 + s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + \ldots + s_{n-1} \cos a_{n-1} + s_n \cos a_n, \text{ oder}$$
$$s_1 \cos a_1 + s_2 \cos a_2 + \ldots + s_n \cos a_n = 0. \quad (3)$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$s_1 \sin a_1 + s_2 \sin a_2 + \ldots + s_n \sin a_n = 0. \quad (4)$$

Die einzelnen Summanden $s_1 \cos a_1$, $s_2 \cos a_2$ u. s. w. der Gleichung (3) sind die Werthe der Projectionen Q_1Q_2, Q_2Q_3 u. s. w. der Seiten s_1, s_2 u. s. w. auf die Abscissenachse OX, wobei diejenigen, welche in der Richtung OX beschrieben werden, wenn man nach der Reihenfolge der Punkte fortschreitet, als positiv, diejenigen welche in der entgegengesetzten Richtung beschrieben werden, als negativ gelten. Die Gleichung (3) besagt, dass dann die algebraische Summe der Projectionen aller Seiten eines geschlossenen Polygons gleich Null sei. Da dies ohne Weiteres aus der Rückkehr zum Ausgangspunkte geschlossen werden kann, so hätte die Gleichung (3) auch umgekehrt aus diesem Satze gefolgert werden können. Die Gleichung (4) enthält denselben Satz in Beziehung auf die Achse OY.

Sind nun von den $2n$ Seiten und Winkeln des Polygons alle bis auf drei — unter denen wenigstens ein Winkel sich befindet — bekannt, so liefern die obigen Gleichungen (3) und (4) in Verbindung mit der Winkelsumme des n-Ecks die nöthigen Hülfsmittel zur Berechnung der drei fehlenden Stücke. Um dies näher zu zeigen, sollen wieder die einzelnen möglichen Fälle, wie vorher, nach einander behandelt werden.

Erster Hauptfall: Es fehlen zwei Seiten und ein Winkel.

Der fehlende Winkel bestimmt sich ohne Weiteres aus der Winkelsumme des n-Ecks. Die Gleichungen (3) und (4) sind dann zwei Bestimmungsgleichungen ersten Grades für die beiden unbekannten Seiten und können auf diese aufgelöst werden.

Das Verfahren kann auch in folgender Weise abgeändert werden: Liegen a) die fehlenden Seiten s_{m-1}, s_m aneinander, so kann man, indem man von dem Anfangspunkte aus nach beiden Richtungen auf dem Umfang fortschreitet, die Coordinaten von P_{m-1} und P_{m+1} bestimmen. Hieraus erhält man nach (1) die Länge von $P_{m-1} P_{m+1}$, so wie die Winkel, welche diese Linie mit den nicht

gegebenen Seiten bildet. Man hat somit ein Dreieck $P_{m-1}P_mP_{m+1}$, in welchem eine Seite und die Winkel bekannt sind und dessen trigonometrische Berechnung die fehlenden Stücke liefert. Liegen dagegen b) die fehlenden Seiten s_m, s_r nicht aneinander, so nehme man zunächst eine derselben, z. B. s_r, zur Abscissenachse und berechne, von ihrem einen Endpunkt ausgehend die Coordinaten von P_m und von dem anderen Endpunkt ausgehend die Coordinaten von P_{m+1}. Zieht man nun durch P_m die Parallele zur Abscissenachse bis sie die Ordinate von P_{m+1} in R schneidet, so ist in dem rechtwinkeligen Dreieck $P_mP_{m+1}R$ ausser den Winkeln auch die Kathete $P_{m+1}R$ als die Differenz der betreffenden Ordinaten bekannt. Hieraus erhält man durch trigonometrische Rechnung die Hypotenuse s_m, d. i. die eine fehlende Seite, sowie die Kathete P_mR, welche letztere dann in Verbindung mit den vorher berechneten Abscissen auch die zweite fehlende Seite liefert.

Zweiter Hauptfall: Es fehlen zwei Winkel und eine Seite.

Liegen a) die fehlenden Stücke an einander, so berechnet man, wie im ersten Fall unter a) die Coordinaten der Endpunkte der fehlenden Seite P_m P_{m+1} und dann aus denselben diese Seite selbst. Gleichzeitig liefert das wie vorher construirt gedachte Dreieck P_m P_{m+1} R die Tangente des Winkels P_{m+1} P_m R, welcher in Verbindung mit dem Azimuth der vorhergehenden Seite den Winkel an P_m liefert. Entsprechend erhält man auch den fehlenden Winkel an P_{m+1}. — Nimmt man eine der unbekannten Seite P_m P_{m+1} anliegende Seite P_{m-1} P_m zur Abscissenachse an, so kann man von P_{m-1} aus die Coordinaten sämmtlicher Eckpunkte bis P_{m+1} berechnen und erhält dann wieder aus dem zu P_m P_{m+1} gehörigen rechtwinkeligen Dreieck, dessen Katheten die Coordinaten von P_{m+1} sind, alles Fehlende.

Liegen b) die fehlenden Winkel w_m, w_{m+1} zusammen und die fehlende Seite P_{m-1} P_m zwischen einem derselben und einem bekannten Winkel, so kann man die unbekannte Seite selbst zur Abscissenlinie nehmen und die Coordinaten aller Punkte von P_{m-1} an bis zum Punkte P_{m+1} berechnen. Die Ordinate von P_{m+1} und die bekannte Seite P_m P_{m+1} bestimmen dann wieder ein rechtwinkeliges Dreieck, durch welches man die fehlenden Winkel erhält; die zu berechnende Kathete desselben Dreiecks liefert in Verbindung mit der Abscisse von P_{m+1} die unbekannte Seite.

Liegen c) die fehlenden Stücke in irgend einer beliebigen anderen Weise, so kann man diejenige Diagonale ziehen, welche die Scheitel P_m, P_r der unbekannten Winkel verbindet. Dieselbe theilt das Polygon in zwei Theile, von denen sich zunächst derjenige, welcher die unbekannte Seite nicht enthält, nach dem vorliegenden Fall a) berechnen lässt. Hierdurch erhält man die Länge von P_m P_r und Theile der Winkel w_m und w_r. Darauf berechne man den zweiten Theil des ganzen Polygons, indem man die fehlende Seite zur Abscissenachse nimmt und zunächst von dem einen Endpunkt derselben aus die Coordinaten von P_m, von dem anderen Endpunkt aus die Coordinaten von P_r berechnet. Dadurch ist wieder ein rechtwinkeliges Dreieck bestimmt, dessen Hypotenuse P_m P_r und dessen eine Kathete die Differenz der Ordinaten von P_m und P_r ist. Die Winkel dieses Dreiecks führen auf die noch unbekannten Theile der ganzen Winkel w_m, w_r und die zweite Kathete auf die unbekannte Seite.

Dritter Hauptfall: Es fehlen drei Winkel.

a) Folgen die drei fehlenden Winkel P_m, P_{m+1}, P_{m+2} auf einander, so nehme man eine Seite P_{m-1} P_m, welche zwischen einem dieser Winkel und

dem anliegenden bekannten Winkel liegt, zur Abscissenlinie, berechne darauf die Coordinaten des Scheitelpunktes P_{m+2}, so erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $P_{m+2} P_m$ und dessen eine Kathete die Ordinate von P_{m+2} ist. Von diesem Dreieck sind die beiden Katheten bekannt, und man findet daher $P_m P_{m+2}$. Nun kennt man in dem Dreieck $P_m P_{m+1} P_{m+2}$ alle drei Seiten, und mit Hülfe der trigonometrischen Berechnung seiner Winkel und der Winkel des vorher genannten rechtwinkeligen Dreiecks findet man die gesuchten Stücke.

Liegen dagegen b) die drei Winkel in beliebiger anderer Weise, so kann man ihre Scheitelpunkte P_m, P_r, P_s mit einander verbinden, wodurch ein Dreieck entsteht. Die übrigen Theile der Figur sind im Allgemeinen Polygone, von denen eine Seite nebst den ihr anliegenden Winkeln fehlt und welche daher nach dem zweiten Hauptfall a) berechnet werden können. Dadurch erhält man ausser Theilen der gesuchten Winkel w_m, w_r, w_s die Seiten des Dreiecks $P_m P_r P_s$, und die trigonometrische Berechnung des letzteren liefert die noch fehlenden Theile jener Winkel.

6. Sind die Coordinaten sämmtlicher n Eckpunkte eines Polygons im engeren Sinne bekannt, so kann man aus denselben den Flächeninhalt dieses Polygons berechnen. Derselbe erscheint als algebraische Summe von n Trapezen, deren parallele Seiten je zwei auf einander folgende Ordinaten sind, während die Höhe jedesmal gleich der Differenz der zugehörigen Abscissen ist.

So erhält man beispielsweise für ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)],$$

wofür man auch

$$2F = (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_1)(x_1 - x_3)$$

schreiben kann. Führt man die Multiplication aus, so ergiebt sich, dass sich mehrere Glieder gegen einander aufheben, und man erhält durch eine leichte Umformung

$$2F = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2).$$

Diese Formel ist leicht zu behalten, wenn man den Kreislauf beachtet, welcher in derselben in dem Wechsel der Stellenzeiger der Coordinaten stattfindet.

In entsprechender Weise, wie hier für das Dreieck, findet man die allgemeine Formel für den Flächeninhalt eines n-Ecks:

$$2F = (y_1 x_2 - y_2 x_1) + (y_2 x_3 - y_3 x_2) + (y_3 x_4 - y_4 x_3) + \cdots + (y_{n-1} x_n - y_n x_{n-1}) + (y_n x_1 - y_1 x_n),$$

oder $2F = y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \cdots + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_1 - x_{n-1})$.

7. **Beispiele:** 1. Von einem Sechseck seien sämmtliche Seiten und Winkel, wie im Folgenden unter s und w angegeben, gemessen. Man berechne die Coordinaten seiner Eckpunkte und seinen Flächeninhalt unter der Voraussetzung, dass der erste Punkt P_1 der Ursprung der Coordinaten sei und die Linie $P_1 P_6$ in der Abscissen-Achse liege.

Auflösung:

P	s	w	r	α	$\log s$	$\log \sin \alpha$	$\log \cos \alpha$
1	325	83°38',4		83° 38',4	2,51188	9,99732	9,04444
2	257	13·30,7	166°·29',3	277· 9,1	2,40993	9,99661 n	9,09516
3	109	319·26,9	220· 33,1	56·36,0	2,03743	9,92161	9,74074
4	101	21·58,7	158· 1,3	258·34,7	2,00432	9,99131 n	9,29673 n
5	76,9	230· 8,4	309· 51,6	308·43,1	1,88593	9,89222 n	9,79622
6	156,1	51·16,9	128· 43,1	180· 0,0	2,19340	— ∞	0,00000 n

$log\,(s.\,sin\,\alpha)$	$log\,(s.\,cos\,\alpha)$	$s.\,sin\,\alpha$	$s.\,cos\,\alpha$	y	x
2,50920	1,55632	323,0	36,0	0	0
2,40654 *n*	1,50509	— 255,0	32,0	+ 323	+ 36
1,95904	1,77817	91,0	6,0	68	68
1,99563 *n*	1,30105 *n*	— 99,0	— 20,0	159	128
1,77815 *n*	1,68215	— 60,0	48,1	60	108
— ∞	2,19340 *n*	0	— 156,1	0	156,1
				0	0

$$2F = 323 \cdot 68 + 68\,(128 - 36) + 159\,(108 - 68) + 60\,(156{,}1 - 128) = 36266$$
$$F = 18133.$$

2. Von einem Sechseck $P_1 \cdots P_6$ seien die Seiten $s_1 = 125$, $s_2 = 17$, $s_4 = 65$, $s_5 = 125$, $s_6 = 57$ und die Winkel $w_1 = 110^\circ 36' 35''$, $w_2 = 141^\circ 53' 53''$, $w_5 = 43^\circ 13' 46'',5$, $w_6 = 106^\circ 15' 36'',7$ gegeben; man soll die fehlende Seite s_3 und die fehlenden Winkel w_3, w_4, sowie den Flächeninhalt berechnen.

Auflösung: Ist der Punkt P_1 zum Ursprung der Coordinaten genommen und die Abscissenachse durch P_6 gelegt, so sind die Coordinaten von P_1, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Man erhält nun die Coordinaten von P_2 gleich $x_1 + s_1 \cos w_1 = -44$ und $y_1 + s_1 \cdot \sin w_1 = +117$, darauf die Coordinaten von P_3 gleich $x_2 + s_2 \cos \alpha_2 = x_2 + s_2 \cos [w_1 - (180^\circ - w_2)] = x_2 + 52 = 8$, $y_2 + s_2 \sin \alpha_2 = y_2 + 165 = 282$. Geht man von P_1 nach der entgegengesetzten Richtung, so erhält man in entsprechender Weise: $x_6 = s_6 = 57$, $y_6 = 0$, ferner $x_5 = x_6 + s_5 \cos w_6 = x_6 + 35 = 92$; $y_5 = y_6 + s_5 \sin w_6 = 120$, ferner $x_4 = x_5 + s_4 \cos [360^\circ + w_6 - (180^\circ - w_5)] = x_5 + s_4 \cos \alpha_4 = 36$, $y_4 = y_5 + s_4 \sin \alpha_4 = 87$.

Nachdem nun die Coordinaten von P_3 und P_4 bekannt sind, kann man aus ihnen s_3 mittelst

$$s_3 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{784 + 38025}$$

berechnen, woraus $s_3 = 197$ folgt. Man findet ferner aus dem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Katheten bezüglich gleich $y_3 - y_4$ und $x_4 - x_3$ sind, die Winkel desselben gleich $81^\circ 49' 43''$ und $8^\circ 10' 17''$, woraus $w_3 = 90^\circ - \alpha_2 + 8^\circ 10' 17''$ $= 25^\circ 39' 49''$ und $w_4 = 360^\circ - \alpha_4 + 180^\circ + 81^\circ 49' 43'' = 292^\circ 20' 20''$ folgt. Selbstverständlich kann die Hypotenuse s_3 jenes Dreiecks auch aus einem der berechneten Winkel desselben und einer der Katheten trigonometrisch gefunden werden, was bei logarithmischer Rechnung dem obigen Verfahren vorzuziehen ist. Aus den berechneten Coordinaten folgt nun leicht nach der betreffenden Formel $F = 16662$.

Darstellende Geometrie,

bearbeitet von

Dr. Richard Heger,

Gymnasiallehrer u. a. o. Hon.-Professor am Kgl. Polytechnikum zu Dresden.

---

§ 1. Einleitung. Der Punkt.

Die descriptive Geometrie ist die Lehre von der Abbildung ebener oder nicht in einer Ebene liegender geometrischer Figuren. Die Abbildung einer Figur von drei Dimensionen hat entweder wieder drei Dimensionen, oder sie bildet eine Figur auf einer vorgeschriebenen Fläche. Im ersteren Falle nennt man die Abbildung ein Relief der abgebildeten Figur. Im letzteren Falle kann die Fläche, auf welcher die Abbildung entworfen wird, uneben (gekrümmt) oder eine Ebene sein.

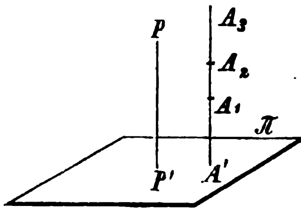
Die Construction einer Abbildung auf einer Cylinderfläche kommt z. B. bei der Herstellung von Panoramen, die Abbildung auf einer Kugelfläche bei bildlichen Darstellungen an der Decke eines kugelförmig überwölbten Raumes zur Anwendung.

2. Um die Abbildung — oder Projection — einer Figur auf eine Fläche zu erhalten (mit anderen Worten: um eine Figur auf eine Fläche zu projiciren), zieht man durch die Punkte der Figur nach einem bestimmten Gesetze Linien, die die gegebene Fläche schneiden; die Schnittpunkte sind die Bilder — oder Projectionen — der Punkte, von denen aus die Linien gezogen worden sind; die Linien heissen projicirende Linien. Gewöhnlich wählt man hierzu gerade Linien, Projectionsstrahlen, und zieht diese entweder durch einen festen Punkt, den man das Projectionscentrum nennt, oder zieht sie einer festen Richtung parallel.

Die erstere Art der Projection heisst Centralprojection, oder Centralperspective oder Perspective schlechthin; die andere heisst Parallelperspective oder Parallelprojection.

Projicirt man auf eine Ebene (Projectionsebene) und zieht man die Projectionsstrahlen senkrecht zur Projectionsebene, so erhält man die einfachste Art der Parallelprojection, die Orthogonal- oder Normalprojection.

Wir beschäftigen uns im Folgenden ausschliesslich mit der Projection auf eine Ebene und zwar zunächst und vorwiegend mit der Normalprojection.



(M. 233.)

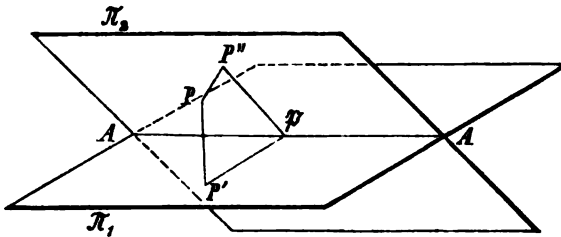
3. **Die Normalprojection eines Punktes** P **auf eine Ebene** Π **ist der Fusspunkt** P' **des von dem Punkte auf die Projectionsebene gefällten Lothes.**

Alle Punkte A_1 A_2 A_3 etc., welche auf derselben Senkrechten zur Projectionsebene liegen, haben dieselbe Projection A'.

Durch die Projection eines Punktes auf eine Ebene ist also die Lage des Punktes gegen die Ebene noch nicht vollständig bestimmt.

Die Bestimmung wird vollständig, wenn man ausser der Projection eines Punktes auch noch die Höhe desselben über (oder unter) der Projectionsebene kennt.

4. Man kann die Lage eines Punktes durch Projection allein vollständig bestimmen, wenn man den Punkt auf zwei sich schneidende Ebenen projicirt, deren gegenseitige Lage (Schnittlinie und Neigungswinkel) man kennt. Sind Π_1 Π_2 die beiden Projectionsebenen, AA ihre Schnittlinie (die **Projectionsachse** oder **Achse** schlechthin) und $P'P''$ die Projectionen eines Punktes P auf die Ebenen Π_1 und Π_2, so ist die Ebene $PP'P''$ senkrecht zu Π_1 (denn sie geht durch PP') und senkrecht zu Π_2 (denn sie geht durch PP''), folglich ist sie senkrecht zur Achse AA und ist daher ein Normalschnitt des Flächenwinkels Π_1 Π_2.



(M. 234.)

Ist $\mathfrak{P}$ der Schnittpunkt der Ebene $PP'P''$ mit der Achse, so sind daher $P'\mathfrak{P}$, $P''\mathfrak{P}$ und $P\mathfrak{P}$ senkrecht zur Achse und $P'\mathfrak{P}P''$ ist der Neigungswinkel der Projectionsebenen.

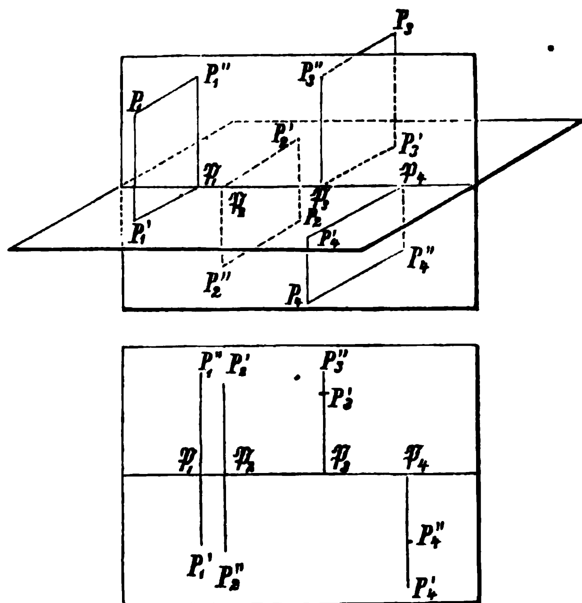
5. Sollen zwei auf den Projectionsebenen liegende Punkte $P'P''$ die Projectionen eines Punktes sein (**einem Punkte entsprechen**), so müssen sie also in einer Ebene liegen, die normal zur Projectionsachse ist, oder, was dasselbe besagt, die von P' und P'' auf die Achse gefällten Lothe müssen dieselbe in demselben Punkte $\mathfrak{P}$ treffen.

Durch seine beiden Projectionen P' **und** P'' **ist ein Punkt** P **vollständig und eindeutig bestimmt.**

Denn der Ort der Punkte, die zur Projection P' gehören, ist das in P' zu Π_1 errichtete Loth; und der Ort der Punkte, die zu P'' gehören, ist das in P'' zu Π_2 errichtete Loth. Da P' und P'' Projectionen eines Punktes sein sollen, so liegen sie auf einer zu Π_1 und Π_2 senkrechten Ebene; in dieser Ebene liegen auch die in P' und P'' zu Π_1 und Π_2 errichteten Lothe; mithin schneiden sich diese Lothe und ihr Schnittpunkt P ist der Punkt, der die Projectionen P' und P'' hat.

6. Um Alles in einer Ebene darstellen zu können, dreht man nach Herstellung der Projectionen die zweite Projectionsebene Π_2 um die Achse AA, bis sie mit der ersten Projectionsebene Π_1 zusammenfällt und zwar so, dass der obere Theil der zweiten Projectionsebene mit dem hinteren Theile der ersten, und der untere Theil der zweiten mit dem vorderen Theile der ersten zusammenfällt.

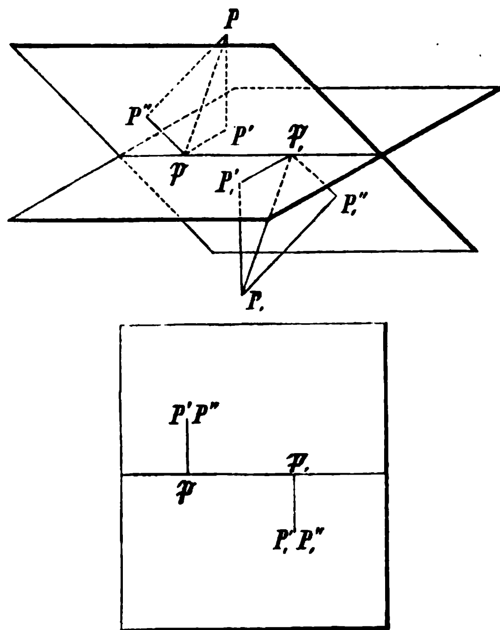
Da $P'\mathfrak{P}$ und $P''\mathfrak{P}$ senkrecht zur Achse sind, so fallen sie nach der Umlegung der zweiten Projectionsebene in eine Gerade, senkrecht zur Achse. Sind, wie es gewöhnlich der Fall ist, die beiden Projectionsebenen senkrecht zu einander, so liegen $P'\mathfrak{P}$ und $P''\mathfrak{P}$ auf verschiedenen Seiten der Achse für alle Punkte, die über der ersten und vor der zweiten, oder unter der ersten und hinter der zweiten Projectionsebene liegen wie (P_1 und P_2 in Fig. 235); $P'\mathfrak{P}$ und $P''\mathfrak{P}$ liegen auf derselben Seite der Achse für die Punkte, die über Π_1 und hinter Π_2 oder unter Π_1 und vor Π_2 liegen (wie P_3 und P_4).



(M. 235.)

7. Die beiden Projectionen eines Punktes können nach der Umlegung in einen Punkt zusammenfallen. Dann sind die rechtwinkeligen Dreiecke $P\mathfrak{P}P'$ und $P\mathfrak{P}P''$ congruent, und $P\mathfrak{P}$ halbirt daher den Winkel $P'\mathfrak{P}P''$; mithin liegt P auf der Halbirungsebene des von dem hintern Theile von Π_1 und dem obern Theile von Π_2 (oder von dem vorderen von Π_1 und dem unteren von Π_2) gebildeten Flächenwinkels. Und umgekehrt: Für alle Punkte, welche auf dieser Halbirungsebene liegen, fallen nach der Umlegung die beiden Projectionen zusammen. Diese Ebene heisst Coincidenzebene.

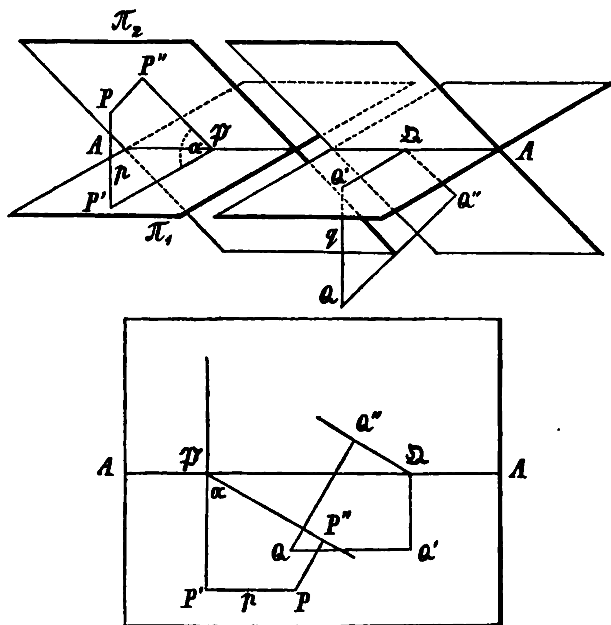
Liegt also eine Figur auf der Coincidenzebene, so fallen nach der Umlegung ihre beiden Projectionen zusammen.



(M. 236.)

8. Ist eine Projection eines Punktes und die Höhe desselben über (oder unter) der Projectionsebene, sowie die Projectionsachse und der Neigungswinkel der beiden Projectionsebenen gegeben, so kann man die zweite Projection des

Punktes (in der Umlegung) und seine Entfernung von der zweiten Projectionsebene bestimmen.



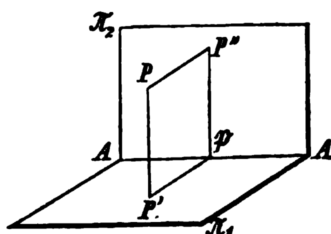
(M. 287.)

Ist α der Neigungswinkel von Π_1 und Π_2 und sucht man die zweite Projection des Punktes, der zu P gehört und um p über Π_1 liegt, so ziehe man $P'\mathfrak{P}$ senkrecht zur Achse AA. Von dem Kreisviereck $PP'\mathfrak{P}P''$ kennt man die Seiten $P'\mathfrak{P}$, $P'P = p$, den Winkel $P'\mathfrak{P}P''$ gleich dem Neigungswinkel α, und die rechten Winkel bei P' und P''.

Man construirt daher $P'\mathfrak{P}P'' = \alpha$, $P'P = p$ und $\perp P'\mathfrak{P}$, sowie $PP'' \perp \mathfrak{P}P''$ macht $\mathfrak{P}P'' = \mathfrak{P}P'$. Dann ist P'' die gesuchte zweite Projection, PP'' ist die Entfernung des Punktes P von der zweiten Projectionsebene und $P\mathfrak{P}$ ist die Entfernung des Punktes P von der Achse.

Soll P nicht um p über Π_1, sondern um q unter Π_1, liegen, so entsteht die Figur $QQ'\mathfrak{Q}Q''$.

9. Gewöhnlich stellt man die zweite Projectionsebene senkrecht auf die erste, nimmt also $\alpha = 90°$.



(M. 288.)

Alsdann wird $PP'\mathfrak{P}P''$ ein Rechteck und es ist $PP' = P''\mathfrak{P}$ und $PP'' = P'\mathfrak{P}$.

Sind also die Projectionsebenen auf einander senkrecht, so sind die Entfernungen der zweiten und ersten Projection eines Punktes von der Achse der Reihe nach gleich den Abständen des Punktes von der ersten, bez. zweiten Projectionsebene.

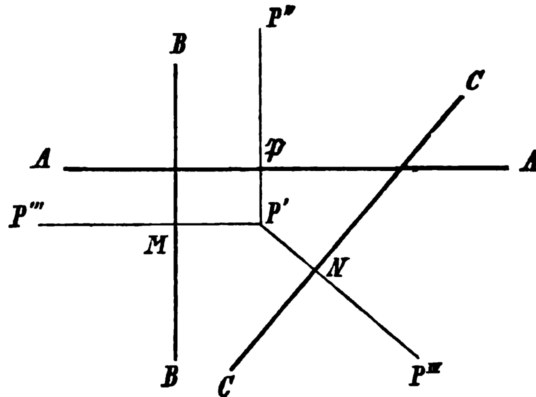
Man denkt sich dann die erste Projectionsebene gewöhnlich horizontal, die zweite vertical und bezeichnet die erste und zweite Projection demgemäss als Horizontalprojection (Grundriss) und Verticalprojection (Aufriss).

Wenn bei den folgenden Entwicklungen nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, so wird vorausgesetzt, dass die beiden Projectionsebenen aufeinander senkrecht stehen; schräg zu einander stehende Projectionsebenen werden wir nur in wenigen Fällen verwenden.

10. Nicht selten ist man veranlasst, ausser den (auf einander senkrechten) Projectionsebenen Π_1 und Π_2 noch eine dritte zu Π_1, senkrechte Projectionsebene

Π_3 zu benutzen; nach Herstellung der Projectionen wollen wir dieselbe ebenfalls in die erste Projectionsebene Π_1 umlegen.

Aus den Projectionen $P'P''$ eines Punktes P findet man leicht die Projection auf die durch BB oder CC gehende Verticalebene; man construirt $P'M \perp BB$, bez. $P'N \perp CC$ und macht $MP''' = \mathfrak{P}P''$ bez. $NP^{IV} = \mathfrak{P}P''$.



(M. 239).

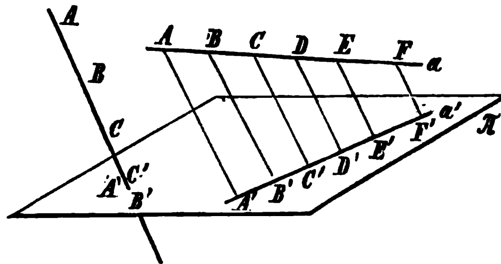
§ 2. Die Gerade.

1. Die Strahlen, welche die Punkte einer Geraden normal zur Projectionsebene oder parallel zu einer gegebenen Richtung projiciren, liegen auf einer Ebene. Diese Ebene heisst die projicirende Ebene der Geraden; im Falle der Normalprojection ist sie senkrecht zur Projectionsebene.

Die Gerade a', in welcher die projicirende Ebene einer Geraden a die Projectionsebene schneidet, enthält die Projectionen aller Punkte der Geraden a und ist daher die Projection von a. Wir sehen daher:

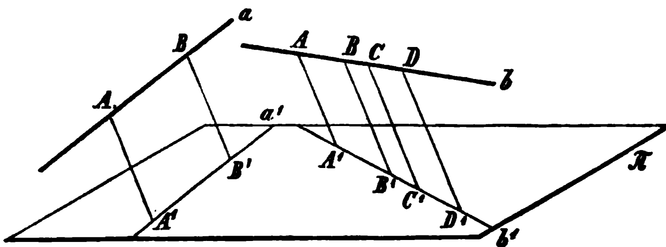
Die projicirende Ebene einer Geraden ist die Ebene, welche durch die Gerade parallel zur Richtung der Projectionsstrahlen gelegt ist; die Projection der Geraden ist die Gerade, in welcher die projicirende Ebene die Projectionsebene schneidet.

Eine Ausnahme tritt ein, wenn die Gerade b den Projectionsstrahlen parallel ist. Dann fallen die Projectionen aller ihrer Punkte in ihren Schnittpunkt mit der Projectionsebene, und dieser Schnittpunkt ist daher die Projection der Geraden b.



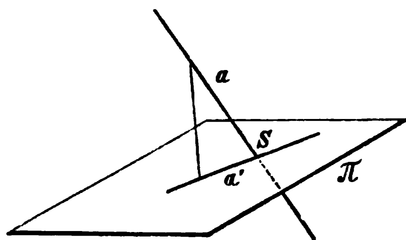
(M. 240.)

2. Ist eine Gerade a parallel zur Projectionsebene, so ist sie mit ihrer Projection a' parallel (denn a' ist der Schnitt einer durch a gelegten Ebene mit Π); jede Strecke AB der Geraden ist dann ebenso gross wie ihre Projection $A'B'$.



(M. 241.)

Ist die Gerade b nicht parallel zur Projectionsebene, so ist im Allgemeinen eine Strecke der Geraden nicht ihrer Projection gleich. Aus dem Parallelismus der Strahlen AA', BB', CC', DD' folgt, dass das Verhältniss der Strecken $AB : CD$ gleich ist dem Verhältniss ihrer Projectionen $A'B' : C'D'$. Das Verhältniss zweier Strecken einer Geraden wird also durch Praralleiprojection nicht geändert.

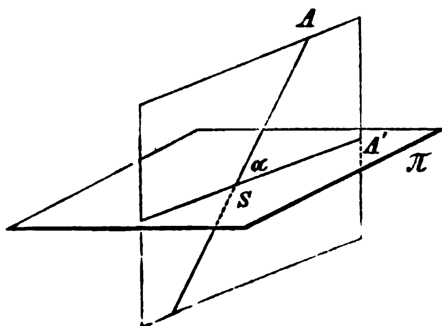


(M. 242.)

3. Der Schnittpunkt S einer Geraden a mit der Projectionsebene Π heisst die Spur der Geraden.

Ist eine Gerade parallel den Projectionsstrahlen, so fällt ihre Spur mit ihrer Projection zusammen. Ist eine Gerade parallel der Projectionsebene, so kann ein auf der Projection liegender unendlich ferner Punkt als die Spur der Geraden angesehen werden.

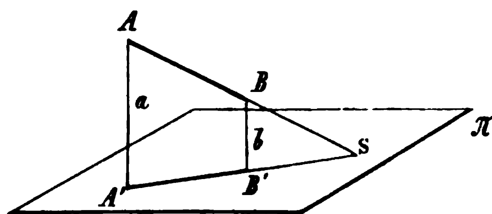
4. Wir beschränken uns nun wieder auf Normalprojectionen. Sind von einer Geraden die Projetion, die Spur und der Neigungswinkel mit der Projectionsebene gegeben, so ist die Gerade eindeutig bestimmt.

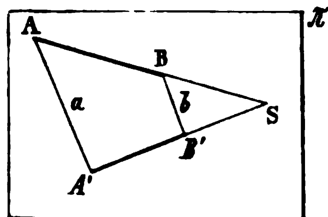


(M. 243.)

Denn um die Gerade zu erhalten, welche die Spur S hat, zur Projection SA' gehört und mit SA' den Winkel α einschliesst, errichte man durch SA' eine Ebene E senkrecht zu Π und ziehe in Π eine Gerade SA so, dass $A'SA = \alpha$, dann ist SA die gesuchte Gerade.

5. Aus der Projection $A'B'$ einer Strecke AB und den Höhen a, b ihrer Endpunkte kann die wahre Länge der Strecke, ihr Neigungswinkel gegen die Projectionsebene und die Spur der Geraden, auf welcher die Strecke liegt, gefunden werden.



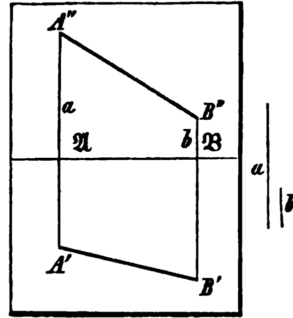


(M. 244.)

Denn von dem Trapez $A'B'BA$ sind dann ausser den rechten Winkeln bei A' und B' noch die drei Seiten $A'B'$, sowie $A'A = a$ und $B'B = b$ bekannt.

Man ziehe daher zu $A'B'$ in A' und B' Lothe und schneide von ihnen $A'A = a$ und $B'B = b$ ab, und zwar nach gleichen oder entgegengesetzten Seiten von $A'B'$, je nachdem A und B auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von Π liegen. Alsdann ist AB gleich AB, der gesuchte Neigungswinkel ist der Winkel zwischen $A'B'$ und AB und die gesuchte Spur ist der Schnittpunkt S der Geraden AB und $A'B'$.

6. Aus der Horizontalprojection $A'B'$ einer Strecke und den Höhen ab der Punkte A und B findet man die Projection auf eine Verticalebene, indem man die Verticalprojectionen $A''B''$ der Punkte A und B bestimmt (§ 1, 8 und 9) und A'' mit B'' verbindet.

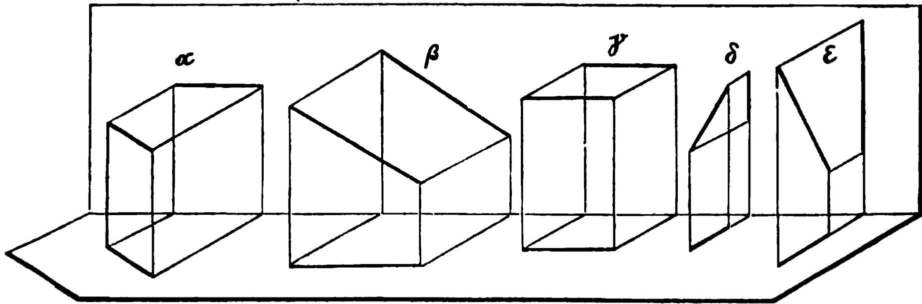


(M. 245.)

7. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit folgender Sätze und ihrer Umkehrungen:

Ist eine Gerade parallel zur ersten (oder zweiten) Projectionsebene, so ist ihre zweite (oder erste) Projection parallel zur Achse (Fig. 246 α, β).

Ist eine Gerade parallel zur Achse, so sind ihre Projectionen parallel zur Achse (Fig. 246 γ).

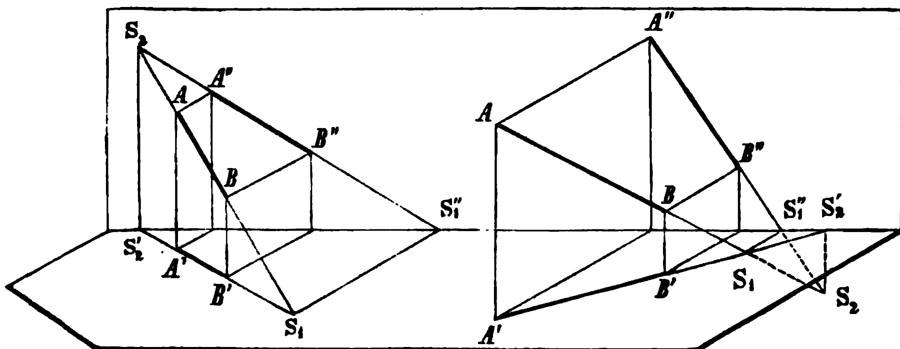


(M. 246.)

Liegt eine Gerade in einer Ebene, die senkrecht zur Achse ist, so sind beide Projectionen der Geraden senkrecht zur Achse (Fig. 246 δε).

Der Schnittpunkt der Projectionen einer Geraden ist die Projection des Punktes, in welchem die Gerade die Coincidenzebene durchschneidet.

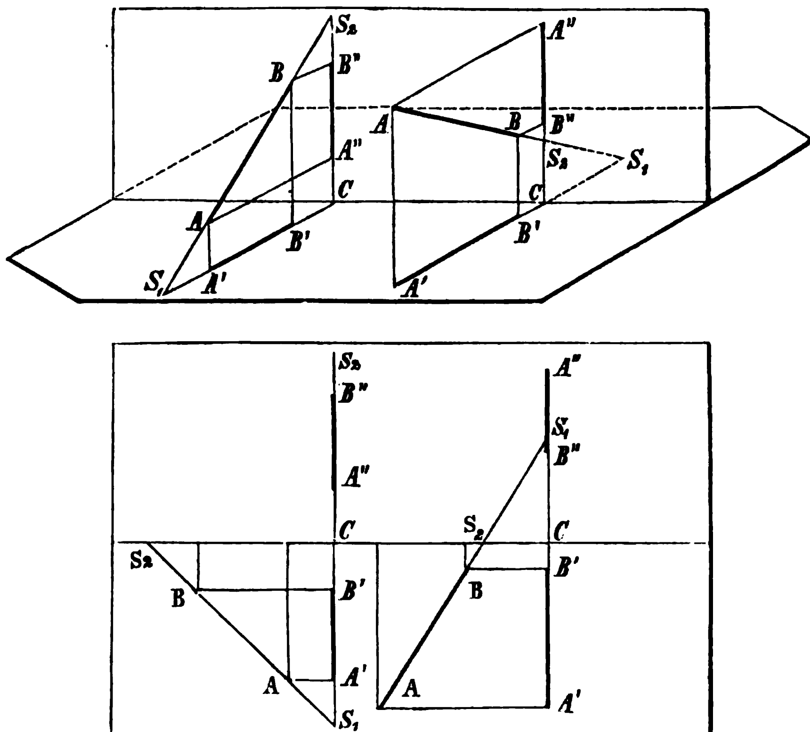
8. Aus der ersten und zweiten Projection einer Geraden kann man die Spuren finden, ohne (wie in 5) die projicirende Ebene umzulegen.



(M. 247.)

Die erste (Horizontal-)Spur S_1 der Geraden liegt auf Π_1, folglich liegt der Aufriss dieser Spur in der Achse, ist also der Punkt, in welchem die Achse von Aufrisse der Geraden getroffen wird. Die zweite (Vertical-)Spur S_2 hat einem Grundriss, der in der Achse liegt; derselbe ist also der Punkt, in welchem die Achse den Grundriss der Geraden schneidet.

Man sucht also die Punkte S_1'' und S_2', in welchen die zweite, bez. erste Projection der Geraden die Achse schneidet; die zugehörigen Punkte der ersten, bez. zweiten Projection der Geraden sind die gesuchten Spuren S_1 und S_2.

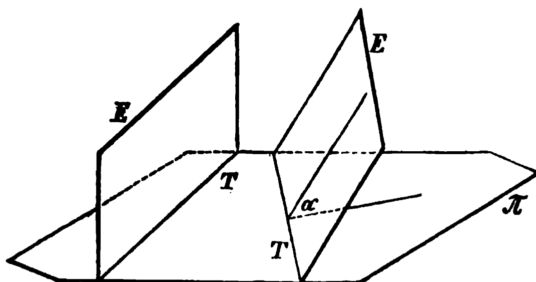


(M. 248.)

Diese Methode versagt, wenn die Gerade in einer zur Achse normalen Ebene E liegt. Diese Ebene ist dann projicirende Ebene sowol für die erste wie für die zweite Projection. Wir drehen diese Ebene um die Gerade $B'A'$, bis sie mit Π_1 zusammenfällt; construiren also in A' und B' Lothe zu $A'B'$ und machen $A'\mathrm{A} = CA''$, $B'\mathrm{B} = CB''$. Der Schnitt S_1 von AB mit $A'B'$ ist dann die gesuchte Horizontalspur. $C\mathrm{S}_2$ ist die Umlegung der Verticalspur; also wird die Verticalspur S_2 gefunden, indem man $CS_2 = C\mathrm{S}_2$ macht.

§ 3. Die Ebene und geradlinige Figuren.

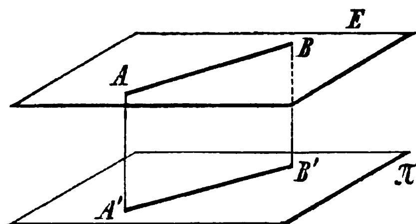
1. Die Projectionen der Punkte einer unbegrenzten Ebene E erfüllen im Allgemeinen die ganze Projectionsebene Π. Eine Ausnahme tritt hiervon nur dann ein, wenn die Ebene E parallel zu der Richtung der Projectionsstrahlen ist; denn dann fallen die Projectionen aller Punkte von E in den Schnitt der Ebene E mit der Projectionsebene; diese Schnittlinie (T) ist also dann als die Projection der Ebene E anzusehen.



(M. 249.)

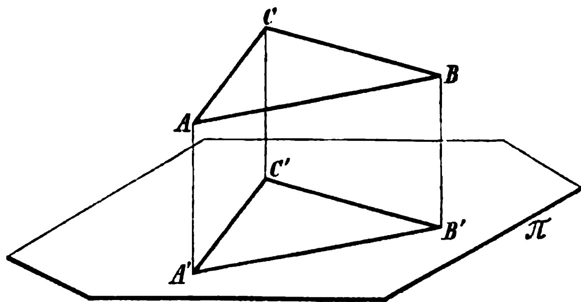
2. Wenn eine Ebene E die Projectionsebene schneidet, so ist ihre Lage gegen die Projectionsebene vollständig bestimmt, wenn man ihre Schnittlinie T (Spur) mit Π und ihren Neigungswinkel α gegen Π kennt.

3. Ist eine Ebene E parallel zur Projectionsebene, so ist ihre Lage gegen Π bestimmt, wenn man ihren Abstand von Π kennt. Alsdann ist jede Strecke AB auf E parallel und gleich ihrer Projection $A'B'$; mithin ist jede geradlinige Figur auf E congruent mit ihrer Projection. Da man eine krummlinige Figur als ein Polygon aus unzählig vielen verschwindend kleinen Seiten betrachten kann, so folgt, dass auch jede krummlinige Figur auf E, — also jede Figur auf E überhaupt — mit ihrer Projection congruent ist. — Diese Bemerkungen gelten bei schräger, wie bei normaler Richtung der Projectionsstrahlen.



(M. 250.)

4. Eine Strecke kann ihrer Normalprojection nur dann gleich sein, wenn sie der Projectionsebene parallel ist. Ist also ein Dreieck ABC mit seiner Normalprojection $A'B'C'$ congruent, so sind die Seiten AB, AC, BC parallel zu Π; also ist die Ebene des Dreiecks parallel zu Π.

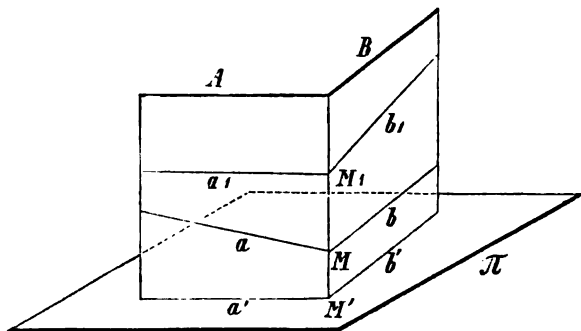


(M. 251.)

Schneidet eine Ebene E die Projectionsebene, so kann also kein Dreieck auf E, und daher überhaupt keine Figur auf E mit ihrer Projection congruent sein.

Insbesondere ist also auch ein Winkel auf E im Allgemeinen seiner Projection nicht gleich.

5. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welcher Bedingung ein rechter Winkel, dessen Schenkel nicht beide der Projectionsebene parallel sind, einen rechten Winkel als Projection hat. Soll die Projection eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel, $a' \perp b'$ sein, so müssen die Schenkel in den Ebenen A und B liegen, die durch a' und b' senkrecht zu Π errichtet sind. Sei a der eine Schenkel und zwar nicht parallel a', also auch nicht senkrecht zu B; zieht man nun durch M in B die Gerade $b \parallel b'$ (also auch $\parallel \Pi$), so ist bekanntlich $b \perp a$.



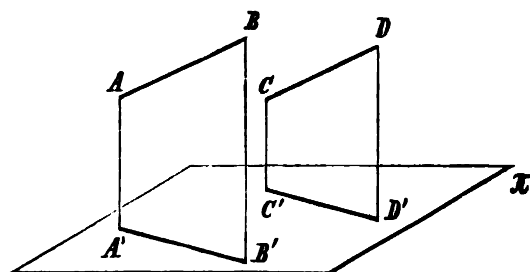
(M. 252.)

Die Stereometrie lehrt nun: Ist eine Gerade a nicht senkrecht zu einer Ebene B, so giebt es in B nur eine Gerade, die senkrecht zu a ist.

Folglich ist b diese einzige Gerade.

Nimmt man in B eine beliebige zu b' schräge Gerade b_1 als den einen Schenkel des rechten Winkels an, so schliesst man in derselben Weise, dass der andere Schenkel nur die Gerade a_1 sein kann, die in A parallelel zu a' (oder $\parallel \Pi$) gezogen wird.

Hieraus folgt der Satz: Die Projection eines rechten Winkels ist dann und nur dann ein rechter Winkel, wenn ein Schenkel (b oder a_1) parallel zur Projectionsebene ist.

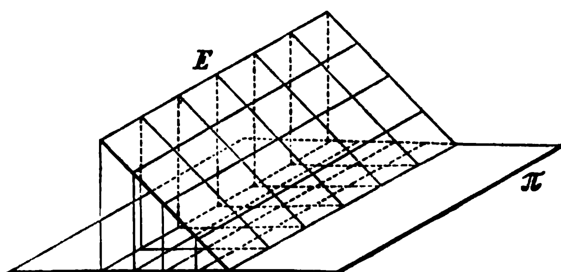


(M. 253.)

6. Parallele Gerade haben parallele Projectionen. Es sei, um dies zu beweisen, $AB \parallel CD$; sind ferner AA' und CC' die zu A und C gehörigen Projectionsstrahlen, so ist $AA' \parallel CC'$; folglich sind die Ebenen $A'AB$ nnd $C'CD$ parallel; folglich sind auch die Geraden $A'B'$ und $C'D'$ parallel, in denen sie die Projectionsebene Π schneiden. Diese Geraden sind aber die Projectionen von AB und CD auf Π.

Wie man sieht, gilt dieser Beweis nicht nur für normale, sondern allgemein für Parallelprojectionen.

7. Für die Constructionen auf einer Ebene sind zwei Schaaren von auf der Ebene gezogenen Parallelen besonders wichtig: die Parallelen zur Spur, und die Senkrechten zur Spur; erstere heissen Hauptlinien, letztere Falllinien. — Da die Hauptlinien zur Spur parallel sind, so sind auch ihre Projectionen zur Spur parallel. — Von dem rechten Winkel, den eine Falllinie mit irgend einer Hauptlinie einschliesst, ist ein Schenkel, — die Hauptlinie, — der Projectionsebene parallel; also ist (nach 5) die Projection dieses rechten Winkels wieder ein rechter Winkel; die Projectionen der Falllinien stehen also auf den Projectionen der Hauptlinien (und auf der Spur) senkrecht.



(M. 254.)

Der Winkel, den eine Falllinie mit ihrer Projection einschliesst, ist der Neigungswinkel der Ebene gegen die Projectionsebene.

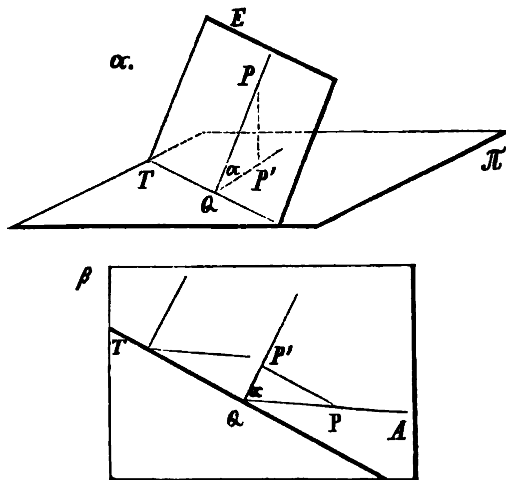
8. Aus der Projection eines Punktes P der Ebene E, und aus der Spur und dem Neigungswinkel von E kann man die Höhe des Punktes P über der Projectionsebene bestimmen.

Die durch P gezogene Falllinie PQ, ihre Projection auf Π ($P'Q$) und PP' begrenzen ein rechtwinkeliges Dreieck $PP'Q$; von diesem ist $P'Q$ bekannt,

denn diese Strecke ist das von P' auf T gefällte Loth; ferner der Winkel $P'QP$, denn dies ist der Neigungswinkel von E gegen Π. Also kann man das Dreieck construiren.

Man zeichne daher $P'Q \perp T$; ferner $P'QA$ gleich dem gegebenen Neigungswinkel α, und P'P $\perp$ $P'Q$; so ist P'P die gesuchte Höhe.

Diese Construction liefert zugleich in PQ den Abstand des Punktes P von der Spur T.



(M. 255.)

Ist die Projection P', die Höhe $(P'P)$ des Punktes P über der Projectionsebene und die Spur der Ebene E gegeben (oder wenigstens der Abstand $P'Q$ dieser Spur von P'), so lässt sich das Dreieck $P'QP$, folglich der Neigungswinkel α der Ebene E construiren.

Die Höhe des Punktes P und sein Abstand von T sind zugleich die Höhe der durch P gehenden Hauptlinie H und deren Abstand von der Spur T; die Construction des Dreiecks P$'Q$P lehrt also zugleich die Höhe einer Hauptlinie H und deren Abstand von T aus deren Grundriss H' (und aus Spur und Neigungswinkel der Ebene E, auf welcher H liegt,) bestimmen.

9. Die Geraden einer Ebene E durchschneiden die Projectionsebene in einem Punkte der Spur von E; die Spuren aller Geraden einer Ebene liegen also auf der Spur dieser Ebene.

Dies ergiebt: Die Seiten einer ebenen Figur und ihre Projectionen schneiden sich; diese Schnittpunkte liegen auf einer Geraden; und diese Gerade ist die Spur der Ebene der Figur (Tafel I, 1).

10. Drehen wir eine ebene Figur $ABCD$ (Tafel I, 2) um die Spur T ihrer Ebene, bis die Ebene mit Π zusammenfällt, so kommt die Figur in eine Lage ABCD, die wir ihre Umlegung in Π nennen. Während der Umlegung ändert sich der Schnittpunkt einer Geraden der gedrehten Figur mit der Drehungsachse T offenbar nicht; also schneiden auch die Geraden der Umlegung die entsprechenden Geraden der Projection in Punkten der Spur T.

Ferner bildet die durch einen Punkt der ebenen Figur, z. B. durch A gelegte Falllinie AM nach der Umlegung mit ihrer Projection $A'M$ eine einzige Gerade senkrecht zu T.

Die Normalprojection einer ebenen Figur und ihre Umlegung in die Projectionsebene stehen also in dem Zusammenhange, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte normal zur Spur der Figurenebene sind und dass die Durchschnittspunkte entsprechender Geraden in dieser Spur liegen.

11. Zwei ebene Figuren, deren Eckpunkte und Seiten einander so entsprechen, dass die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte parallel sind, und dass entsprechende Gerade sich in Punkten einer Geraden treffen, nennt man affin liegende Figuren; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte heissen

Affinitätsstrahlen und die Geraden, auf welcher sich je zwei entsprechende Gerade der beiden Figuren schneiden, heisst die Affinitätsachse.

Die Normalprojection einer ebenen Figur und ihre Umlegung sind also affin liegende Figuren; die Spur der Ebene der Figur ist die Affinitätsachse und die Affinitätsstrahlen sind normal zu dieser Achse.

12. Denkt man sich eine krummlinige ebene Figur als ein Polygon aus unzählig vielen verschwindend kleinen Seiten, so wird eine Gerade, auf welcher eine Seite dieses Polygons liegt, zur Tangente der Curve. Die Tangenten in einem Punkte der Projection einer ebenen Curve und in dem entsprechenden Punkte ihrer Umlegung schneiden sich also in einem Punkte der Spur.

13. Aus der Projection einer ebenen Figur, der Spur und dem Neigungswinkel der Ebene kann die Umlegung der Figur gefunden werden, und zwar nach zwei Methoden.

Erste Methode. Es sei $A'B'C'D'E'$ (Tafel I, 3) die Projection eines ebenen Fünfecks $ABCDE$; T sei die Spur der Ebene, auf welcher dieses Fünfeck liegt und α der Neigungswinkel dieser Ebene E gegen die Projectionsebene. Wir ziehen $A'F$, $B'G$, $C'H$, $D'J$, $E'K$ normal zu T; auf diesen Geraden liegen die Umlegungen von A, B, C, D, E. — Construiren wir ferner mit Hülfe des Neigungswinkels α das rechtwinkelige Dreieck $A'F\mathrm{A}_1$ so ist $F\mathrm{A}_1$ der Abstand des Punktes A von der Spur T, also finden wir die Umlegung von A, in dem wir $F\mathrm{A} = F\mathrm{A}_1$ von F auf $A'F$ abschneiden.

Bestimmen wir nun den Schnittpunkt β der Geraden $A'B'$ mit der Spur, so muss die Umlegung AB durch β gehen; B ist also der Schnittpunkt von Aβ mit BG

Ebenso findet sich C als Schnittpunkt von $C'H$ mit Bγ; sodann D als Schnitt von δC mit $D'J$. Zur Bestimmung von E kann man die Diagonale $E'C'$ benutzen, und E als Schnitt von C'ε mit $E'K$ finden.

14. Die zweite Methode besteht darin, dass man die Entfernungen aller Punkte der Figur von der Spur T bestimmt. Statt dabei mehrere solcher rechtwinkeligen Dreiecke wie $AF\mathrm{A}_1$ zu construiren, projicirt man die Ebene der Figur $ABCDE$ lieber auf eine zweite Projectionsebene, die senkrecht zur Spur (also auch senkrecht zu Π_1 und zur Ebene $ABCDE$) gewählt wird. Die Projectionsachse MN ist dann senkrecht zu T. Da die Ebene $ABCDE$ senkrecht zur zweiten Projectionsebene ist, so ist die zweite Projection dieser Ebene eine Gerade NP, die mit MN den Winkel α einschliesst, und die zweite Projection von $ABCDE$ wird erhalten, indem von $A'B'C'D'E'$ Senkrechte zu MN zieht und mit diesen die Gerade NP durchschneidet. Die Strecken NA'', NB'', NC'', ND'', NE'' sind dann parallel und gleich den von $ABCDE$ auf die Spur T gefällten Lothen. Macht man daher $NA_2 = NA''$, $NB_2 = NB''$, $NC_2 = NC''$, $ND_2 = ND''$, $NE_2 = NE''$, und zieht durch $A_2\, B_2\, C_2\, D_2\, E_2$ Parallelen zu T, so durchschneiden diese die Geraden $A'F$, $B'G$, $C'H$, $D'J$, $E'K$ in den gesuchten Umlegungen A, B, C, D, E.

Die Abstände der Projectionen $A''B''C''D''E''$ von MN sind die Höhen der Punkte $ABCDE$ über der ersten Projectionsebene Π_1. Mit Hülfe derselben kann man die Projection von $ABCDE$ auf irgend eine Verticalebene Π_3 finden. Ist QR die Achse für Π_3, so fälle man von $A'B'C'D'E'$ Lothe auf QR und trage auf diese Lothe der Reihe nach von QR aus die Abstände der Punkte $A''B''C''D''E''$ von MN auf; die Endpunkte $A'''B'''C'''D'''E'''$ der aufgetragenen Strecken sind die gewünschten Projectionen von $ABCDE$ auf Π_3.

15. Bei der Ausführung von Umlegungen ist es räthlich, zunächst die zweite Methode zu benutzen und alsdann die erste Methode zur Prüfung zu verwenden, indem man probirt, ob in der That die Geraden der gegebenen Projection und die entsprechenden Geraden der Umlegung sich in Punkten der Spur schneiden.

Handelt es sich um die Umlegung einer krummlinigen Figur, so wird man stets beide Methoden verwenden. Nach der zweiten Methode bestimmt man zunächst die Umlegungen einer genügenden Anzahl Punkte und hierauf nach der Methode die Tangenten der Umlegung in diesen Punkten.

16. Es sei ein Siebeneck ABCDEFG in der Projectionsebene Π_1 gegeben. Man soll dasselbe um eine Gerade T seiner Ebene um einen gegebenen Winkel drehen und dann auf Π_1 projiciren (Tafel I, 4).

Die Lage des Siebenecks nach erfolgter Drehung werde mit $ABCDEFG$ bezeichnet. Das gegebene Siebeneck ist die Umlegung von $ABCDEFG$, es kommt also darauf an, aus der Umlegung einer Figur, der Spur T und dem Winkel φ ihrer Ebene mit der Projectionsebene die Projection zu finden; die Constructionen für diese Aufgabe können daher als die Umkehrungen der in 14 und 15 gegebenen bezeichnet werden.

Zunächst ist es klar, dass die gesuchten Projectionen in den Lothen AH, BI, CK, DL, EM, FN, GO liegen, die von ABCDEFG auf T gefällt werden.

Um die Projection eines Punktes A zu erhalten, construirt man A$HP = \varphi$, ferner HA$_1 = H$A und A$_1A' \perp$ AH; dann ist A' die gesuchte Projection des Punktes A.

Verbindet man A nun mit BCDEF, durchschneidet mit diesen Geraden T in $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ und verbindet diese Punkte mit A', so schneiden die Linien αA, βA, $\gamma A'$, $\delta A'$, $\varepsilon A'$ die von BCDEF auf T gefällten Lothe der Reihe nach in der gesuchten Projectionen $B'C'D'E'F'$.

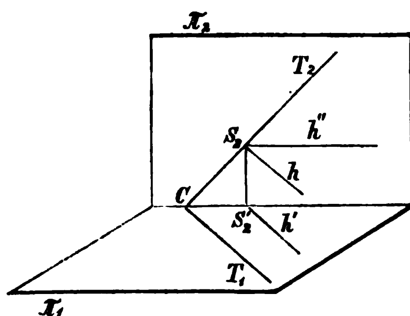
Wollte man A auch mit G verbinden, so würde der Schnitt dieser Geraden mit T in eine unbequeme Lage kommen. Man zieht daher lieber GF, schneidet damit durch T in ζ, zieht $\zeta F'$ und erhält dann G' als den Schnittpunkt von $\zeta F'$ mit dem von G auf T gefällten Lothe.

17. In einer Ebene, deren Lage durch Spur und Neigungswinkel gegeben, ist eine Strecke durch ihre Projection auf Π_1 bestimmt; man soll in der Ebene ein reguläres Sechseck construiren, das die gegebene Strecke zur Seite hat, und dasselbe auf Π_1 projiciren (Tafel I, 5).

Seien TT die gegebene Spur, α der Neigungswinkel, $A'B'$ die Projection der gegebenen Strecke, so construirt man zunächst die Umlegung AB von AB in die Projectionsebene. Hierauf construirt man über AB als Seite ein reguläres Sechseck, dreht dasselbe um T bis es mit Π_1 den Neigungswinkel α bildet und projicirt das gedachte Sechseck (nach 16) auf Π_1.

18. Statt eine Ebene durch eine Spur und Neigungswinkel zu bestimmen, kann man eine Ebene auch durch die zwei Spuren (T_1 und T_2) bestimmen, in denen sie die beiden Projectionsebenen Π_1 und Π_2 schneidet.

Die beiden Spuren einer Ebene schneiden die Achse in demselben Punkte, — nämlich in dem Punkte C, in welchem die Achse von der Ebene E getroffen wird.

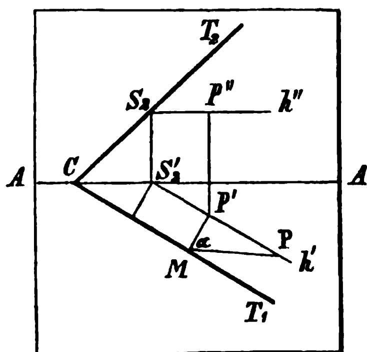


(M. 256.)

Alle Geraden einer Ebene E haben ihre Spuren auf den Spuren von E. Insbesondere wird die Verticalspur einer Parallelen zu T_1 (Hauptlinie erster Art) gefunden, indem man mit deren Horizontalprojection die Achse durchschneidet, im Schnittpunkte S_2' eine Senkrechte zur Achse zieht und mit dieser die Verticalspur T_2 durchschneidet; der Schnittpunkt S_2 ist die gesuchte Spur und der Aufriss von h geht daher durch S_2 parallel zur Achse.

Auf diesem Wege gewinnt man also zum Grundrisse einer Hauptlinie erster Art die Höhe derselben über Π_1 (nämlich $S_2'S_2$).

19. Mit Hülfe der vorigen Construction kann man aus den beiden Spuren einer Ebene ihren Neigungswinkel mit der horizontalen Projectionsebene construiren.

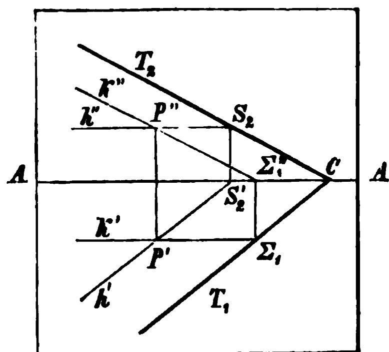


(M. 257.)

Man zieht (parallel zu T_1) den Grundriss h' einer Hauptlinie erster Art, und bestimmt deren Aufriss h''. — Irgend ein Punkt P auf h hat einen Grundriss P', der auf h' liegt, und seine Höhe über Π_1 ist gleich der Strecke $S_2'S_2$.

Zieht man nun $P'M \perp T_1$, $P'P = S_2'S_2$, so ist nach Früherem PMP' der gesuchte Neigungswinkel.

Um den Neigungswinkel der Ebene E mit der Projectionsebene Π_2 zu erhalten, denkt man sich auf E eine Hauptlinie zweiter Art (d. i. eine Parallele zu T_2) gezogen, der Aufriss derselben ist parallel zu T_2 und der Grundriss parallel zur Achse, und verfährt dann wesentlich ebenso, wie bei der soeben mitgetheilten Construction.



(M. 258.)

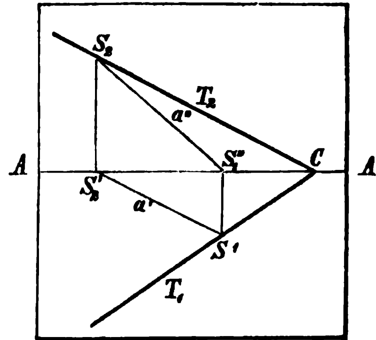
20. Die Construction in 18 dient dazu, für einen Punkt der Ebene E, von welchem die eine Projection (z. B. P') gegeben ist, die andere zu finden.

Legt man durch P eine Hauptlinie erster Art, so geht deren Grundriss durch die gegebene Projection P' und der Aufriss dieser Hauptlinie enthält den Aufriss von P, also ist die gesuchte Aufrissprojection P'' der Schnittpunkt von h'' mit der durch P' gelegten Senkrechten zur Achse.

Legt man durch P eine Hauptlinie zweiter Art k, so geht deren Grundriss k' parallel zur Achse und durch P'. Die Horizontalspur von k sei der Punkt Σ_1. Ist Σ_1'' der Aufriss von Σ_1, so geht daher der Aufriss k'' durch Σ_1'' parallel zu T_2. Auf k'' muss P'' ebenfalls

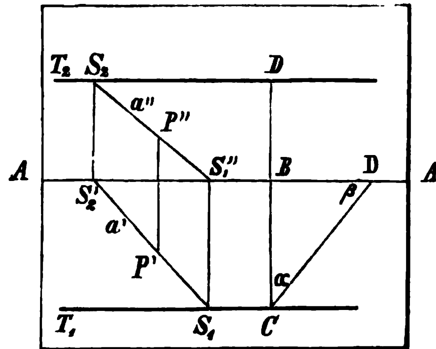
liegen, und man hat somit eine Controle der ersten Construction.

21. Um zum Grundriss a' einer auf der Ebene E gelegenen Geraden a den Aufriss a'' zu finden, durchschneiden wir mit a' die Spur T_1 und die Achse; dann ist S_1 die erste Spur von a, und S_2' der Grundriss der zweiten Spur. Zieht man S_1S_1' und $S_2'S_2$ senkrecht zur Achse, so ist S_1'' der Aufriss von S_1 und S_2 ist die Verticalspur von a; also ist $S_1''S_2$ die gesuchte Verticalprojection a''.



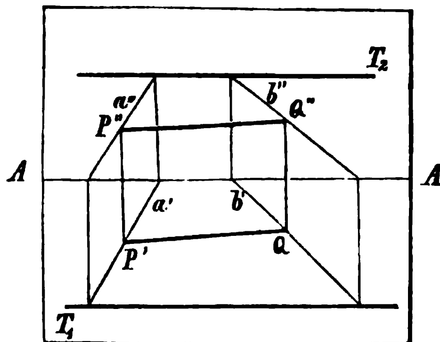
(M. 259.)

22. Ist eine Ebene E der Projectionsachse parallel, so sind ihre Spuren T_1T_2 der Achse parallel. Jede zur Achse senkrechte Ebene ist dann Normalschnitt sowol für den Flächenwinkel $E\Pi_1$ als für den Flächenwinkel $E\Pi_2$; sie schneidet das von E, Π_1 und Π_2 umschlossene dreiseitige Prisma in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen spitze Winkel die Neigungswinkel der Ebene E mit den beiden Projectionsebenen sind. Sind BC und BD senkrecht zur Achse, so schneidet die Ebene, welche durch B senkrecht zur Achse gelegt ist, die Spuren T_1 und T_2 in C und D und schneidet die Prisma $E\Pi_1\Pi_2$ in dem rechtwinkeligen Dreiecke, das die Katheten BC und BD hat. Macht man $BD = B$D, so ist BDC die Umlegung dieses Dreiecks; α ist der Neigungswinkel der Ebene E gegen die horizontale, β der gegen die verticale Projectionsebene und CD ist die Breite des zwsichen den Spuren T_1 und T_2 eingeschlossenen Streifens der Ebene E.



(M. 260.)

Um den Aufriss eines Punktes P der Ebene E zu finden, wenn der Grundriss von P gegeben ist, ziehe man durch P in der Ebene E eine Gerade a, welche die Spuren T_1T_2 schneidet; als Grundriss a' derselben kann eine beliebige durch P' gehende und die Spur T_1 schneidende Gerade a' angenommen werden. Zieht man $S_2'S_2 \perp AA$, und $S_1S_1'' \perp AA$, so ist S_2S_1'' der Aufriss von a. Legt man durch P' eine Senkrechte zur Spur, so ist deren Schnitt mit a'' die gesuchte Verticalprojection P''.



(M. 261.)

Wenn der Grundriss einer auf E gezogenen Geraden der Achse nahezu parallel ist, so dass derselbe die Spur T_1 und die Achse in unzugänglichen Punkten schneidet, so kann man den Aufriss a'' dadurch construiren, dass man

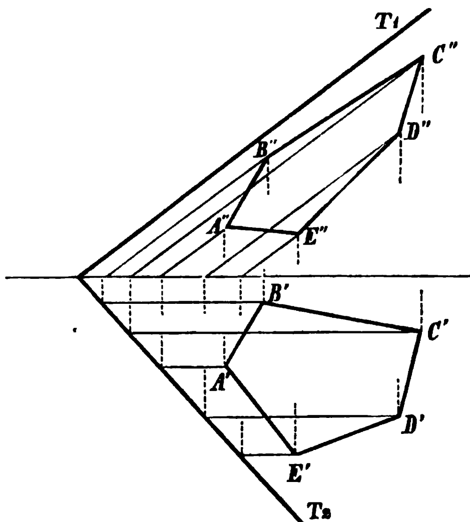
die Aufrisse zweier Punkte von a bestimmt, deren Grundrisse P' und Q' auf a' beliebig angenommen werden können. Die Gerade $P''Q''$ ist die gesuchte Verticalprojection a''.

23. Die Coincidenzebene (§ 1,7; § 2,7) wird von einer Ebene E, die nicht parallel zu ihr ist, in einer Geraden geschnitten; diese Gerade die Coincidenzlinie von E — enthält die Punkte der Ebene E, deren Horizontal- und Verticalprojectionen zusmmenfallen. Zieht man auf E zwei Gerade und bestimmt man für jede den Schnittpunkt ihrer Projectionen, so müssen beide Schnittpunkte auf der Projection der Coincidenzlinie γ liegen, diese Projection ist also die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Projectionen zweier auf E gelegenen Geraden.

Da die Coincidenzebene durch die Achse geht, so geht die Coincidenzlinie (und also auch ihre Projection γ) durch den Punkt, in welchem die Ebene E die Achse durchschneidet. Die Projection γ der Coincidenzlinie einer Ebene E geht also durch den Schnittpunkt der Spuren von E.

Man erhält daher die Projection γ der Coincidenzlinie einer Ebene E, indem man den Schnittpunkt der Projectionen einer auf E gelegenen Geraden — am einfachsten einer Hauptlinie erster oder zweiter Art — mit dem Schnittpunkte der Spuren von E verbindet; oder indem man die Schnittpunkte der Projectionen zweier auf E gelegener Geraden verbindet.

24. Sind die Spuren einer Ebene und der Grundriss einer auf der Ebene liegenden Figur gegeben, so kann man zur Construction des Aufrisses folgende drei verschiedenen Wege einschlagen:



(M. 262.)

a) Man construirt zu jedem Punkte des Grundrisses $A'B'C'D'E'F'$ den Aufriss nach No. 20.

b) (Tafel II, 1). Man projicirt zunächst die Figur auf eine seitliche Verticalebene, welche senkrecht zu T_1 ist. Die horizontale Spur derselben ist eine Gerade NN senkrecht zu T_1. Die seitliche Projection von E ist eine Gerade E''', die durch F geht und mit FN den Neigungswinkel der Ebenen E und Π_1 einschliesst.

Diesen Neigungswinkel erhält man, wenn man von einem Punkte P der Spur T_2 aus eine Falllinie erster Art, d. i. ein Loth zu T_1 zieht; der Grundriss dieses Lothes geht durch P' senkrecht zu T_1. Macht man nun $FG = P'Q$, $FGH = 90°$, $GH = PP'$, so ist das Dreieck HGF dem Dreiecke congruent, das die Falllinie PQ zur Hypotenuse und die Strecken PQ und PP' zu Katheten hat; mithin ist HFG der gesuchte Neigungswinkel und HF die zeitliche Projection der Ebene E. Zieht man durch $A'B'C'D'E'$ Senkrechte zu NN (also Parallele zu T_1) und schneidet mit diesen durch E''', so sind die Schnittpunkte die Seitenprojectionen der Punkte $ABCDE$, $\alpha A'''$, $\beta B'''$, $\gamma C'''$, $\delta D'''$, $\varepsilon E'''$ sind die Höhen der Punkte $ABCDE$ über Π_1 und FA''', FB''', FC''', FD''', FE''' sind die Abstände der Punkte $ABCDE$ von der Spur T_1.

Zieht man nun durch $ABCDE$ Senkrechte zur Achse MM und trägt man

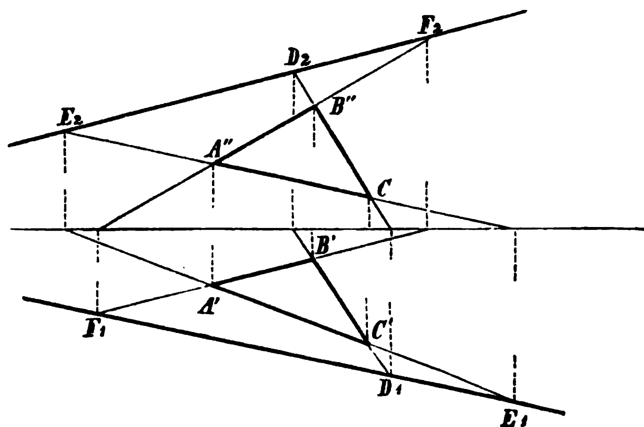
auf diesen Senkrechten von der Achse aus der Reihe nach die Höhen der Punkte $ABCDE$ über Π_1 auf, so erhält man die gesuchten Aufrisse $A''B''C''D''E''$.

c) (Tafel II, 2.) Man ziehe durch $A'B'C'D'E'$ Lothe zur Achse MM. Ferner ziehe man eine passende Diagonale, z. B. $C'E'$, welche die Achse MM und die Spur T_1 in zugänglichen Punkten G' und F' schneidet, und bestimme nach No. 21 den Aufriss $F''G''$ dieser Geraden. Die Schnitte derselben mit den Lothen $C'\gamma$ und $E'\varepsilon$ sind die Aufrisse C'' und E''.

Verbindet man den Schnitt von $F'G'$ und $F''G''$ mit dem Schnitt der Spuren T_1 und T_2, so erhält man die Projection Γ der Coincidenzlinie der Ebene E.

Bestimmt man nun die Schnittpunkte H, I, K der Geraden $C'A'$, $C'B'$, $C'D'$ mit Γ, so gehen die Aufrisse $C''A''$, $C''B''$, $C''D''$ der Reihe nach durch die Punkte H, I, K, sind also die Geraden $C''K$, $C''I$, $C''K$. Die Aufrisse $A''B''C''$ sind die Punkte, in denen die Geraden $C''H$, $C''I$, $C''K$ der Reihe nach die Lothe $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ schneiden. —

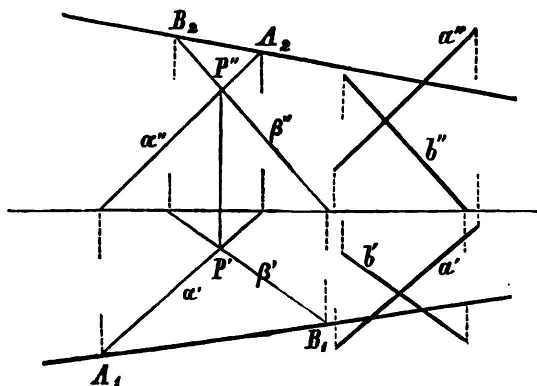
Hat man eine der Methoden a) oder b) zur Construction des Aufrisses benutzt, so kann man die Methode c) zur Prüfung verwenden, indem man die Projection der Coincidenzlinie bestimmt und nachsieht, ob die entsprechenden Grund- und Aufrisse der Vieleckseiten (oder Diagonalen) sich auf Γ schneiden.



(M. 263.)

25. Am Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch folgende Aufgaben lösen: Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch drei gegebene Punkte geht; und die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt parallel zu zwei gegebenen Geraden geht.

Um die Spuren der Ebene zu erhalten, die durch die Punkte ABC geht, deren Projectionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gegeben sind, bemerken wir, dass die Spuren der drei Geraden BC, CA, AB auf den Spuren der Ebene ABC liegen.



(M. 264.)

Bestimmt man also die Horizontalspuren E_1 und F_1 der Geraden AC und AB sowie die Verticalspuren E_2 und F_2, so ist E_1F_1 die gesuchte Horizontalspur

der Ebene ABC, und E_2F_2 die gesuchte Verticalspur. Fügt man noch die Spuren D_1 und D_2 der Geraden BC hinzu, so müssen diese auch auf den gefundenen Spuren der Ebene ABC liegen; man erhält dadurch eine Probe für die Genauigkeit der Construction.

Hat man durch P (Fig. 264) eine Ebene zu legen parallel zu den Geraden a und b, so muss diese Ebene die beiden Geraden enthalten, welche durch P parallel zu a und b gelegt sind Die Grundrisse dieser Geraden sind die Geraden α' und β', welche durch P' parallel zu a' und b' gelegt werden; und die Aufrisse α'' und β'' gehen durch P'' parallel zu a'' und b''. Die Spuren der gesuchten Ebene sind die durch die gleichnamigen Spuren von α und β gelegten Geraden.

§ 4. Die Projection des Kreises.

1. Die Projection des Kreises heisst Ellipse. Legt man durch den Mittelpunkt eines Kreises eine Ebene Π parallel zur Projectionsebene Π_1, so ist die Projection des Kreises auf Π der Projection auf Π_1 congruent. Statt daher die Projection des Kreises auf eine beliebige Ebene zu untersuchen, genügt es, die Projectionsebene durch das Centrum des projicirten Kreises zu legen.

Die Projection eines Kreisdiameters wird von der Projection des Kreismittelpunktes halbirt. Die Projection des Kreismittelpunktes hat also für die Ellipse die Eigenschaft, dass sie die Mitte aller durch sie hindurchgehenden Ellipsensehnen ist. Man nennt sie daher das Centrum der Ellipse, und die durch das Centrum gehenden Sehnen heissen Ellipsendiameter.

Während alle Kreisdiameter gleich sind, sind die Ellipsendiameter von ungleicher Länge, denn sie sind die Projectionen der unter verschiedenen Winkeln gegen die Projectionsebene geneigten Kreisdiameter.

Die Projection einer gegebenen Strecke (eines Kreisdiameters) wird am grössten, wenn die Strecke der Projectionsebene parallel ist; alsdann ist die Projection gleich der projicirten Strecke; sie wird immer kleiner, je grösser der (spitze) Winkel wird, den die Strecke mit der Projectionsebene bildet. Unter allen Geraden einer Ebene E, die durch einen festen Punkt Π derselben gehen, bildet die durch Π gehende Hauptlinie den kleinsten Winkel mit der Projectionsebene, nämlich den Winkel 0°, und die durch Π gehende Falllinie den grössten, nämlich den Neigungswinkel α der Ebene E gegen die Projectionsebene; dreht man eine Gerade auf E aus der Richtung der Hauptlinie bis in die der Falllinie, so wächst deren Neigungswinkel gegen Π von 0° bis α.

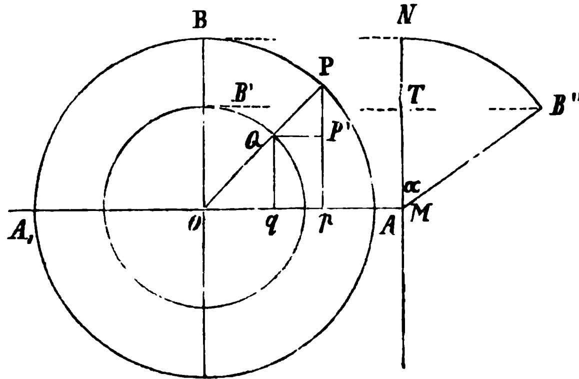
Hieraus ergiebt sich: Der grösste Ellipsendiameter ist die Projection des Kreisdiameters, der mit der Projectionsebene parallel ist, und ist gleich dem Kreisdiameter. Der kleinste Ellipsendiameter ist die Projection des Kreisdiameters, der auf dem vorigen senkrecht seht; dieser Ellipsendiameter steht senkrecht auf dem grössten und ist gleich dem grössten, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, unter dem die Kreisebene gegen die Projectionsebene geneigt ist.

Der grösste Ellipsendiameter heisst die grosse Achse der Ellipse, der kleinste die kleine Achse; jener wird mit $2a$, dieser mit $2b$ bezeichnet. Ist α der Neigungswinkel der Kreisebene gegen die Ellipsenebene, so hat man also für die Halbachsen die Formel:

$$b = a \cdot \cos \alpha.$$

2. Um einen Kreis mit dem Radius a auf eine Ebene durch das Centrum unter einem Winkel α zu projiciren, zeichne man in der Projectionsebene die Umlegung des Kreises und ziehe durch O die Spur A_1A der Kreisebene. Dann

ist A_1A zugleich die grosse Achse und O das Centrum der Projectionsellipse. Die halbe kleine Achse der Ellipse ist die Projection des Kreisradius OB, der auf A_1A senkrecht steht; die Umlegung ist $O\mathrm{B} \perp A_1A$. Zieht man $MN \perp A_1A$, macht $NMB'' = \alpha$, sowie $MN = MB'' = O\mathrm{B}$ und $B''B' \perp MN$, so ist OB' die halbe kleine Achse der Ellipse.



(M. 265.)

Wir wollen nun von jedem Kreispunkte Π aus ein Loth auf A_1A fällen; ein solches Loth mag Kreisordinate heissen und mit y bezeichnet werden. Da jede Kreisordinate die Richtung einer Falllinie der Kreisebene hat, so ist ihre Projection — die wir als die der Kreisordinate entsprechende Ellipsenordinate (η) bezeichnen wollen, senkrecht zu A_1A, fällt also auf die Umlegung der Kreisordinate, und es ist ferner $\eta = y \cos \alpha$. Vergleicht man dies mit $b = a \cos \alpha$, so folgt die Proportion

$$a : b = y : \eta.$$

Aus dem Kreispunkte P erhält man also den zugehörigen Ellipsenpunkt Π', indem man die Kreisordinate Pp im Verhältniss $b : a$ verjüngt.

Dies erreicht man am einfachsten, indem man um O einen Kreis mit Radius b zeichnet, P mit O verbindet und $QP' \parallel A_1A$ zieht; alsdann ist P' der gesuchte Ellipsenpunkt, denn es ist:

$$OP : OQ = p\mathrm{P} : pP', \text{ d. i. } a : b = y : p\Pi'.$$

Bezeichnet man den Winkel POA mit φ, so folgt noch

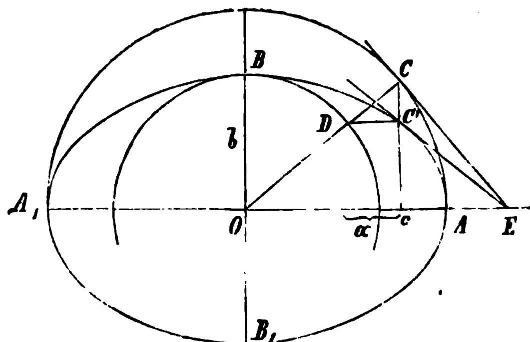
$$Op = OP \cdot \cos \varphi,\ pP' = qQ = OQ \sin \varphi;$$

also hat man die Formeln:

$$Op = a \cos \varphi,\ pP' = b \sin \varphi.$$

3. Um eine Ellipse aus ihren beiden Achsen AA_1 und BB_1 zu construiren, verfährt man nach No. 2 folgendermassen:

Man construirt um O Kreise mit den Radien a und b, verbindet einen Kreispunkt C mit O, zieht $Cc \perp A_1A$ und $DC' \parallel A_1A$. Dann ist C' der zu C gehörige Ellipsenpunkt.



(M. 266.)

Construirt man in C die Kreistangente, welche die verlängerte grosse Achse in E schneiden mag, so ist (nach § 3,12) EC' die Tangente der Ellipse in C', giebt also die Richtung der Ellipse in C' an.

Auf diese Weise kann man zu jedem Kreispunkte den zugehörigen Ellipsenpunkt und die Tangente der Ellipse in diesem Punkte construiren.

Diese Construction lehrt zugleich, dass die Ellipse doppelt symmetrisch ist: Jede der beiden Achsen ist eine Symmetrieachse der Ellipse.

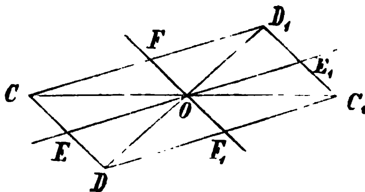
4. Zieht man zwei aufeinander senkrechte Kreisdiameter, so halbirt jeder die Sehnen, die zu dem anderen parallel gehen und geht durch die Berührungspunkte der beiden zu dem anderen parallelen Tangenten. Dies ergiebt für die Ellipse die Sätze:

Die Mitten paralleler Ellipsensehnen S liegen auf einem Diameter σ; derselbe geht durch die Berührungspunkte der beiden mit den Sehnen S parallelen Ellipsentangenten.

Die zum Diameter σ parallelen Ellipsensehnen Σ werden von dem Diameter s halbirt, der zu den Sehnen S parallel ist.

Die beiden Ellipsendiameter s und σ sind die Projectionen zweier auf einander senkrechten Kreisdiameter.

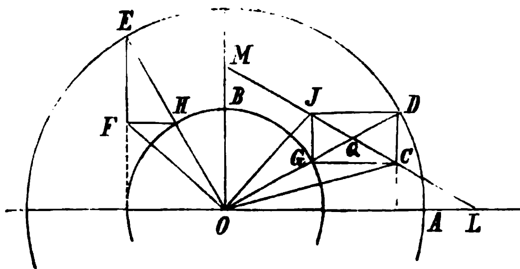
Zwei solche Ellipsendiameter heissen conjugirte Diameter.



(M. 267.)

Sind CC_1 und DD_1 zwei Diameter einer Ellipse, so sind die Ellipsensehnen CD und C_1D_1, sowie CD_1 und DC_1 parallel. Der Diameter, welcher durch die Mitten E und E_1 der parallelen Sehnen CD, C_1D_1 geht, ist mit den Sehnen CD_1 und C_1D parallel; und der durch die Mitten F und F_1 gehende Diameter ist zu den Sehnen D_1C_1 und CD parallel; folglich sind diese beiden durch F, F_1 und E, E_1 gehenden Diameter conjugirt.

5. Um zu einem Diameter OC den conjugirten zu finden, construire man den Punkt D des umgelegten Kreises, der dem Ellipsenpunkte C entspricht, ziehe den zu OD senkrechten Kreisradius OE und bestimme den Ellipsenpunkt F, der zu E gehört. Dann sind CO und FO die Projectionen zweier aufeinander senkrechten Kreisradien (deren Umlegungen OD und OE sind), also ist OF conjugirt zu OC.



(M. 268.)

6. In den rechtwinkeligen Dreiecken DGC und EHF sind die Hypotenusen gleich, $DG = EH$; ferner ist Winkel $HEF = DOA = DGC$; also sind die Dreiecke congruent und es ist $FH = DC$, $EF = GC$.

Dreht man nun die Figur EOF um das Centrum O um einen rechten Winkel, so kommt H auf G, E auf D zu liegen; kommt ferner F auf J, so ist FOJ gleich dem Drehungswinkel, also $JO \perp OF$. Ferner ist

$$GJ = FH = DC, \text{ und } DJ = EF = GC,$$

folglich $GJDC$ ein Rechteck.

Zieht man JC und durchschneidet damit die Hauptachse in L und M, so ist $QC = QG = QJ$. Da nun $CG \parallel OL$ und $GJ \parallel OM$, so folgt, dass auch $QL = QO = QM$.

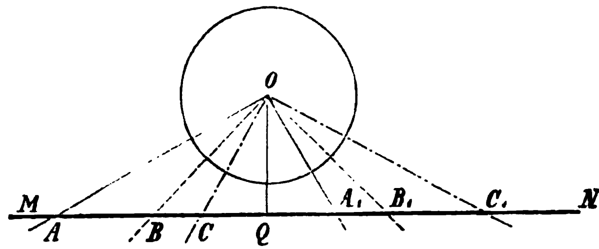
Beschreibt man also von Q aus mit Radius QO einen Kreis, so schneidet dieser die Gerade JC in den Punkten M und L, durch welche die Achsen hindurchgehen. Dabei ist $MJ = OG$, also gleich der kleinen Halbachse, sowie $JL = DO$, also die grosse Halbachse.

Hieraus ergiebt sich, wie man nach Richtung und Länge die Hauptachsen einer Ellipse finden kann, wenn zweier conjugirten Diameter Richtung und Länge bekannt sind.

Sind nämlich CC_1 und FF_1 die gegebenen conjugirten Diameter, so ziehe man JO senkrecht auf FO und gleich FO; halbire JC; construire von dem Mittelpunkte Q aus einen Kreis durch das Centrum O der Ellipse, schneide mit diesem Kreise durch JC und verbinde die Schnittpunkte L und M mit O; dann sind OL und OM die Richtungen der beiden Achsen; ferner sind MJ und JL (oder CL und MC) gleich der kleinen und grossen Halbachse.

Man bemerke noch, dass — wie sich aus der Figur sofort ergiebt — die kleine Achse durch das Paar stumpfe, die grosse durch das Paar spitze Scheitelwinkel je zweier conjugirter Diameter geht.

7. Zieht man Paare aufeinander senkrechter Kreisdiameter $AO \perp A_1O$, $BO \perp B_1O$, $CO \perp C_1O$ u. s. w. und durchschneidet dieselben mit einer Geraden, so entstehen die rechtwinkeligen Dreiecke AOA_1, BOB_1, COC_1 u. s. w., die die gemeinsame Spitze O und die Hypotenusen auf MN haben. Ist OQ lothrecht zu MN, so ist daher:



(M. 269.)

$$OQ^2 = AQ \cdot QA_1 = BQ \cdot QB_1 = CQ \cdot QC_1 = \ldots$$

Projicirt man die Figur auf eine Ebene, mit der sie den Winkel α bildet, so projicirt sich der Kreis als Ellipse, das System rechtwinkeliger Diameterpaare als System der conjugirten Durchmesser, die Gerade MN als eine die conjugirten Diameter schneidende Gerade. Sind A', B' etc. die Projectionen von A, B etc., ist ferner φ der Winkel, den MN mit der Projection $M'N'$ bildet, so hat man:

$$\begin{aligned} A'Q' &= AQ \cos\varphi & A'_1Q' &= A_1Q \cos\varphi \\ B'Q' &= BQ \cos\varphi & B'_1Q' &= B_1Q \cos\varphi \\ C'Q' &= CQ \cos\varphi & C'_1Q' &= C_1Q \cos\varphi \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Mithin ist

$$A'Q' \cdot Q'A_1' = B'Q' \cdot Q'B_1' = C'Q' \cdot Q'C'_1 = \ldots OQ^2 \cdot \cos^2\varphi.$$

Hieraus, bez. aus der Umkehrung dieser Betrachtung ergiebt sich der Satz:

Die Paare conjugirter Diameter einer Ellipse schneiden eine beliebige Gerade so, dass die Strecken, welche von den Schnittpunkten der Geraden mit je zwei conjugirten Diametern und einem gewissen festen Punkte der Geraden begrenzt werden, ein constantes Produkt haben.

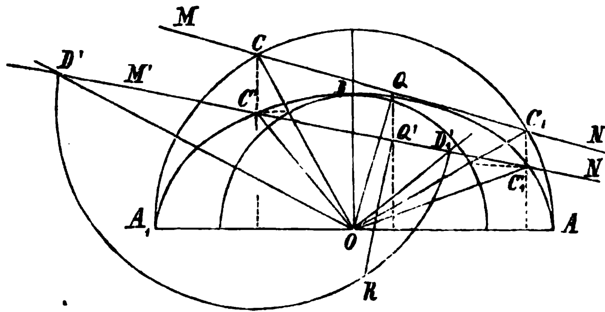
Geht die Gerade $M'N'$ durch die Enden C', C_1' zweier conjugirter Diameter,

so ist sie die Projection einer Kreissecante, die durch die Enden zweier aufeinander senkrechten Kreisdiameter geht; der Punkt Q ist daher der Mittelpunkt der auf MN liegenden Kreissehne CC_1, und Q' der Mittelpunkt von $C'C_1'$.

Ferner ist $OQ = QC$, also $OQ^2 \cos^2 \varphi = QC^2 \cdot \cos^2 \varphi = Q'C'^2$.

Der soeben gegebene allgemeine Satz nimmt also jetzt folgende Gestalt an: Die Paare conjugirter Diameter einer Ellipse schneiden eine Gerade; welche durch die Enden zweier conjugirten Diameter gelegt ist, so, dass das Produkt der Strecken der Geraden, welche von dem Mittelpunkte (P') der auf ihr liegenden Ellipsensehne ($C'C_1'$) und von zwei conjugirten Diametern begrenzt werden, gleich dem Quadrate der halben Ellipsensehne ist.

Dieser Satz lehrt, wie man zu jeder Diameterrichtung die Richtung des conjugirten Diameters finden kann, wenn zwei conjugirte Diameter der Ellipse nach Grösse und Richtung gegeben sind. Sind OC' und OC_1' die Hälften der gegebenen conjugirten Diameter und soll die zu OD' conjugirte Diameterrichtung gefunden werden, so ziehe man $C'C_1'$ und errichte im Mittelpunkte Q' der Strecke $C'C_1'$ ein Loth $Q'R$ gleich $Q'C'$. Construirt man nun einen Kreis, der sein Centrum auf $M'N'$ hat und durch D' und R geht, und verbindet den zweiten Schnittpunkt D_1' dieses Kreises und der Geraden $M'N'$ mit O, so ist OD_1' die gesuchte zu OD' conjugirte Diameterrichtung, denn man hat



(M. 270.)

$$D'Q' \cdot Q'D_1' = Q'R^2 = Q'C'^2.$$

Die Achsenrichtungen werden daher gefunden, indem man den Kreis construirt der durch R und O geht und sein Centrum auf $M'N'$ hat; die Achsen gehen durch die Punkte, in welchen $M'N'$ von diesem Kreise geschnitten wird.

8. Beschreibt man vom Endpunkte der kleinen Halbachse B aus einen Kreis, der die halbe grosse Achse zum Radius hat, so schneidet dieser die grosse Achse in zwei symmetrisch zum Centrum gelegenen Punkten F, F_1, welche die Brennpunkte der Ellipse heissen; ihr Abstand vom Centrum $FO = OF_1$ heisst die lineare Excentricität (c), das Verhältniss derselben zur halben grossen Achse die numerische Excentricität.

Es ist daher FBO (Fig. 271) gleich dem Winkel α, den die Ellipsenebene mit der Ebene des Kreises bildet, deren Normalprojection die Ellipse ist und man hat $c = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sin \alpha$.

9. Ist P ein Ellipsenpunkt, P der zugehörige Kreispunkt, so ist $OP = a$ und daher $OQ = a \cos \varphi$, $Q\text{P} = a \sin \varphi$.

Ist ferner α der Neigungswinkel der Kreisebene gegen die Ellipsenebene, also $\cos \alpha = b : a$, so ist $QP = QP \cdot \cos \alpha = a \sin \varphi \cos \alpha$.

Für die Entfernungen des Punktes P von den beiden Brennpunkten hat man daher aus den rechtwinkeligen Dreiecken FQP und F_1QP:

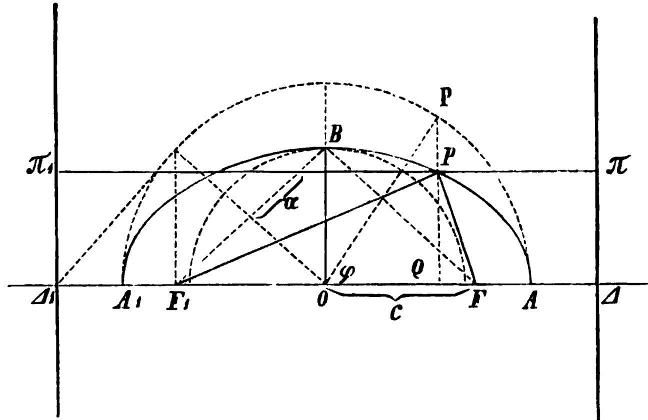
$$FP^2 = PQ^2 + QF^2 = PQ^2 + (c - OQ)^2 = a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + a^2 (\sin \alpha - \cos \varphi)^2$$
$$F_1P^2 = PQ^2 + QF_1^2 = PQ^2 + (c + OQ)^2 = a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + a^2 (\sin \alpha + \cos \varphi)^2$$

Nach der Auflösung der Klammern ergiebt sich:

$FP^2 = a^2 (sin^2 \varphi \, cos^2 \alpha + sin^2 \alpha - 2 \, sin \, \alpha . cos \, \varphi + cos^2 \varphi)$

$F_1P^2 = a^2 (sin^2 \varphi \, cos^2 \alpha + sin^2 \alpha + 2 \, sin \, \alpha . cos \, \varphi + cos^2 \varphi)$.

Ersetzt man in den ersten Gliedern $cos^2 \alpha$ durch $1 - sin^2 \alpha$, so vereinfachen sich diese Werthe zu



(M. 271.)

$$FP^2 = a^2 (1 + sin^2 \alpha \, cos^2 \varphi - 2 \, sin \, \alpha \, cos \, \varphi) = a^2 (1 - sin \, \alpha \, cos \, \varphi)^2$$
$$F_1P^2 = a^2 (1 + sin^2 \alpha \, cos^2 \varphi + 2 \, sin \, \alpha \, cos \, \varphi) = a^2 (1 + sin \, \alpha \, cos \, \varphi)^2.$$

Hieraus folgt:

$$FP = a - c \, cos \, \varphi, \quad F_1P = a + c \, cos \, \varphi.$$

10. Die soeben aufgefundenen Werthe für FP und für F_1P führen auf folgende Ueberlegung:

Die Strecke OQ ist $a \, cos \, \varphi$, also $\frac{a}{c} \cdot c \, cos \, \varphi$; macht man nun $O\triangle = O\triangle_1 = \frac{a}{c} \cdot a$, und zieht durch $\triangle$ und $\triangle_1$ Parallelen zur kleinen Achse, so sind die Abstände des Ellipsenpunktes P von diesen Parallelen:

$$P\Pi = O\triangle - OQ = \frac{a}{c}(a - c \, cos \varphi) = \frac{a}{c} \cdot PF$$

$$P\Pi^1 = O\triangle_1 + OQ = \frac{a}{c}(a + c \, cos \varphi) = \frac{a}{c} \cdot PF_1.$$

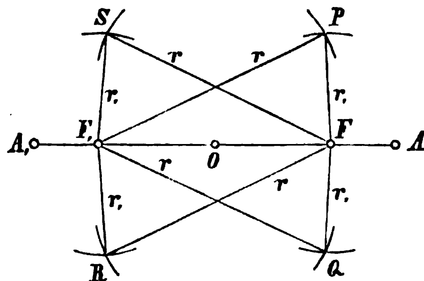
Hieraus folgt: $\quad PF : P\Pi = PF_1 : P\Pi_1 = c : a.$

Jede der beiden Geraden, die durch $\triangle$ normal zur grossen Achse gehen, heisst Directrix der Ellipse. Man hat daher den Satz: Für jeden Ellipsenpunkt hat der Abstand von einem Brennpunkte zum Abstande von der diesem Brennpunkte zunächst gelegenen Directrix ein constantes Verhältniss; dieses Verhältniss ist gleich der numerischen Excentricität.

11. Addirt man die beiden für PF und PF_1 gefundenen Werthe, so erhält man

$$PF + PF_1 = 2a.$$

Die Summe der Abstände jedes Ellipsenpunktes, von den beiden Brennpunkten ist daher constant und gleich der grossen Achse der Ellipse.



(M. 272.)

Dieser wichtige Satz zeigt eine einfache Construction der Ellipse, wenn die grosse Achse und die Brennpunkte gegeben sind. Man theile $2a$ in zwei Theile

r und r_1, so dass also $r + r_1 = 2a$. Schlägt man von F und F_1 aus Kreisbogen mit den Halbmessern r und r_1, so erhält man im Ganzen vier Punkte $PQRS$, die von dem einen Brennpunkte um r, von dem anderen um r_1 entfernt sind; also sind $PQRS$ Ellipsenpunkte. Durch andere Theilung von $2a$ und Wiederholung der Construction kann man beliebig viele Gruppen von je vier Ellipsenpunkten erhalten.

12. Ist P der zum Ellipsenpunkte P gehörige Kreispunkt und $\mathrm{P}R \perp O\mathrm{P}$, so ist PR Ellipsentangente. Nun ist $OR = O\mathrm{P} : \cos\varphi = a : \cos\varphi$; mithin

$$FR = OR - OF = \frac{a}{\cos\varphi} - c = \frac{1}{\cos\varphi}(a - c\cos\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} FP.$$

$$F_1R = OR + OF = \frac{a}{\cos\varphi} + c = \frac{1}{\cos\varphi}(a + c\cos\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} F_1P$$

(M. 273.)

Hieraus folgt: $F_1R : FR = F_1P : FP$. Macht man $PS = PS_1 = PF$, so ist $F_1P : PS = F_1P : PF = F_1R : RF$, folglich ist SF parallel PR. Da nun $\angle PSF = \frac{1}{2} S_1PF$, so ist auch $\angle RPF = \frac{1}{2} S_1PF$. Dies ergiebt den Satz:

Jede Tangente der Ellipse halbirt den Nebenwinkel des Winkels, den die Strahlen bilden, welche den Berührungspunkt mit den beiden Brennpunkten verbinden.

Da $PS_1 = PF$, so steht PT senkrecht auf FS_1 und halbirt FS_1. Da nun T die Mitte von FS_1 und O die Mitte von FF_1 ist, so ist demnach OT die Hälfte von F_1S_1, also gleich der halben grossen Achse. Hieraus folgt:

Die Fusspunkte (T) der Lothe (FT), welche von einem Brennpunkte der Ellipse auf die Ellipsentangenten gefällt werden, liegen auf dem Kreise, der um das Centrum der Ellipse mit der halben grossen Achse als Radius beschrieben ist.

(M. 274.)

13. Errichtet man in den Endpunkten eines Kreisdiameters $2a$ Lothe zu demselben und schneidet diese Lothe durch eine Kreistangente in T_1 und T, so ist $AT : AR = O\mathrm{P} : \mathrm{P}R = A_1T_1 : A_1R$; also

$$AR = AT \cdot \frac{\mathrm{P}R}{O\mathrm{P}},$$

$$A_1R = A_1T_1 \cdot \frac{\mathrm{P}R}{O\mathrm{P}}.$$

Nun ist bekanntlich $AR \cdot A_1R = \mathrm{P}R^2$, also erhält man durch die eben gefundenen Werthe von AR und A_1R:

$$\frac{AT \cdot A_1T_1 \cdot \mathrm{P}R^2}{O\mathrm{P}^2} = \mathrm{P}R^2, \text{ folglich}$$

$$AT \cdot A_1T_1 = a^2.$$

Da man nun von T aus nur eine Gerade (TT_1) ziehen kann, welche von der Kreistangente in A_1 ein Stück abschneidet, dessen Produkt mit AT gleich dem Quadrat von a ist, so folgt der Satz:

Bewegt sich eine Gerade so, dass das Produkt der Strecken, welche auf zwei Parallen von der beweglichen Geraden und von einer Normalen zu den Parallen (AA_1) begrenzt werden, gleich dem Quadrat des halben Abstands der Parallelen ist, so berührt die Gerade in allen ihren Lagen den Kreis, der die Parallelen in A und A_1 berührt.

Dreht man die Figur um AA_1 um einen Winkel α und projicirt sie dann auf die Bildebene, so projicirt sich der Kreis als Ellipse; $T'T_1'$, die Projection von TT_1, ist Tangente der Ellipse in dem zum Kreispunkt P gehörigen Ellipsenpunkte und man hat

$$AT' = AT \cos\alpha,\quad A_1T_1' = A_1T_1 \cos\alpha,$$

mithin $$AT' \cdot A_1T_1' = AT \cdot A_1T_1 \cos^2\alpha = (a \cos\alpha)^2 = b^2.$$

Da man diese Schlüsse auch umkehren kann, so ergiebt sich:

Bewegt sich eine Gerade so, dass das Produkt der Strecken, welche auf zwei Parallen von der beweglichen Geraden und einer Normalen zu den Parallelen (AA_1) begrenzt werden (und auf derselben Seite der Normalen liegen) constant gleich dem Quadrat einer Strecke b ist, die kleiner ist als der halbe Abstand der Parallelen, so berührt die bewegliche Gerade in allen ihren Lagen eine Ellipse, welche AA_1 zur grossen Achse und b zur halben kleinen hat.

Verbindet man T' und T_1 mit einem Brennpunkte F der Ellipse, so ist

$$A_1S = AT' \cdot \frac{A^1F}{AF}$$

also $$A_1T_1' \cdot A_1S = A_1T_1' \cdot AT' \cdot \frac{A^1F}{AF} = b^2 \cdot \frac{a-c}{a+c}.$$

Da nun $b^2 = a^2 - c^2$, so erhält man

$$A_1T_1' \cdot A_1S = (a-c)^2 = A_1F^2;$$

folglich ist SFT_1' ein rechter Winkel. Wir haben daher den Satz: Bei jeder Ellipsentangente wird die Strecke, welche zwischen den in den Endpunkten der grossen Achse gezogenen Tangenten der Ellipse liegt, von jedem der beiden Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Man kann dies auch umkehren. Dreht sich ein rechter Winkel um seinen Scheitel F, und werden die Parallelen A_1T_1 und AT von den Schenkeln in den Punkten $T_1'T'$ geschnitten, so hat man

$$T'A = SA_1 \cdot \frac{FA}{FA_1}, \text{ also}$$

$$T_1'A_1 \cdot T'A = T_1'A_1 \cdot SA_1 \cdot \frac{a+c}{a-c} = A_1F^2 \cdot \frac{a+c}{a-c} = (a-c)\,(a+c).$$

Dreht sich also ein rechtwinkliges Dreieck um den Scheitel, während die andern Ecken auf zwei Parallelen gleiten, zwischen denen der Scheitel liegt, so berührt die Hypotenuse in allen ihren Lagen eine Ellipse, die den Scheitel zum Brennpunkt und die Normale zwischen den Parallelen zur grossen Achse hat.

Der Fusspunkt der von F auf die Hypotenuse gefällten Normalen bewegt sich daher (und nach 12) auf dem Kreise, der AA' zum Diameter hat.

14. Die vorigen Sätze geben die Mittel an die Hand, zu zwei conjugirten Durchmessern der Ellipse die beiden zugehörigen Kreisdurchmesser (in der Umlegung) zu construiren.

Man bestimme zunächst (nach No. 7) die Richtungen der Hauptachsen; es sei MM_1 die der grossen Achse; dann ziehe man durch die Endpunkte C und C_1 der gegebenen conjugirten Durchmesser Normale zu MM_1. Es gilt nun, auf CD und C_1D_1 zwei Punkte E und E_1 zu finden, so dass $EO = E_1O$ und $EO \perp E_1O$. Da $EO = E_1O$, so liegt die Mitte von EE_1 auf der Parallelen GH zu ED, welche DD_1 halbirt.

(M. 275.)

Da ferner EOE_1 ein rechter Winkel sein soll, so liegt (nach No. 13) der Fusspunkt der von O auf EE_1 gefällten Normalen auf dem Kreise, der DD_1 zum Durchmesser hat.

Da EOE_1 rechtwinkelig und gleichschenkelig sein soll, so fällt der Fusspunkt der von O auf EE_1 gefällten Normalen mit der Mitte von EE_1 zusammen, also fallen beide in den Punkt I, in welchem GH und der über dem Diameter DD_1 geschlagene Kreis sich schneiden.

Die gesuchte Gerade EE_1 ist also die durch I gehende Normale zu IO. Man hat dabei zugleich in $EO = E_1O$ die Länge der grossen Halbachse erhalten. Zieht man noch CK parallel MM_1, so ist (nach No. 3) OK die halbe kleine Achse der Ellipse.

15. Um die Hauptachsen einer in Zeichnung gegebenen Ellipse zu finden, ziehe man in derselben zwei parallele Sehnen, halbire sie und ziehe die Gerade durch die Mittelpunkte, so hat man einen Ellipsendiameter; man halbire denselben und ziehe durch den so gewonnenen Mittelpunkt der Ellipse einen zweiten Diameter parallel den zuerst gezeichneten Sehnen; dieser Diameter ist dem zuerst gewonnenen conjugirt; aus beiden conjugirten Diametern construirt man dann die Achsen. Es ist zweckmässig, die Richtung der parallelen Sehnen so zu wählen, dass sie augenscheinlich von der Richtung einer Hauptachse stark abweichen.

16. Sind OC' und OD' zwei conjugirte Radien der Ellipse $AB'A_1$, so gehören sie zu zwei auf einander senkrechten Kreisradien OC und OD. Zieht man $P'p'$ parallel OC' und bestimmt durch Normale zu OA_1 die zugehörigen Punkte P und p, so ist $P'p'$ die Projection von Pp, mithin Pp parallel OC, also senkrecht auf OD.

Da $pP \parallel OC$, so folgt

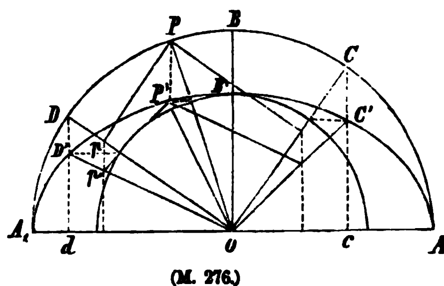
$$p'P' : pP = OC' : OC, \text{ folglich}$$

$$p'P' = \frac{OC'}{OC} \cdot pP.$$

Ferner hat man

$p'O : pO = D'O : DO$, also

$$p'O = \frac{D'O}{DO} \cdot pO.$$



(M. 276.)

Bezeichnen wir die conjugirten Radien OD' und OC' mit α und β, und der Winkel POD mit φ, so hat man

$pO = a \cos\varphi$, $Pp = a \sin\varphi$, also

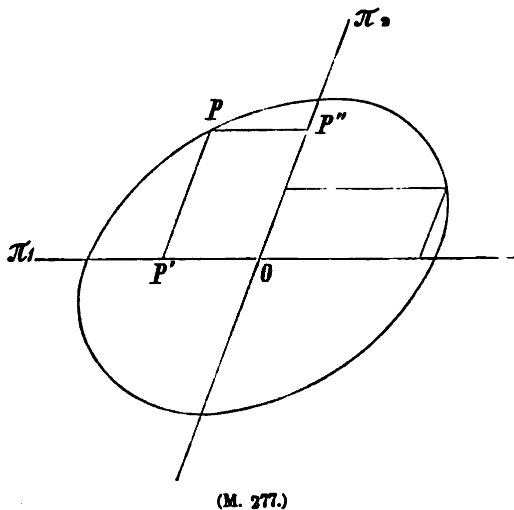
$$p'O = \frac{\alpha}{a} \cdot a \cos\varphi = \alpha \cos\varphi$$

$$p'P = \frac{\beta}{a} \cdot a \sin\varphi = \beta \sin\varphi.$$

Diese werthvollen Schlussfolgerungen kann man umkehren und erhält dann folgenden Satz:

Zieht man durch die Punkte P einer Ebene Parallele zu zwei sich schneidenden Geraden Π_2 und Π_1 der Ebene, durch welche die Punkte, auf die Geraden Π_1 und Π_2 projicirt werden, so liegen alle die Punkte, deren Projectionsstrahlen aus den Formeln folgen:

$PP'' = \alpha \cos\varphi$, $PP' = \beta \sin\varphi$, (wobei α und β gegebene Längen sind, und durch Aenderung des Winkels φ von 0° bis 360° alle möglichen Punkte dieser Art erhalten werden) auf einer Ellipse, welche die auf Π_1 und Π_2 vom Schnittpunkte aus aufgetragenen Strecken α und β zu conjugirten Diametern hat.



(M. 277.)

Construirt man nämlich diese Ellipse und projicirt irgend einen ihrer Punkte P parallel mit Π_2 und Π_1 auf Π_1 und Π_2, so ist

$PP'' = P'O = \alpha \cos\varphi$, $\sin\varphi$,

also ist diese Ellipse der Ort der oben bezeichneten Punkte.

17. Jede Parallelprojection einer Ellipse ist wieder eine Ellipse.

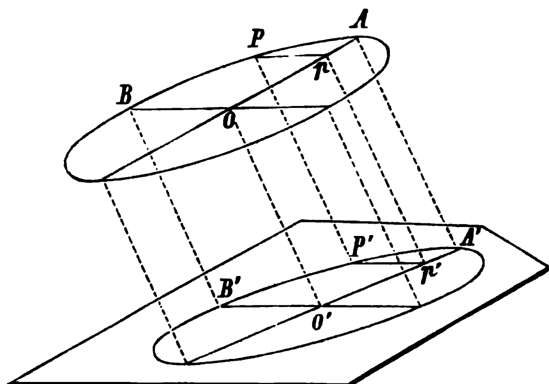
Beweis. Es sei E eine Ellipse und E' eine Parallelprojection derselben, ferner O' die Projection des Ellipsencentrums.

Da die Projection der Mitte einer Geraden der Mittelpunkt der Projection der Geraden ist, so folgt, dass alle durch O' gehenden Sehnen der Curve E' in O' halbirt werden; also hat die Curve E' ein Centrum, nämlich O'.

Parallele Sehnen von E' gehören zu parallelen Sehnen von E. Hieraus folgt, dass die Durchmesser von E', ebenso wie die von E, paarweis conjugirt sind, so dass jeder von zwei conjugirten Durchmessern die Sehnen halbirt, die zu dem andern parallel sind; und zwar sind zwei conjugirte Diameter von E' die Projectionen zweier conjugirten Diameter von E.

Es seien OA und OB zwei conjugirte Radien der Ellipse E, und $O'A'$, $O'B'$ ihre Projectionen. Wir setzen.

$$OA = \alpha,\ OB = \beta,\ O'A' = \alpha'\ O'B' = \beta'.$$



(M. 278.)

Ferner sei Pp parallel OB; dann giebt es nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes einen Winkel φ, für welchen

$$Op = \alpha\ cos\ \varphi,$$
$$Pp = \beta\ sin\ \varphi.$$

Sind P' und p' die Projectionen von P und p, so so ist $P'p'$ parallel $O'A'$; da parallele Strecken zu ihren Projectionen gleiche Verhältnisse haben, so ist

$$p'P' : pP = O'B' : OB;$$

sowie ferner

$$O'p' : Op = O'A' : OA$$

Dies ergiebt

$$O'p' = \frac{O'A'}{OA} \cdot Op = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \alpha\ cos\ \varphi$$
$$p'P' = \frac{O'B'}{OB} \cdot pP = \frac{\beta'}{\beta} \cdot \beta\ sin\ \varphi$$

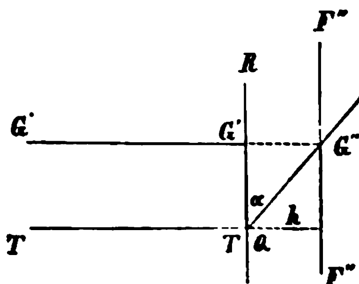
Also:

$$O'p' = \alpha'\ cos\ \varphi,\ p'P' = \beta'\ sin\ \varphi.$$

Mithin ist E' eine Ellipse, wie zu beweisen war.

§ 5. Durchschnitt einer Ebene mit Ebenen und Geraden.

1. Eine Ebene E, deren Spur T und deren Neigungswinkel gegen Π gleich α ist, wird von einer zu Π parallelen Ebene F in einer Hauptlinie geschnitten. Um deren Projection zu erhalten, projicire man E auf eine durch Q normal zu T gelegte Verticalebene; die Projection von E ist dann eine Gerade E' die mit RQ ($\perp TT$) den Neigungswinkel α einschliesst.



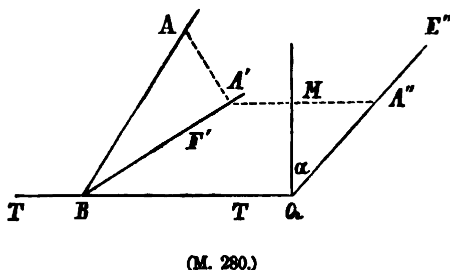
(M. 279.)

Die Verticalprojection der Ebene F ist eine Gerade F'' parallel zu QR die von QR um die Höhe h der Ebene F über Π entfernt ist. Der Schnittpunkt G'' der Geraden E'' und F'' ist die Projection der Schnittgeraden der Ebenen E und F; der Grundriss dieser Schnittgeraden ist der die durch G'' gelegte Parallele zu TT.

2. Eine Ebene F, die senkrecht zu Π ist und den Grundriss BF hat, schneidet die durch die Spur T und den Neigungswinkel α bestimmte Ebene E in einer Geraden, deren Spur mit B und deren Grundriss mit BF' zusammenfällt.

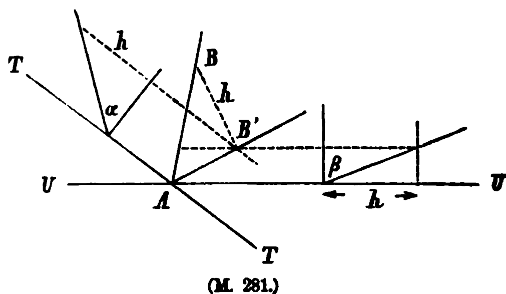
Will man die Ebene F (und mit ihr die Schnittlinie von F und G) in die Projectionsebene umlegen, so bestimme man die Höhe des zu A' gehörenden Punktes der Ebene E über der Projectionsebene. Ist MA'' diese Höhe, so

mache man AA' senkrecht zu BA' und gleich MA''; dann ist BA die gesuchte Umlegung der Schnittlinie.



(M. 280.)

3. Sind zwei Ebenen E und F durch ihre Spuren T und U und ihre Neigungswinkel α und β gegeben, so geht ihre Schnittlinie durch den Punkt A, in dem die Spuren sich schneiden. Um einen zweiten Punkt der Schnittlinie zu erhalten, lege man in beliebiger Höhe h eine Ebene parallel zu Π und bestimme die Grundrisse ihrer Schnittlinien mit G und F. Der Schnittpunkt B dieser Schnittlinien ist ein gemeinsamer Punkt von G und F, also ein Punkt der Schnittkante von G und F. Der Grundriss der letzteren ist daher AB' und ihr Neigungswinkel gegen Π ist der Winkel BAB'.

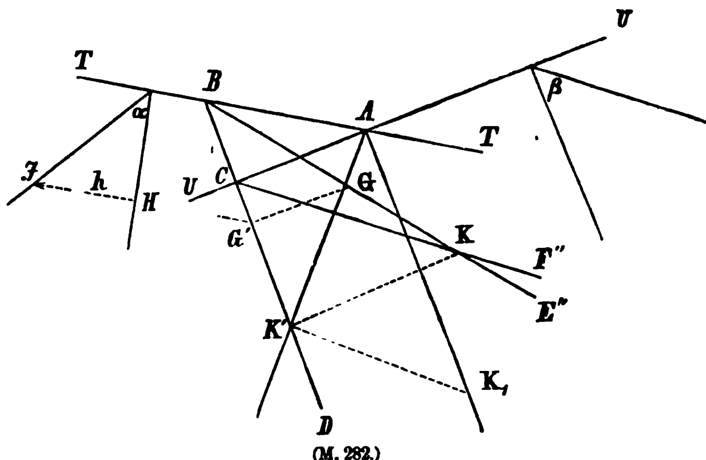


(M. 281.)

4. Statt einer Parallelebene zu Π zur Construction die Schnitte zweier Ebenen E und F zu benutzen, kann man auch eine Verticalebene V verwenden. Die Ebene V schneidet die Ebenen E und F in zwei Geraden, deren Umlegungen man nach No. 2 construiren kann; der diesen Schnittlinien gemeinsame Punkt K ist ein gemeinsamer Punkt der Ebenen E und F, also geht durch ihn die Schnittlinie von E und F. Aus der Umlegung K dieses Punktes gewinnt man dessen Grundriss K' und durch Verbindung dieses Punktes mit dem Schnittpunkte A der Spuren von E und F den Grundriss der Schnittlinie.

Die Ausführung dieser Construction geschieht am einfachsten folgendermassen:

Man lege die Verticalebene V durch irgend einen Punkt B der Spur T der Ebene E senkrecht zur Spur U der Ebene F; die Spur BC der Ebene V ist dann senkrecht zu U. Die Umlegung des Schnittes der Ebenen F und V ist dann die Gerade CF'', welche mit CD den Winkel β bildet. Um die Umlegung des Schnittes der Ebenen E und V zu erhalten, bestimme man die Höhe HI des

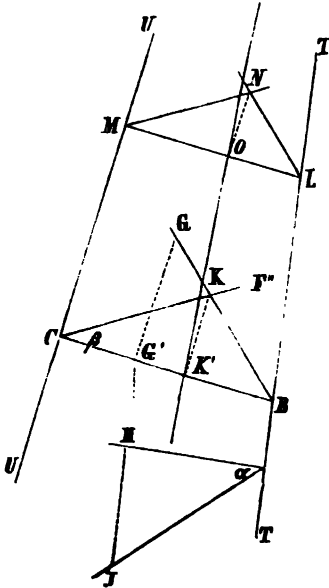


(M. 282.)

zu G' in der Ebene E gehörigen Punktes G, und mache $G'G$ senkrecht zu $G'B$ und gleich HI; dann ist BE'' diese Umlegung.

Der Punkt K, der den Geraden BE'' und CF'' gemeinsam ist, ist die Umlegung des Punktes K, in dem die drei Ebenen V, E und F sich schneiden, mithin K' die Projection von K, und $K'A$ die Projection der Schnittlinie von E und F.

Macht man $K'K_1 = K'K$ und senkrecht zu AK', so ist AK_1 die Umlegung der Schnittlinie.



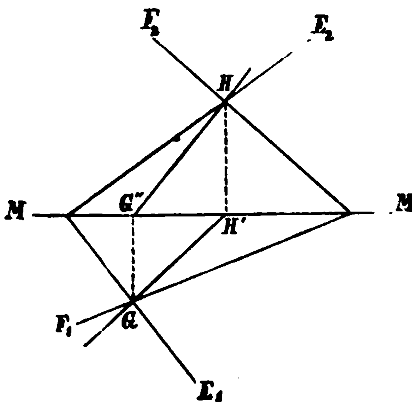
(M. 283.)

5. Schneiden sich die Spuren T und U in einem unzugänglicheu Punkte, so construire man die Grundrisse zweier Punkte der Schnittlinie durch wiederholte Anwendung der soeben angegebenen Construction.

Man mache $BC \perp UU$ und $F''CB = \beta$; ferner $G'I \parallel TT$, $G'G \perp BC$ und gleich HI; endlich $KK' \perp CB$; so ist K ein Punkt der Projection der Schnittlinie von E und F. Legt man nun durch L eine Ebene parallel zur vorigen Hülfsebene BKC, so schneidet diese E und F in zwei Geraden, die mit BG und CF'' parallel sind; also sind auch die Umlegungen derselben LN und MN mit BK und CK parallel. Zieht man NO senkrecht zu LM, so ist O ein zweiter Punkt des Grundrisses der Schnittlinie von E und F. Also ist $K'O$ der Grundriss der gesuchten Schnittlinie.

Die Strecken $K'K$ und OM sind die Höhen der zu K' und O gehörenden Punkte der Schnittlinie; mit deren Hülfe kann der Winkel der Schnittlinie mit der Projectionsebene construirt werden.

6. Ist jede der Ebenen E und F durch ihre beiden Spuren E_1E_2 und F_1F_2 gegeben, so ist der Schnittpunkt G der Spuren E_1 und F_1 die erste Spur der Schnittlinie und der Schnittpunkt H der Spuren E_2 und F_2 ist die zweite Spur der Schnittlinie; mithin sind GH' und HG'' die beiden Projectionen der Schnittlinie der Ebenen E und F.

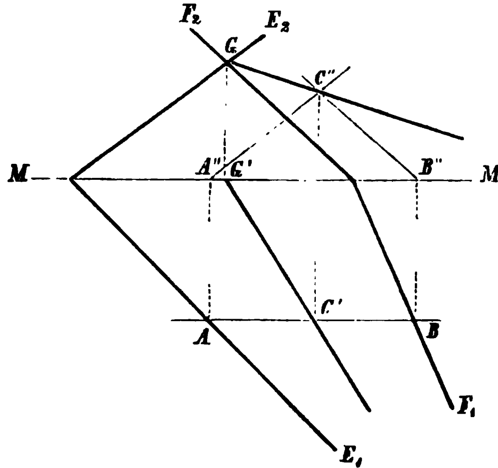


(M. 284.)

7. Wenn die beiden Spuren E_1 und F_1 oder E_2 und F_2 einen unzugänglichen Schnittpunkt haben, so kann man Punkte der Schnittlinie durch Einschaltung von Hülfsebenen bestimmen, die mit einer der Projectionsebenen parallel sind.

Haben z. B. E_1 und F_1 keinen zugänglichen Schnittpunkt, so legen wir durch AB eine Ebene parallel Π_2; dieselbe schneidet E und F in Hauptlinien zweiter Art, deren Projectionen $A''C''$ und $B''C''$ sind. Diese Hauptlinien AC und BC

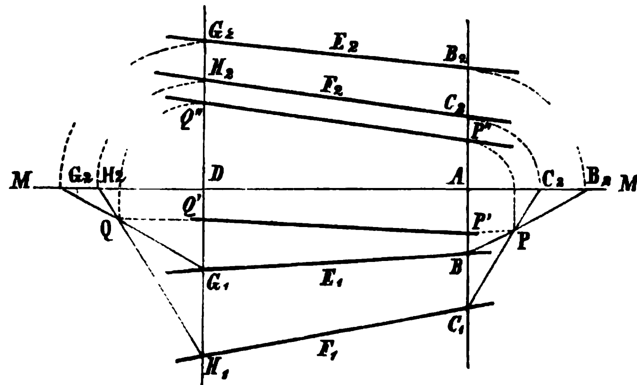
schneiden sich in dem zu C'' gehörigen Punkte C und dieser Punkt liegt auf E und F. Also ist C' ein Punkt der zweiten Projection der Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen, und GC' und $G'C'$ sind die gesuchten Projectionen der Schnittlinie.



(M. 285.)

8. Wenn beide Spuren beider Ebenen nahezu parallel der Achse sind, so führt folgendes Verfahren zum Ziele.

Durch einen beliebig gewählten Punkt A der Achse legen wir eine Ebene V senkrecht zur Achse; beide Spuren derselben sind dann senkrecht zur Achse. Diese Ebene schneidet die Horizontalspuren E_1 und F_1 in B_1 und C_1 und die Verticalspuren in B_2 und C_2. Legen wir den von der ersten und zweiten Projectionsebene begrenzten rechtwinkeligen Theil der Ebene V in Π_1 um, so ist AC_1 ein Schenkel dieses Winkels, der andere kommt auf die Achse zu liegen. Machen wir $AB_2 = AB_2$, $AC_2 = AC_2$, so sind B_1B_2 und C_1C_2 die Umlegungen des Schnittes der Ebene V mit den Ebenen E und F; mithin ist P die Umlegung eines Schnittpunktes dieser Ebenen. Machen wir PP' normal zu AC_1 und $AP'' = P'P$, so ist P' ein Punkt des Grundrisses und P'' ein Punkt des Aufrisses der Schnittlinie von E und F.



(M. 286.)

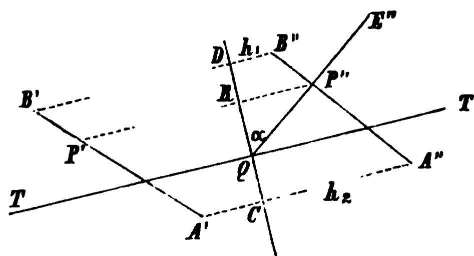
Wiederholen wir diese Construction mit einer Ebene W die durch D normal zur Achse gelegt wird, so gewinnen wir die Projectionen $Q'Q''$ eines zweiten Punktes Q der Schnittlinie.

Mithin sind $P'Q'$ und $P''Q''$ die beiden Projectionen der gesuchten Schnittlinie.

Man kann die Figur dadurch zusammen drängen, dass man die Schnittlinien der Ebene W mit E und F auf die Ebene V projicirt und diese Projectionen mit der Ebene V umlegt.

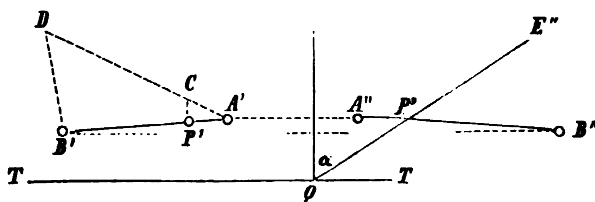
9. Wir wenden uns nun zur Construction des Schnittpunktes einer Ebene und einer Geraden.

Ist die Ebene E durch Spur T und Neigungswinkel α und die Gerade G durch die Projection $A'B'$ einer auf ihr liegenden Strecke und die Höhen $h_1 h_2$ der Endpunkte derselben gegeben, so projiciren wir E und G auf eine durch Q



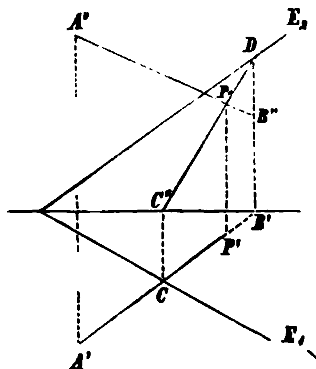
(M. 287.)

senkrecht zur Spur T gelegte Ebene F. Die Ebene E projicirt sich auf diese Ebene als eine Gerade QE'', die mit QD den Neigungswinkel α einschliesst. Ist nun $A''B''$ die Projection von AB auf F, so ist P'' die Projection des Schnittes der Geraden G und der Ebene E; macht man $P''P'$ parallel TT, so ist P' der gesuchte Grundriss des Schnittpunktes und $P''R$ seine Höhe über der Projectionsebene.



(M. 288.)

10. Wenn $A'B'$ parallel zu TT ist oder mit TT einen kleinen Winkel ($< 20°$) bildet, so kann man P' aus P'' durch das Loth $P''R$ gar nicht oder doch nicht genau genug bestimmen. In diesem Falle machen wir von der Thatsache Gebrauch, dass P' die Strecke $A'B'$ in demselben Verhältnisse theilt, wie P'' die Strecke $A''B''$. Ziehen wir daher durch A' unter beliebiger, geeigneter Richtung eine Gerade und machen auf derselben $A'C = A''P''$, $CD = P''B''$, ziehen ferner DB' und $CP' \parallel DB'$, so ist P' der gesuchte Grundriss von P.



(M. 289.)

11. Sind die Ebene und die Gerade durch Spuren und Projectionen auf zwei Ebenen gegeben, so kann man folgenden Weg einschlagen:

Man legt durch AB eine Verticalebene V; die erste Spur derselben ist $A'B'$ die zweite Spur $B'B''$. Der Grundriss des Schnittes von V und E ist $A'B'$, der Aufriss $C''D$. Da nun der Schnitt von E und AB offenbar auf der Schnittlinie von E und V liegt, so folgt, dass P'' der Aufriss und P' der Grundriss des gesuchten Schnittpunktes ist.

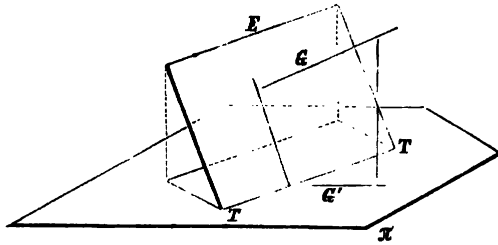
Diese Construction versagt, wenn $A'B'$ senkrecht oder nahezu senkrecht auf der Projectionsachse steht; dann muss man die vorher gegebenen Mittel anwenden.

Letzteres empfiehlt sich auch in dem Falle, wenn man mehrere Gerade durch eine Ebene zu schneiden hat. —

12. **Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so ist die Normalprojection der Geraden (auf irgend eine Projectionsebene Π) senkrecht auf der Spur der Ebene.**

Beweis. Ist die Ebene E senkrecht auf der Geraden G und sind T und G' Spur und Projection von E und G auf die Projectionsebene Π, so ist die Ebene

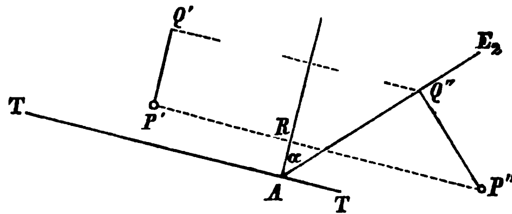
$G'G$ senkrecht auf E (weil G senkrecht auf E ist) und auch senkrecht auf Π (als projicirende Ebene von G); also auch senkrecht auf der Schnittlinie von E und Π, d. i. auf der Spur TT. Da nun TT senkrecht auf der Ebene GG' ist, so ist auch TT senkrecht auf der in GG' liegenden Geraden G'. —



(M. 290.)

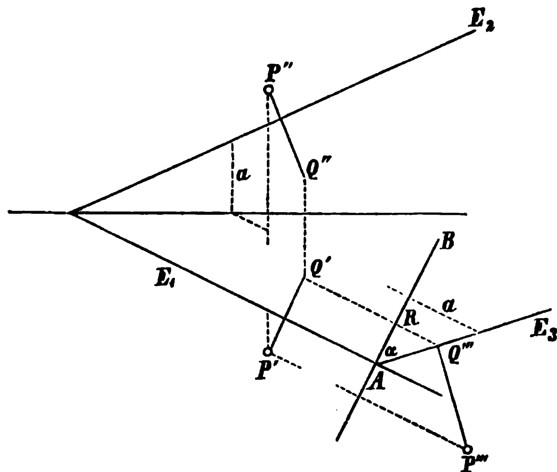
Mit Hülfe dieses Lehrsatzes können wir den Abstand eines Punktes von einer Ebene, den Winkel einer Geraden und einer Ebene, den Winkel zweier Ebenen und eine Reihe daran sich anschliessender Aufgaben construiren.

13. Ist eine Ebene E durch Spur und Neigungswinkel und ein Punkt durch Projection P' und Höhe h gegeben, so projicire man E und P auf eine durch A normal zu TT gelegte Ebene. Die erste Projection des von P auf E gefällten Lothes geht nach vorigem Satze durch P' normal zu TT, und die zweite geht durch P'' normal zu E_2. Folglich ist Q'' die zweite Projection des Fusspunktes des von P auf E gefällten Lothes, Q' der Grundriss dieses Fusspunktes und $Q''P''$ die wahre Länge des Lothes.



(M. 291.)

Sind die Ebene und der Punkt durch zwei Spuren und Projectionen gegeben, so sind die beiden Projectionen des Lothes PQ die Geraden, welche durch P' und P'' normal zu E_1 und E_2 gelegt sind. Will man nur die Projectionen des Lothfusspunktes haben, so kann man den Schnitt von PQ und E aus den Spuren und Projectionen nach No. 11 finden. Braucht man — wie gewöhnlich — auch die Länge des Lothes, so schliesst man am besten die vorige Construction an: Man projicirt E und P auf eine durch A normal zu E_1 gelegte Ebene, bestimmt zunächst $P'''Q'''$ normal zu E_3 und erhält hierauf Q' und daraus Q''.

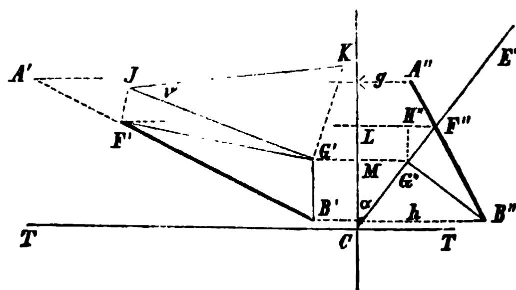


(M. 292.)

14. Den Winkel einer Geraden und einer Ebene erhält nun auf folgendem Wege.

Sind TT und α Spur und Neigungswinkel der Ebene E, ferner A' und B die Projectionen, g und h die Höhen zweier Punkte der Geraden, so bestimme

man zunächst in bekannter Weise die Projectionen der Ebene E und der Geraden AB auf eine durch C normal zu TT gelegte Ebene. Alsdann sind F'' und F' die Projectionen des Schnittes von AB und E. Zieht man weiter $B''G''$ normal zu E'', $B'G'$ normal zu T und $G''G'$ parallel zu T, so sind $B''G''$ und $B'G'$ die Projectionen des von B auf E gefällten Lothes. Der Neigungswinkel der Geraden AB gegen die Ebene E ist der bei F liegende Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks GFB. Die eine Kathete derselben, GB, ist gleich ihrer Projection $G''B''$; die andere Kathete FG ist die Hypotenuse in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete $F'G'$ und dessen andere Kathete gleich dem Unterschiede von $F''L$ und $G''M$ ist. Macht man also $IF' \perp F'G'$ und gleich $H''F''$, so ist $IG' = GF$. Macht man weiter $G'K \perp G'I$ und gleich $G''B''$, so ist $IG'K \cong FGB$, also ν der gesuchte Neigungswinkel und nebenbei IK die wahre Länge von FB.



(M. 293.)

15. Um aus den Spuren E_1, E_2, F_1, F_2 (Tafel II, 3) zweier Ebenen E und F ihren Neigungswinkel zu bestimmen, fällen wir von einem Punkte P der ersten Projectionsebene Lothe auf beide Ebenen; die Projectionen $P'A'$, $P''A''$, $P'B'$, $P''B''$ stehen senkrecht auf den betreffenden Spuren von E und F. Der Winkel dieser Lothe ist bekanntlich gleich dem Neigungswinkel der Ebenen; wir haben daher, um die Aufgabe zu lösen, nur noch den Winkel APB in die Ebene Π_1 umzulegen.

Zu diesem Zwecke legen wir durch zwei auf den Lothen liegende Punkte A und B eine Gerade und bestimmen deren erste Spur C'; diese liegt auf der Spur der Ebene APB, also ist $C'P'$ diese Spur. Der Abstand des Punktes A von derselben ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete das von A' auf $C'P'$ gefällte Loth $A'D$, dessen andere Kathete $A''H$ ist. Macht man also $A'G \perp A'D$ und gleich $A''H$, so ist GD gleich dem Lothe AD; und macht man ferner $D\mathrm{A} = DG$, zieht $\mathrm{A}C'$ und macht $B'\mathrm{B} \perp C'P'$, so sind A und B die Umlegungen von A und B, also ist $\mathrm{A}P'\mathrm{B}$ der gesuchte Neigungswinkel.

16. Im Anschlusse an die vorige Construction kann man leicht die Spuren der Ebenen bestimmen, welche die Winkel der gegebenen Ebenen halbiren (Tafel II, 3).

Die von P auf die Halbirungsebenen gefällten Lothe liegen mit den Lothen PA und PB in derselben (zur Schnittlinie von E und F normalen) Ebene und halbiren den Winkel APB und seinen Nebenwinkel. Die Umlegungen dieser Lothe sind also die Halbirungslinie $P'\mathrm{R}$ des Winkels APB und die Normale dazu $P'\mathrm{S}$. Zieht man $\mathrm{R}R'$ und $\mathrm{S}S' \perp C'P'$, so sind daher $P'R'$ und $P'S'$ die Projectionen der von P' auf die Halbirungsebenen gefällten Lothe. Die ersten Spuren X_1 Y_1 dieser Ebenen sind normal zu $P'R'$ und $P'S'$ und gehen durch M; die zweiten Spuren X_2, Y_2 gehen durch N und durch die Punkte, in welchen die Achse von den entsprechenden ersten Spuren geschnitten wird.

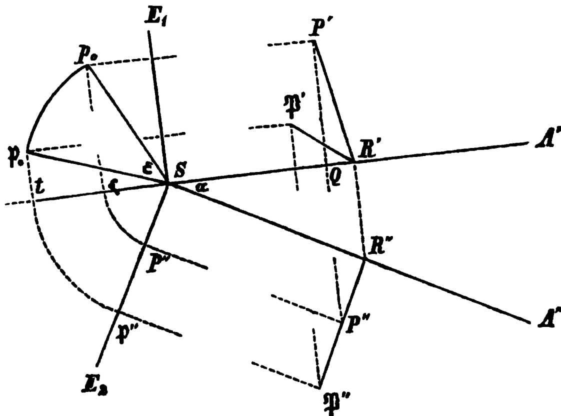
17. Ein Dreieck ABC sei durch die Projectionen und die Höhen seiner Eckpunkte, eine Ebene E durch Spur TT und Neigungswinkel

α **gegeben; man soll die Projection des Dreiecks** ABC **auf die Ebene** E **construiren** (Tafel II, 4).

Wir legen durch einen Punkt O der Spur TT wieder eine Verticalebene normal zu TT; ihre Spur OS ist normal zu TT und die Projection von E auf diese Ebene ist die Gerade OE_2, welche mit OS den gegebenen Neigungswinkel α einschliesst. Sind PA'', QB'', RC'' die gegebenen Höhen der Punkte ABC, so sind $A''B''C''$ die Projectionen von ABC auf die verticale Ebene. Zieht man nun $A''a''$, $B''b''$ und $C''c''$ normal zu E_2, so sind $a''b''c''$ die Aufrisse der Lothfusspunkte. Die Grundrisse der Lothe gehen durch $A'B'C'$ normal zu TT; zieht man $a''a'$, $b''b'$, $c''c'$ normal zu OS (also parallel TT) so sind $a'b'c'$ die Grundrisse der Lothfusspunkte. Legt man nun die Figur abc in die Horizontalebene um, so ist die Umlegung $a_0b_0c_0$ die gesuchte Projection des Dreiecks ABC auf die Fbene E.

18. Um die **Entfernung eines Punktes** P **von einer Geraden** zu bestimmen, kann man folgenden Weg einschlagen:

Die Gerade SA sei durch Spur S, Grundriss SA' und Neigungswinkel α, der Punkt P sei durch Grundriss und Höhe gegeben. Wir legen eine Verticalebene durch SA'. Die Projection SA'' von SA auf diese Ebene ist SA selbst, bildet also mit SA' den gegebenen Neigungswinkel α. Ist P' der Grundriss des gegebenen Punktes, und zieht man $P'Q$ normal zu SA' und macht QP'' gleich der gegebenen Höhe des Punktes P, so ist P'' der Aufriss von P. Es sei nun PR das von P auf SA gefällte Loth.



(M. 294.)

Ein Schenkel des rechten Winkels PRA, nämlich RA, (oder, was dasselbe ist, SA'') liegt in der Verticalebene; also ist der Aufriss des anderen Schenkels $P''R''$ normal zu SA''; macht man noch $R''R'$ normal zu SA', so ist $P'R'$ der Grundriss des Lothes PR.

Um die wahre Länge zu bestimmen, wollen wir diesmal durch S eine Ebene E normal zu SA legen; der Aufriss derselben ist eine Gerade SE_2 normal zu SA'' und ihre Horizontalspur SE_1 ist normal zu SA'. Zieht man $P''p''$ normal zu SE_2 (also parallel zu SA''), so ist p'' der Aufriss der Projection von P auf die Ebene E; macht man ferner $Ss = Sp''$, $sp_0 \parallel SE_1$ und $P'p_0 \perp SE_1$ (also $\parallel SA'$), so ist p_0 die Umlegung dieser Projection in die horizontale Ebene. S ist die Projection von R (wie überhaupt der ganzen Geraden SA) auf die Ebene E; also ist Sp_0 die Umlegung der Projection von PR auf E; da nun PR parallel der Ebene E ist, so ist PR gleich p_0S, also ist p_0S die wahre Länge des gesuchten Abstandes des Punktes P von der Geraden SA.

Wir schliessen hieran noch folgende Betrachtung:

Dreht sich der Punkt P um die Gerade SA, so beschreibt er einen Kreis,

der PR zum Radius und R zum Centrum hat. Dieser Kreis liegt parallel zur Ebene E, seine Projection auf E ist also mit ihm congruent und zwar der um S mit dem Radius Sp_0 beschriebene Kreis. Hat man nun die Aufgabe zu lösen, den Punkt P um die Gerade SA um einen gegebenen Winkel ε zu drehen, so mache man $p_0 S \mathfrak{p}_0 = \varepsilon$, $p_0 S = \mathfrak{p}_0 S$; dann ist $\mathfrak{p}_0$ die Projection von P auf E nach der Drehung. Zieht man $\mathfrak{p}_0 t \perp SA'$, macht $S\mathfrak{p}'' = St$ und zieht $\mathfrak{p}''\mathfrak{P}'' \perp SE_2$ (d. i. $\parallel SA''$) bis in die Gerade $P''R''$, so ist $\mathfrak{P}''$ der Aufriss von P nach der Drehung.

Aus $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{P}''$ bestimmt man in bekannter Weise den Grundriss $\mathfrak{P}'$.

19. Um den kürzesten Abstand zweier Geraden a, b aus deren Projectionen zu finden, bemerke man, dass dieser kürzeste Abstand bekanntlich gleich dem Abstande der Geraden b von der Ebene E ist, die durch a parallel zu b gelegt werden kann; ist γ die Projection von b auf E, so ist der Schnitt von γ und a ein Endpunkt des kürzesten Abstandes (Tafel II, 5).

Um die Spuren von E zu erhalten, legen wir durch einen Punkt von a, z. B. durch den zu A'' gehörenden, eine Gerade β parallel zu b; der Aufriss derselben fällt mit b'' zusammen, der Grundriss geht durch A' parallel zu b'. Sind nun S_1 und S_2 die Spuren von a, T_1 und T_2 die von β, so sind die Geraden S_1T_1 und S_2T_2 die Spuren E_1 und E_2 der Ebene E.

Auf diese Ebene haben wir nun b zu projiciren. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen Punkt von b, etwa B, ein Loth zu E, — ziehen also dessen Projectionen durch B' und B'' normal zu E_1 und E_2, und bestimmen in bekannter Weise die Projection des Schnittes C des Lothes und der Ebene E. Durch diesen Punkt C geht die Projection von b auf E; da nun $b \parallel E$, so sind auch Grund- und Aufriss der Projection γ parallel zu b' und b''. Zieht man schliesslich $D'\Delta'$ parallel $C'B'$ und $D''\Delta''$ parallel zu $C''B''$, so sind $D'\Delta'$ und $D''\Delta''$ die Projectionen des kürzesten Abstandes von a und b.

§ 6. Die dreiseitige Ecke, die reguläre Ecke und die regulären Polyëder.

1. Die Constructionen der Planimetrie lassen sich auf die Construction von Dreiecken zurückführen, — in ähnlicher Weise werden die stereometrischen Constructionen aus der Construction dreiseitiger Ecken aus gegebenen Seiten und Winkeln zusammengesetzt.

Wir construiren zunächst eine dreiseitige Ecke aus zwei Kantenwinkeln und dem von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel.

Es seien BOA und AOC die beiden gegebenen Kantenwinkel, EDF der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel und $ED \perp OA$. Wir haben nun den Winkel AOC um die Kante OA zu drehen, bis AOC mit der Ebene BOA (d. i. mit der Projectionsebene) den Winkel EDF bildet.

(M. 295.)

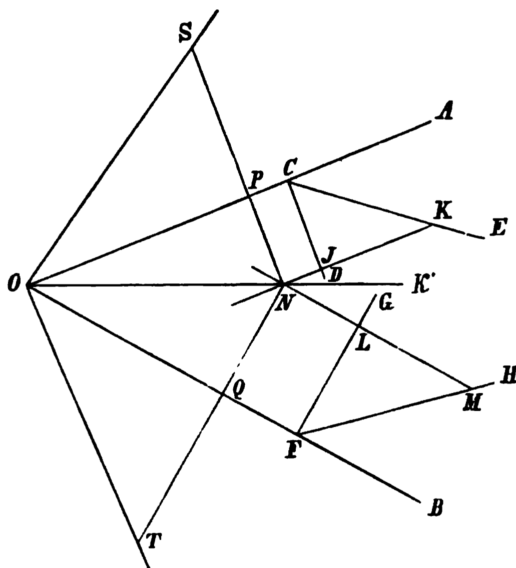
Legen wir eine Verticalebene normal zu OA durch D, so ist DF die Projection von AOC auf diese Ebene nach erfolgter Drehung. Ist DG die Verlängerung von DE und macht man $DH = DG$, so ist H die Verticalprojection von G nach der Drehung, und wenn $HI \perp DE$, so ist I der Grundriss von G nach der Drehung, also k' der Grundriss der dritten Kante k unserer Ecke und IH die Höhe des zu I gehörenden Punktes dieser Kante über der Ebene BOA.

Macht man IKM normal zu OB, sowie IL normal zu IK und gleich IH, ferner $KM = KL$, so ist MOB der dritte Kantenwinkel unserer Ecke, und LKI der an OB liegende Flächenwinkel.

Um den Flächenwinkel an der Kante k zu erhalten, legen wir eine Ebene normal zu k; deren Spur NP ist normal zu k'. Diese Ebene schneidet die Ecke in einem Dreieck, dessen Basis NP ist, dessen Spitze R auf k liegt und dessen Winkel R der Normalschnitt des gesuchten dritten Flächenwinkels ist. Das von R auf NP gefällte Loth fällt im Grundriss mit OI zusammen, hat I zum Fusspunkte, und steht auch normal auf k, da k normal zur Ebene NPR ist. Legt man die Ebene $k'k$ um, indem man $IQ = IH$ macht, so ist daher die durch I gezogene Normale OR des rechtwinkeligen Dreiecks IOQ die Umlegung der Höhe IR, also R die Umlegung von R. Um nun das Dreieck NPR umzulegen, mache man $IR_0 = I$R, dann ist NPR_0 die Umlegung des Dreiecks NRP und Winkel NR_0P ist der Normalschnitt des bei k liegenden Flächenwinkels unserer Ecke.

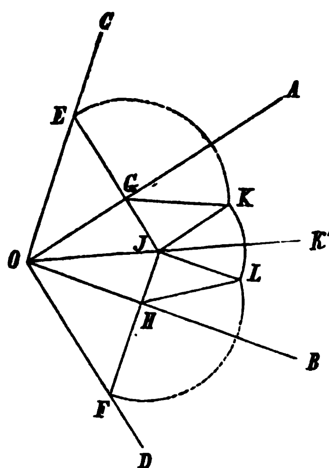
2. Construction einer dreiseitigen Ecke aus einem Kantenwinkel (AOB) und den beiden anliegenden Flächenwinkeln (DCE und GFH, wobei $CD \perp OA$ und $GF \perp OB$ sei.)

Macht man $IK = LM$ und normal auf CD bez. GF, so ist der Grundriss des Punktes der dritten Kante, der um IK von der Ebene AOB absteht, von den Geraden OA und OB um die Strecken CI und LF entfernt. Bringt man daher die Geraden IK und LM zum Durchschnitt, so geht der Grundriss k' der dritten Kante k durch den Schnittpunkt N. Macht man $NS \perp OA$, $NT \perp OB$, sowie $PS = CK$ und $QT = FM$, so sind AOS und TOB die beiden übrigen Kantenwinkel unserer Ecke; der an k liegende Flächenwinkel kann so wie im vorigen Falle gefunden werden.



(M. 296.)

3. Um eine dreiseitige Ecke zu construiren, von der die drei Kantenwinkel BOA, AOC und DOB gegeben sind, haben wir zwei der Kantenwinkel, AOC und DOB, um die Kanten OA und OB zu



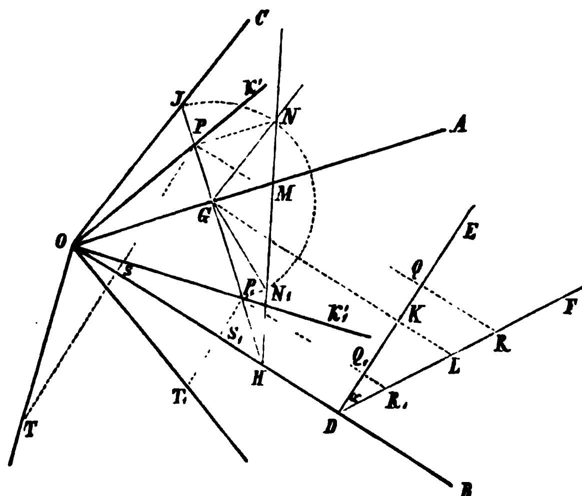
(M. 297.)

drehen, bis die Kanten OC und OD in eine zusammenfallen. Machen wir $OE = OF$, so fällt nach der Drehung E mit F zusammen. Die Projection von E auf die Ebene AOB beschreibt bei der Drehung um OA eine Gerade EI normal zu OA, und die Projection von F beschreibt dabei FI normal zu OB; der Schnittpunkt I von EI und FI ist daher der Grundriss des Punktes, in den E und F nach der Drehung zusammenfallen; mithin ist k' der Grundriss der dritten Kante k unserer Ecke.

Macht man $IK \perp GI$, $IL \perp FI$, und $GK = GE$, $HL = HF$, so geben IK sowie IF die Höhe des zu I gehörenden Punktes der Kante k an und IGK und LHI messen die Flächenwinkel an den Kanten OA und OB. Der Flächenwinkel bei k kann wie unter No. 1 gefunden werden.

4. Sind von einer Ecke die drei Flächenwinkel gegeben, so construiren wir zunächst die Polarecke der gesuchten Ecke und zwar nach der vorigen Construction, da ja die Kantenwinkel der Polarecke die Supplemente der Flächenwinkel der gegebenen Ecke sind. In der Polarecke construiren wir die Flächenwinkel und nehmen davon die Supplemente; dies sind die Kantenwinkel der gesuchten Ecke.

5. Um eine Ecke aus zwei Kantenwinkeln AOB und AOC und dem AOC gegenüberliegenden Flächenwinkel EDF ($ED \perp OB$) zu construiren, legen wir durch G eine Verticalebene V normal zu OA; diese treffe OB in H, OC in I. Die Ebene W, welche durch OB geht und mit AOB den Flächenwinkel α einschliesst, wird von V in einer Geraden geschnitten, deren Umlegnng in AOB sich ergiebt, wenn wir $GL \perp ED$ und $GM = KL$ machen.



(M. 298.)

Nun ist der Winkel AOC so lange zu drehen, bis die Kante OC auf der Ebene W liegt. Bei dieser Drehung bewegt sich I auf der Ebene V und beschreibt einen Kreis mit Centrum G von I aus bis zum Schnitt N dieses Kreises mit HM. N ist daher die Umlegung des Schnittpunktes der Ebene V mit der dritten Kante k unserer gesuchten Ecke; ist $NP \perp GI$, so ist k' der Grundriss der dritten Kante und NP die Höhe des zu P gehörenden Punktes derselben über AOB; ferner ist HGN der an OA liegende Flächenwinkel.

Zieht man $PR \perp DE$ (also $\parallel OB$) und $PS \perp OB$, und macht $ST = DR$, so ist TOB der dritte Kantenwinkel unserer Ecke; der an k liegende Flächenwinkel wird wie bei No. 1 gefunden.

Ist $GI \geqq GH$ (also $AOC \geqq BOA$), so trifft der Kreis mit Radius GI den Schenkel HM nur einmal; der zweite Schnittpunkt mit der unbegrenzten Geraden HM fällt in die Verlängerung über H hinaus oder auf H und giebt keine Lösung unserer Aufgabe.

Ist $GI < GH$, doch noch grösser, als das Loth von G auf HM, so hat der Kreis mit der Geraden HM zwei brauchbare Schnittpunkte, und die Aufgabe hat daher zwei Auflösungen.

Ist GI gleich dem Lothe von G auf HN, so berührt der Kreis die Gerade HN und die Aufgabe hat nur eine Lösung, nämlich eine bei k rechtwinkelige Ecke.

Ist GI kleiner als das Loth, so trifft der Kreis die Gerade HM nicht, und die Aufgabe ist daher nicht lösbar.

6. Die Construction einer Ecke, von welcher zwei Flächenwinkel und der dem einen von ihnen gegenüberliegenden Kantenwinkel gegeben sind, kann erfolgen, indem man zunächst die Polarecke construirt, von welcher zwei Kantenwinkel und der dem einen gegenüberliegende Flächenwinkel (nämlich die Supplemente der gegebenen Winkel) bekannt sind. Aus den Stücken der Polarecke erhält man durch Herstellung der Supplemente die Stücke der gesuchten Ecke.

7. Unter einer regulären $n$seitigen Ecke versteht man eine Ecke, welche n gleiche Kantenwinkel und n gleiche Flächenwinkel enthält.

Schneidet man eine reguläre $n$seitige Ecke durch eine Kugel, die den Scheitel der Ecke zum Centrum hat, so ist der entstehende Kugelschnitt der Ecke ein reguläres $n$seitiges sphärisches Polygon. Ebenso, wie den entsprechenden Satz für ebene reguläre n-Ecke beweist man, dass die Hauptkreise, welche die Winkel eines regulären $n$seitigen Polygons halbiren, sich in einem Punkte treffen; dieser Punkt hat gleiche sphärische Abstände von den Ecken des Polygons und ist auch gleichweit von den Seiten entfernt; er ist also das gemeinsame Centrum eines dem sphärischen Polygon umschriebenen und eines eingeschriebenen Kreises; die Ecken eines regulären sphärischen Polygons liegen also auf einer Ebene, und bilden hier die Ecken eines regulären Polygons, dessen Centrum der Durchschnitt der Ebene mit dem nach dem sphärischen Centrum des sphärischen Polygons gezogenen Kugelradius ist.

Für die reguläre Ecke ergeben sich hieraus die Sätze: Die Ebenen, welche die Winkel einer regulären $n$seitigen Ecke halbiren, schneiden sich in einer Geraden, die durch den Scheitel der Ecke geht; diese Gerade — die Achse der Ecke — bildet gleiche Winkel mit den Kanten der Ecke und ist gegen die Seiten der Ecke gleich geneigt; sie ist also die gemeinsame Achse eines der Ecke umgeschriebenen und eines eingeschriebenen Rotationskegels.

Die Punkte auf den Kanten einer regulären $n$seitigen Ecke, welche gleichweit vom Scheitel entfernt ist, liegen auf einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären n-Ecks, dessen Centrum der Durchschnitt seiner Ebene mit der Achse ist.

Sind daher von einer regulären $n$seitigen Ecke bereits zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel construirt, so ergänzt man die Ecke am einfachsten, indem man auf den drei vorhandenen Kanten vom Scheitel aus

gleiche Strecken abträgt und durch die Endpunkte eine Ebene legt; diese schneidet den vorhandenen Theil der Ecke in zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eines regulären n Ecks; ergänzt man dasselbe und verbindet die Ecken dieses Polygons mit dem Scheitel der Ecke, so erhält man die noch fehlenden Kanten der Ecke.

8. Eine reguläre n-seitige Ecke ist durch ihren Kantenwinkel sowie durch ihren Flächenwinkel bestimmt.

Um z. B. eine reguläre sechsseitige Ecke zu construiren, deren Kantenwinkel die gegebenen Grössen α ($< 360° : 6$) hat, construiren wir zunächst ein reguläres Sechseck $ABCDEF$. Gehen die Kanten der Ecke durch die Ecken dieses Sechsecks, so liegt der Scheitel auf der Geraden, welche durch das Centrum des Sechsecks normal zur Ebene desselben errichtet ist.

(M. 299.)

Jeder Punkt dieser Central-Normalen liefert mit zwei folgenden Ecken A und B verbunden ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Basis AB ist, und das den gegebenen Winkel α an der Spitze hat. Wir construiren die Umlegung dieses Dreiecks in die Ebene des Sechsecks, indem wir Gerade durch A und B legen, die mit der Senkrechthalbirenden von AB die Winkel $HGA = BGH = \frac{1}{2}\alpha$ einschliessen. Dreht sich ABG um AB, so bewegt sich der Grundriss von G auf der Geraden GH; liegt der Grundriss der Spitze des Dreiecks in O, so liegt die Spitze selbst auf der Central-Normalen durch O. Legen wir die durch OG gehende Verticalebene um, so ist OI ($\perp OG$) die Umlegung der Normal-Centralen des Sechsecks, und der Weg des Punktes G bei der Drehung ist der um H mit Radius HG beschriebene Kreis, sein Schnitt mit OI also die Endlage der Spitze G. Mithin ist IO die Höhe des Scheitels der gesuchten Ecke über der Ebene des Sechsecks. Mit Hülfe dieser Höhe kann man den Flächenwinkel unserer regulären Ecke aus der dreiseitigen Ecke, die den Scheitel B und die Kanten BA, BC, BI hat, ebenso wie in No. 1 bestimmen.

Hat man eine reguläre $n$seitige Ecke aus dem Flächenwinkel zu constuiren, so suche man das Supplement dieses Flächenwinkels auf und construire eine reguläre $n$seitige Ecke, welche dieses Supplement zum Kantenwinkel hat; diese Ecke ist die Polarecke der gesuchten. Bestimmt man den Flächenwinkel der Polarecke und nimmt davon das Supplement, so ist letzterer der Kantenwinkel der gesuchten Ecke. —

9. Solcher Polyëder, deren Flächen alle die gleiche Anzahl Ecken haben und an deren Ecken allen die gleiche Anzahl von Flächen liegt, giebt es nach dem Euler'schen Satze: »Die Anzahl der Ecken und Flächen eines Polyëders ist zusammen um zwei Einheiten grösser, als die Anzahl der Kanten« — nicht mehr als fünf Arten:

1. Tetraëder, mit 4 dreieckigen Flächen, 4 dreiflächigen Ecken und 6 Kanten;
2. Octaëder, mit 8 dreieckigen Flächen, 6 vierflächigen Ecken, und 12 Kanten;
3. Hexaëder, mit 6 viereckigen Flächen, 6 dreiflächigen Ecken und 12 Kanten;
4. Dodecaëder, mit 12 fünfeckigen Flächen, 20 dreiflächigen Ecken und 30 Kanten;

5. Icosaëder, mit 20 dreieckigen Flächen, 12 fünfflächigen Ecken und 30 Kanten; Man überzeugt sich leicht, dass dergleichen Polyëder, über die der EULER'sche Satz nur aussagt, dass ihren Bestimmungen von Seiten dieses Satzes nichts Widersprechendes nachgewiesen werden kann, wirklich existiren. Die Frage, ob es von jeder der fünf Polyëderarten auch reguläre Polyëder giebt, d. i. solche, die von regulären Flächen umschlossen werden und reguläre Ecken haben, kann nur beantwortet werden, indem man reguläre Polyëder, von den nothwendigen Bestimmungsstücken ausgehend, zu construiren sucht.

10. Das reguläre Tetraëder. Um ein reguläres Tetraëder (Tafel II, 6) mit der Kante a zu erhalten, construiren wir zunächst eine Fläche derselben, also ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Seite a ist.

Wir construiren bei A eine Ecke des regulären Tetraëders, d. i. eine dreiseitige reguläre Ecke mit dem Kantenwinkel 60°, indem wir die gleichseitigen Dreiecke ABD und ACE hinzufügen und von D und E Lothe zu AB und AC ziehen; diese Lothe sind die Geraden BE und CD; durch ihren Schnittpunkt F' geht der Grundriss der dritten Kante, dieser ist daher eine Winkelhalbirende des Dreiecks ABC. Ziehen wir $F'H \perp F'E$ und machen $GH = GE$, so ist $F'H$ die Höhe des Punktes F über der Ebene ABC.

Somit haben wir am Scheitel A eine Ecke des regulären Tetraëders und die drei an dieser Ecke liegenden Flächen ABC, ACF und ABF erhalten.

Da nun $CB = CF = FB = a$, so ist auch CBF ein gleichseitiges Dreieck, mithin sind, nach Hinzufügung der Ebene CBF, die Ecken bei B, C und F reguläre Tetraëder-Ecken, also ist $ABCF$ die Projection des gesuchten regulären Tetraëders auf eine seiner Flächen ABC.

Aus der Projection und der Höhe FH haben wir noch eine Verticalprojection $A''B''C''F''$ und eine Projection $A'''B'''C'''F'''$ auf eine Ebene entwickelt, welche die Spur NN ($\perp MM$) und den Neigungswinkel α hat. Bei letzterer hat man sich das Auge in hinlänglich grosser Entfernung von der Projectionsebene auf derselben Seite zu denken, auf welcher der projicirte Körper liegt, und den Körper selbst undurchsichtig; die Kanten, welche man dann sehen kann, sind als ununterbrochene Linien gezeichnet, die unsichtbaren als unterbrochene.

11. Das reguläre Octaëder (Tafel III, 1). An jeder Ecke des regulären Octaëders liegen vier reguläre Dreiecke; die Seiten derselben, welche nicht nach dem Scheitel der Ecke gehen, bilden ein Quadrat; dieses Quadrat sei $ABCD$, $A'B'C'D'$ sei dessen Grundriss auf einer zu $ABCD$ parallelen Projectionsebene. Wir projiciren $ABCD$ sowie alle durch die Construction gelieferten Punkte und Strecken auf eine Verticalebene durch MM und auf eine schräge Ebene, welche NN zur Spur und den Neigungswinkel α hat. Auf der Central-Normalen des Quadrats $ABCD$ haben wir den Punkt aufzusuchen, der von den Ecken des Quadrats um die Seite desselben absteht; dieser Punkt E liegt um die halbe Diagonale $E'D'$ des Quadrats über (oder unter) demselben. Wir legen Ebenen durch diesen Punkt E und durch die Seiten des Quadrats und erhalten so eine Ecke des regulären Octaëders und die an ihr liegenden Flächen EAB, EBC, ECD, EDA.

Bei A liegen nun zwei Kantenwinkel und ein Flächenwinkel einer regulären Octaëderecke, DEB sind drei Ecken eines Quadrats; verlängern wir die Centralnormale nach unten, suchen den Punkt F auf, der auf ihr so weit unterhalb $ABCD$ liegt, wie E oberhalb, so ist $DEBF$ ein Quadrat; legen wir

zwei Ebenen durch A und DF und BF, so ist damit eine reguläre Octaëderecke bei A vervóllständigt.

Bei B liegen nun drei Kantenwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel (an den Kanten BE und BA) einer regulären Octaëderecke; fügen wir die Ebene BFC hinzu, so ist die Octaëderecke vollständig.

Ebenso finden wir jetzt bei C drei Kantenwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel einer regulären Octaëderecke, die wir durch die Ebene CFD vervollständigen; durch dieselbe ist auch die Octaëderecke bei D vervollständigt worden und das Polyëder ist nun geschlossen. Auch ist bei F noch eine Ecke entstanden, die ebenso wie die bei E eine reguläre Octaëderecke ist.

Aus dieser Construction geht hervor, dass man ein reguläres Octaëder erhält, wenn man drei gleiche Gerade mit ihren Mittelpunkten so zusammenlegt, dass sie miteinander rechte Winkel bilden; die sechs Endpunkte sind dann die Ecken eines regulären Octaëders.

12. Das reguläre Hexaëder (Tafel III, 2) wird von Quadraten umschlossen, deren je drei an einer Ecke liegen. Die Ecken und Flächen an den Eckpunkten der Hexaëderfläche $ABCD$ werden daher erhalten, indem wir in $ABCD$ Lothe zur Ebene des Quadrats errichten, und $A\alpha = B\beta = C\gamma = D\delta = AB$ machen. Die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ liegen dann in einer Parallelebene zu $ABCD$ und bilden die Ecken eines Quadrats, durch welches reguläre Hexaëderecken bei α, β, γ und δ vervollständigt werden.

13. Das reguläre Dodecaëder (Tafel III, 3). In jeder Ecke des regulären Dodecaëders stossen drei reguläre Fünfecke zusammen, der Kantenwinkel der Dodecaëderecke beträgt demnach 108°; die Endpunkte der drei Kanten einer Ecke bilden ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite eine Diagonale einer Fläche des Dodecaëders ist.

Wir entwerfen in der Projectionsebene Π zunächst ein reguläres Fünfeck, das die gegebene Kante des Dodecaëders zur Seite hat.

Die dritte Kante bei A bildet mit AB und AE gleiche Winkel (108°), liegt also in der Ebene, welche durch die Halbirungslinie des Winkels BAE geht und auf der Ebene des Winkels senkrecht steht; der Grundriss dieser Kante fällt daher in die Halbirungslinie ωA des Winkels BAE. Construirt man in Π das reguläre Fünfeck $A\alpha\beta\gamma B$, so hat man dasselbe um AB zu drehen, bis der Grundriss von α in ωA liegt. Zieht man $\alpha\delta \perp AB$, so kommt nach der Drehung der Grundriss von α nach F'. Zieht man ferner $\beta\varepsilon \perp AB$ und schneidet $\beta\varepsilon$ durch $\zeta F'$, so ist G' der Grundriss von β nach der Drehung. Wir werden nachher sehen, dass $\omega F' = \omega G'$, dass also $F'G'$ die Seite des dem Kreise mit dem Halbmesser $\omega F'$ eingeschriebenen regulären Zehnecks ist. Wir bestimmen noch die Projection des fünften Eckpunkts H'. Machen wir $F'\eta \perp \delta F'$ und $\delta\eta = \delta\alpha$, sowie $G'\vartheta \perp \delta F'$, so sind $F'\eta$ und $\iota\vartheta$ die Höhen der zu F' und G' gehörenden Punkte über der Ebene $ABCDE$.

Nun liegen bei B zwei Kantenwinkel HBA, ABC, und ein Flächenwinkel (an der Kante BA) der regulären Dodecaëderecke; dieselbe wird daher durch Hinzufügung der Ebene CBH vervollständigt, und es ist $CBH = 108^\circ$. Wir ergänzen das reguläre Fünfeck, das CB und BH zu Seiten hat. — Ebenso, wie soeben die Dodecaëderecke bei B, ergänzen wir nun nacheinander die Ecken bei C und D.

Legen wir zur Ergänzung der Ecke E eine Ebene durch OE und EA, so schneidet diese die Ebene BAF und es entsteht bei A eine Ecke, welche einen

Kantenwinkel, EAB, und zwei Flächenwinkel, an AE und an AB, einer regulären Dodecaëderecke enthält, also eine reguläre Dodecaëderecke ist; es ist daher AF die dritte Kante dieser Ecke und $OEAF$ sind vier Ecken eines regulären Fünfecks, dessen fünfte P wir hinzufügen.

Wir erhalten so eine offene polyedrische Figur, bestehend aus einem regulären Fünfeck als Basis, an dessen Seiten sich reguläre Fünfecke anlegen, deren jedes mit dem nächsten, das letzte mit dem ersten, eine Seite gemein hat.

An jedem der Punkte F, H, K, M und O liegen zwei Winkel von 108°, die einen Flächenwinkel der regulären Dodecaëderecke einschliessen. Wir ergänzen diese fünf Ecken durch Hinzufügung der dritten Ebenen dieser Ecken, also durch die Ebenen PFG, GHI, IKL, LMN, NOP; je zwei benachbarte dieser fünf Ebenen schneiden sich in Kanten, die von G, I, L, N, O ausgehen, und bilden an diesen Punkten mit den schon dort vorhandenen Fünfecken dreiseitige Ecken, welche einen Kantenwinkel (z. B. FGH) und zwei Flächenwinkel (an GF und GH) einer regulären Dodecaëderecke haben; also sind diese Ecken reguläre Dodecaëderecken.

Machen wir auf den von G, I, L ausgehenden Kanten $GQ = IR = LS = AB$, so entstehen die regulären Pentagone $GHIRQ$ und $IKLSR$.

Bei R finden wir nun wieder zwei Kantenwinkel von 108°, die einen Flächenwinkel der regulären Dodecaëderecke (an RI) einschliessen; durch die Ebene QRS wird daher die Ecke R vervollständigt.

Die Ebene QRS schneide die von N und P ausgehenden Kanten in T und U.

Die Ecke S hat einen Kantenwinkel RSL und an SR und SL zwei Flächenwinkel der regulären Dodecaëderecke; also ist die Ecke S eine reguläre Dodecaëderecke und $RST = LST = 108°$. Es ist daher $LSTNM$ ein reguläres Fünfeck.

Ebenso schliessen wir, dass die bei T und dann, dass die bei U und bei Q entstandenen Ecken reguläre Dodecaëderecken sind; woraus sich dann weiter ergiebt, dass die Fünfecke $NTUPO$ und $PUQGF$ regulär sind, sowie dass die Winkel $STU = TUQ = UQR = 108°$, dass also auch $QRSTU$ ein reguläres Fünfeck ist.

Hierdurch ist der Nachweis und die Construction des regulären Dodecaëders vollendet.

Dreht man das Polyeder um die Centralnormale des Fünfecks $ABCDE$ bis A nach B gelangt (also um 72°), so kommt jede Ecke dieses Fünfecks an die Stelle der nächstfolgenden; daher gelangt auch jedes an den Seiten dieses Fünfecks liegende Fünfeck in die Lage des folgenden; damit auch jedes an GHI, IKL, LMN, NOP, PFG anliegende Fünfeck in die Lage des folgenden; also endlich auch jede Ecke des Fünfecks $QRSTU$ an die Stelle des folgenden. Es sind daher die Fünfecke $ABCDE$ und $QRSTU$ parallel und haben dieselbe Centralnormale.

Hieraus folgt weiter, dass die Projectionen $G'Q'$, $I'R'$, $L'S'$, $N'T'$, $P'U'$ die Winkel des Fünfecks $Q'R'S'T'U'$ halbiren, also durch ω gehen; dass die Projectionen der an $QRSTU$ liegenden Fünfecke congruent denen der an $ABCDE$ liegenden Fünfecke sind; dass die Punkte F, G, H, I, K, L, M, N, O, P von ω gleichen Abstand haben; und endlich, dass der Abstand der Punkte F, H, K, M, O von der Ebene $ABCDE$ gleich dem Abstande der Punkte G, I, L, N, P von der Ebene $QRSTU$ ist.

Aus diesen Angaben lassen sich Projectionen auf verticale oder schräge Ebenen leicht construiren.

14. Das reguläre Icosaëder (Tafel III, 4). Eine Ecke des regulären Icosaëders wird erhalten, indem wir in einer Ebene parallel zur Projectionsebene ein reguläres Fünfeck $ABCDE$ construiren, das die Kante des Icosaëders zur Seite hat. Machen wir $\omega\alpha \perp \omega A'$ und $A'\alpha = AE$, so ist $\omega\alpha$ die Strecke, um welche der Scheitel der Icosaëderecke, deren Kanten durch die Punkte $ABCDE$ gehen, von der Ebene $ABCDE$ entfernt ist. Wir wählen noch eine zweite Projectionsebene Π_2 normal zu $B'E'$ und erhalten als zweite Projection der Icosaëderecke die Figur $\omega''A''B''C''$.

Bei A liegen zwei Kantenwinkel und ein Flächenwinkel der regulären Icosaëderecke; wir fügen zu den Ecken B, ω, E eines regulären Fünfecks die noch fehlenden Ecken F und G hinzu und ergänzen dadurch bei A eine reguläre Icosaëderecke. Die Ebene des Fünfecks $B\omega EFG$ ist normal zu Π_2, seine Projection auf Π_2 also die Gerade $\omega''B''$.

Die Fünfecke $ABCDE$ und $B\omega EFG$ sind congruent und haben die Gerade BE gemein; es ist daher $B''A'' = B''\omega''$, und machen wir $B''G'' = B''C''$, so ist G'' der Aufriss von G und F; die Grundrisse G' und F' liegen in den Geraden, welche durch C' und D' normal zu $B'E'$ gelegt werden.

G hat gleiche Abstände von B und A, folglich liegt G auf der normalhalbirenden Ebene von AB, und G' auf der Normalhalbirenden von $A'B'$, die zugleich Halbirende des Winkels $A'\omega B'$ ist.

Aehnlich ergänzen wir nun der Reihe nach die regulären Icosaëderecken bei B, C, D und E und erhalten dabei die Punkte H, I, K, deren Grundrisse auf den Halbirenden der Winkel $B'\omega C'$, $C'\omega D'$, $D'\omega E'$ liegen und von ω denselben Abstand haben, wie F' und G'.

Drehen wir das Fünfeck $ABCDE$ um die Centralnormale um 72°, so kommt jede der Icosaëderecken bei A, B, C, D, E mit der nächsten zur Deckung, mithin kommt jeder der fünf Punkte $FGHIK$ in die Lage des nächstfolgenden. Hieraus folgt, dass $FGHIK$ ein reguläres Fünfeck ist; da $FG = AB$, so sind die Fünfecke $FGHIK$ und $ABCDE$ congruent; es ist also auch $\omega G' = \omega A'$ und die Punkte $A'G'B'H'C'I'D'K'E'F'$ sind die Ecken eines regulären Zehnecks.

Bei F liegen jetzt drei Kantenwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel (an FA und FE) einer regulären Icosaëderecke; $GAEK$ sind daher vier Ecken eines regulären Fünfecks; wir ergänzen dasselbe durch Hinzufügung der fünften Ecke L und vervollständigen dadurch die Ecke F. Es wird sich nachher zeigen, dass der Grundriss von L mit ω zusammenfällt.

Bei G liegen nun vier Kantenwinkel und die von ihnen eingeschlossenen Flächenwinkel einer regulären Icosaëderecke; $LHBAF$ ist daher ein regelmässiges Fünfeck und die Ecke G wird durch Hinzufügung der Ebene HGL vervollständigt.

In gleicher Weise vervollständigen wir durch die Ebene LHI die Ecke bei H Dann bleibt noch eine Lücke LIK; fügen wir die Ebene LIK hinzu, so schliessen wir das Polyëder und vervollständigen zugleich bei I und K reguläre Icosaëderecken. Dabei ist nun die fünfseitige Ecke L entstanden; da die Kanten durch die Eckpunkte des regulären Fünfecks $FGHIK$ gehen und gleich der Seite desselben sind, so ist die Ecke L ebenfalls eine reguläre Icosaëderecke, also das erhaltene Polyëder in der That ein reguläres Icosaëder.

Da die Ecke L regulär ist, so liegt L auf der Centralnormalen von $FGHIK$

die zugleich Centralnormale von $ABCDE$ ist; also fällt der Grundriss von L mit ω zusammen*).

§ 7. Das Prisma und die Pyramide.

1. Projicirt man ein gerades Prisma (Tafel IV, 1) auf die Basis, so sind die Ecken der Basis die Projectionen der Längskanten, und die Seiten der Basis die Projectionen der Seitenflächen. Auf eine zur Basis senkrechte Ebene projiciren sich Basis und Endfläche als parallele Gerade, die Längskanten in ihrer wahren Länge als Normale zu den Projectionen von Basis und Endfläche.

Wird das gerade Prisma, dessen Basis $ABCDE$ in der Horizontalebene liegt und das die Höhe $A''\alpha''$ hat, von einer Ebene geschnitten, deren Spuren E_1 und E_2 sind, so projiciren wir das Prisma am einfachsten auf eine Verticalebene normal zu E_1. Wir erhalten dadurch die Höhen der Punkte, in denen die Längskanten von der Ebene E geschnitten werden und können mit derselben jede andere Verticalprojection des geschnittenen Prisma construiren.

Um die Seitenflächen des Prisma in die Projectionsebene auszubreiten (das Netz des Prisma zu entwickeln), denken wir uns die Oberfläche entlang einer Längskante, etwa $A\alpha$, aufgeschnitten, und Basis und Endfläche abgelöst. Legen wir nun eine Seitenfläche $AB\beta\alpha$ in die Projectionsebene und drehen wir die andern um die Längskanten, bis sie auch in die Projectionsebene fallen, so sind auch jetzt noch die Längskanten parallel; da nun die einzelnen Seitenflächen Rechtecke sind, so setzen sich alle ausgebreiteten Seitenflächen zu einem Rechtecke zusammen, dessen Breite die Längskante des Prisma, dessen Länge der Perimeter der Basis ist.

Man erhält also die Ausbreitung der Seitenflächen, wenn man auf einer Geraden Strecken A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0, D_0E_0, E_0A_0 abträgt, die der Reihe nach den Seiten der Prismenbasis $ABCDE$ gleich sind, durch die Punkte $A_0 \ldots E_0$ Normalen zu A_0A_0 zieht, und diese durch eine Parallele zu A_0A_0 begrenzt, die von ihnen die Längskante abschneidet.

Trägt man auf den Längskanten des Netzes von A_0A_0 aus der Reihe nach die Strecke jeder Längskante ab, die unterhalb der Ebene E liegt, so wird das Netz des durch E abgeschnittenen Prismenstumpfes erhalten.

Bestimmt man die Umlegung der Schnittfläche, hängt dieselbe in passender Weise an eine Seite der Ausbreitung der Schnittfigur und hängt ebenso die Basis und Endfläche an den Perimeter A_0A_0 bez. $\alpha_0\alpha_0$, so ist die ganze Oberfläche des Prisma und des Prismenstumpfes ausgebreitet.

2. Ein schiefes Prisma (Tafel IV, 2) ist durch die Basis, die Projection einer Kante auf die Basis und die Höhe bestimmt. Das in der Projectionsebene liegende Fünfeck $ABCDE$ sei die Basis eines Prisma und $A\alpha'$ die Projection einer Längskante, so entsteht der Grundriss des ganzen Prisma, wenn wir $B\beta' = C\gamma' = D\delta' = E\varepsilon'$ parallel und gleich $A\alpha'$ machen.

Wir projiciren das Prisma auf einer Verticalebene Π_2, die den Längskanten parallel ist, deren Spur MM also parallel $A\alpha'$ ist, und verwenden dabei die gegebene Höhe $a\alpha'$ des Prisma. Wir legen eine Normalschnittebene durch A und wollen den Normalschnitt des Prisma projiciren und umlegen. Die Horizontal-

*) In der Figur ist in Rücksicht auf die Raumvertheilung die Umlegung der Projection des Icosaëders auf die schräg zur ersten Projectionsebene gestellte Projectionsebene um eine geeignete Strecke an die erste Projection herangerückt worden.

spur AA'' desselben geht durch A normal zu MM, und die Spur auf Π_2, die zugleich die zweite Projection der Schnittebene ist, geht durch A'' normal zu $A''\alpha''$. Ist dies die Gerade $A''H''$, so sind $A''F''G''H''I''$ die zweiten Projectionen der Ebene des Normalschnitts und $F''B''$, $G''C''$, $H''D''$, $I''E''$ sind die Kantenlängen zwischen der Basis und dem Normalschnitte. Aus der zweiten Projection ergiebt sich der Grundriss und die Umlegung $A_0F_0G_0H_0I_0$ des Normalschnitts; letztere ist, um nicht zu viel Linien zusammenzudrängen, um ein passendes Stück parallel verschoben worden.

Wird das Prisma von einer zweiten Ebene geschnitten, deren Spur PP und Neigungswinkel ψ gegeben sind, so projiciren wir das Prisma auf eine Verticalebene Π_3 normal zu PP; ihre Spur sei NN. Wir erhalten so die dritten Projectionen der Punkte der Schnittfigur, und können hieraus die ersten und zweiten ableiten, sowie die Umlegung der Schnittfigur (die ebenfalls parallel verschoben worden ist) und erhalten aus der zweiten Projection noch die Kantenlängen zwischen der Basis und der zweiten Schnittebene.

Schneiden wir die Seitenfläche des Prisma entlang einer Prismenkante auf und drehen die Seitenflächen um die Kanten, bis sie in eine Ebene fallen, so breitet sich der Perimeter des Normalschnitts zu einer Geraden aus, auf welcher die Längskanten normal stehen. Um das Netz des Prisma zu erhalten, haben wir daher auf einer Geraden Strecken af, fg, gh, hi, ia aufzutragen, die der Reihe nach den Seiten des Normalschnitts $A_0F_0G_0H_0I_0$ gleich sind, und durch $afghia$ Normale zu aa zu ziehen.

Auf denselben tragen wir auf $fb = F''B''$, $gc = G''C''$, $hd = H''D''$, $ie = I''E''$ und machen $a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon = A''\alpha''$, so haben wir die Ausbreitung der Seitenflächen; zur Vervollständigung des Netzes fügen wir in passender Weise noch Basis und Endfläche hinzu.

Mit Hülfe der aus der zweiten Projection zu entnehmenden Kantenabschnitte können wir noch die zweite, schräge Schnittfläche in das Netz eintragen und an den ausgebreiteten Perimeter derselben die Umlegung der Schnittfigur hängen.

3. Eine Pyramide (Tafel IV, 3) ist durch die Basis, die Projection der Spitze auf die Basis und die Höhe bestimmt.

Das in der Projectionsebene liegende Sechseck $ABCDEF$ sei die Basis einer Pyramide, S' die Projection der Spitze, und ausserdem sei die Höhe gegeben.

Aus Grundriss und Höhe erhalten wir die Projection $S''A''B''C''D''E''F''$ auf eine beliebige Verticalebene Π_2.

Um den Schnitt der Pyramide mit der Ebene E zu erhalten, die die Spur TT und Neigungswinkel α hat, projiciren wir die Pyramide auf eine Verticalebene Π_3 normal zu TT und erhalten so die Projectionen der Schnittpunkte der Pyramidenkanten mit E; hieraus ergeben sich der Grundriss $G'H'I'K'L'M'$ und der Aufriss $G''H''I''K''L''M''$ der Schnittfigur, sowie die Umlegung $G_0H_0I_0K_0L_0M_0$.

Zerschneiden wir den Pyramidenmantel längs einer Polkante und drehen die Seitenflächen um die Polkanten, bis sie in einer Ebene liegen, so erhalten wir sechs Dreiecke, die die Spitze (S) gemein haben. Um diese Dreiecke construiren zu können, müssen wir die Kanten bestimmen. Diese sind die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, welche die Höhe der Pyramide als gemeinsame Kathete und ausserdem noch die Katheten $S'A$, $S'B$, $S'C$, $S'D$, $S'E$, $S'F$ haben. Machen wir daher $\Sigma\mu$ gleich der Pyramidenhöhe und $\mu a = S'A$, $\mu b = S'B$,

$\mu c = S'C$, $\mu d = S'D$, $\mu e = S'E$, $\mu f = S'F$ so sind Σa, Σb, Σc, Σd, Σe, Σf, der Reihe nach gleich den Polkanten SA, SB, SC, SD, SE, SF der Pyramide. Bestimmen wir auf den Graden Σa, Σb etc. die Punkte g, h, i, k, l, m, so, dass sie dieselben Höhen über $D''d$ haben, wie die entsprechenden Punkte G'', H'', F'', K'', $L''M''$, so sind ag, bh, ci, dk, el, fm die Kantenlängen der Pyramide, welche zwischen der Basis und der Schnittebene liegen.

Construiren wir nun $\Sigma_0 a_0 = \Sigma a$, $\Sigma_0 b_0 = \Sigma b$, $\Sigma_0 c_0 = \Sigma c$, $\Sigma_0 d_0 = \Sigma d$, $\Sigma_0 e_0 = \Sigma e$, $\Sigma_0 f_0 = f$, und $a_0 b_0 = AB$, $b_0 c_0 = BC$, $c_0 d_0 = CD$, $d_0 e_0 = DE$, $e_0 f_0 = EF$, $f_0 a_0 = FA$, so ist $\Sigma_0 a_0 b_0 c_0 d_0 e_0 f_0 a_0$ die Ausbreitung der Seitenflächen der Pyramide; durch passendes Anhängen der Grundfläche wird das Netz vervollständigt.

Machen wir $a_0 g_0 = ag$, $b_0 h_0 = bh$, $c_0 i_0 = ci$, $d_0 k_0 = dk$, $e_0 l_0 = el$, $f_0 m_0 = fm$, und hängen an den Perimeter $g_0 h_0 i_0 k_0 l_0 m_0$ die Umlegung $G_0 H_0 I_0 K_0 L_0 M_0$, so haben wir damit auch das Netz des von E abgeschnittenen Pyramidenstumpfes hergestellt.

4. Wir wollen zwei Polyëder A und B in eine solche gegenseitige Lage bringen, dass sie einen Theil C des Raumes gemein haben, sich also durchdringen. Dann kann der Fall eintreten, dass das eine Polyëder, z. B. A, in drei getrennte Theile zerfällt, nämlich in den beiden Polyëdern gemeinsamen Theil C und beiderseit an C anliegende von einander völlig getrennte Theile D und E. Die gebrochene Schnittfigur der beiden Polyëder besteht dann aus zwei vollständig getrennten Zügen; der eine Zug bildet die Grenze zwischen C und D, der andere die zwischen C und E.

Das Polyëder B wird dabei im Allgemeinen nur in zwei getrennte Theile zerlegt, deren einer der gemeinsame Theil C ist. Entfernt man denselben, so erscheint das Polyëder B durchbohrt; einige Kanten und Flächen sind völlig unterbrochen, an einigen Flächen fehlen nur zwei- oder mehrseitige Ausschnitte, einige Kanten und unter Umständen auch einige Flächen sind ganz unverletzt.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass jedes der beiden Polyëder nur in zwei getrennte Theile zerfällt, deren einer der gemeinsame Theil C ist. Die Linie, in der sich die Polyëder durchdringen, bildet dann nur einen Zug, nämlich die zusammenhängende Grenze des Theiles C und des übrigen Theiles von A bez. von B.

Ausser den Kanten und Flächen in beiden Polyëdern, die vollständig unterbrochen sind, giebt es dann in A und B auch unverletzte Kanten und Flächen, von denen nur Ausschnitte fehlen, unter Umständen kann es auch ganz unverletzte Flächen geben. Ausser diesen beiden Fällen werden wir noch Durchdringungen kennen lernen, welche als Grenzfälle zwischen den soeben charakterisirten liegen.

Wir wollen uns auf die Untersuchung von vier Beispielen beschränken, und construiren 1. die Durchdringung zweier Prismen; 2. die Durchdringung eines Prisma und einer Pyramide; 3. die Durchdringung zweier Pyramiden; während für diese Fälle aus der Natur der sich durchdringenden Polyëder besondere Constructionsweisen sich ergeben, wollen wir schliesslich 4. die Durchdringung zweier Tetraëder nach einer Methode construiren, die bei allen Durchdringungsaufgaben anwendbar ist.

5. Durchdringung des vierseitigen Prisma $ABCD\alpha\beta\gamma\delta$ (I) und des dreiseitigen $LMN\lambda\mu\nu$ (II) (Tafel V).

Die Durchdringung zweier Prismen I und II wird am einfachsten erhalten, indem man durch die Kanten des einen Prisma I Ebenen legt, die

mit den Kanten des anderen parallel sind; diese Ebenen schneiden die Flächen der Prisma II in Graden, die mit den Kanten von II parallel sind, und diese Schnittlinien treffen die betreffende Kante von I in den Punkten, in welchen sie in das Prisma II ein- und aus ihm austritt.

Wir legen daher durch den auf $A\alpha$ gelegenen Punkt E eine zu $L\lambda$ parallele Grade und bestimmen deren Horizontalspur F; dann ist AF die Horizontalspur der Ebene AEF, also einer Ebene, die zu den Kanten beider Prismen parallel ist.

Hierauf bestimmen wir die Horizontalspuren G, H, I der Prismenkanten $L\lambda$, $M\mu$, $N\nu$; dann ist das Dreieck GHI der Schnitt des dreiseitigen Prisma und der Horizontalebene.

Ziehen wir $HK \parallel AF$, so ist HK die Spur der durch $N\nu$ parallel $A\alpha$ gelegten Ebene; die Schnitte derselben mit den Ebenen $D\delta\alpha A$ und $D\delta\gamma C$ sind daher die durch K und O gelegten Parallelen zu $A\alpha$. Die Schnitte a und b dieser Parallelen mit $N\nu$ sind die Schnittpunkte von $N\nu$ und den an $D\delta$ liegenden Ebenen des I. Prisma. Ziehen wir $IP \parallel AF$, und $Pc' \parallel Ad' \parallel A\alpha'_1$, so sind c und d' die Grundrisse der Punkte, in denen $M\mu$ die an $D\delta$ liegenden Ebenen des I. Prisma schneidet.

Es ist demnach ac der Schnitt der Parallelogramme $DA\alpha\delta$ und $NM\mu\nu$, und bd ist der Schnitt von $NM\mu\nu$ mit $D\delta\gamma C$.

Wir ziehen ferner $GS \parallel AF$ und $Re' \parallel Sf' \parallel A\alpha'$ und erhalten so die Grundrisse der Punkte e und f, in welchen die Kante $L\lambda$ die Ebenen $D\delta\gamma C$ und $A\alpha\beta B$ durchschneidet.

Die Ebene $D\delta\gamma C$ wird daher von den Ebenen $M\mu\lambda L$ und $N\nu\lambda L$ in den Graden de und be geschnitten, und das Dreieck bde ist der Schnitt des II. Prisma mit der Seite $D\delta\gamma C$ des I. Prisma.

Die Durchdringungslinie beider Prismen besteht also hier aus zwei getrennten Zügen, deren einer bde ist, während die Grade ac und der Punkt f zum andern Zuge gehören.

Vom Schnitt der Ebenen $BA\beta\alpha$ und $NL\lambda\nu$ haben wir bereits einen Punkt f; um einen zweiten zu erhalten, schneiden wir mit HK durch die Grade BA und ziehen $Tg' \parallel A\alpha'$. Dann ist gf die gesuchte Schnittlinie und daher h der Schnittpunkt der Kante $A\alpha$ und der Ebene $NL\lambda\nu$, und ha die Schnittlinie der Parallelogramme $NL\lambda\nu$ und $AD\delta\alpha$.

Vom Schnitt der Ebenen $AD\delta\alpha$ und $LM\mu\nu$ haben wir den Punkt c, ein zweiter, nämlich der Schnitt von $L\lambda$ mit der Ebene $AD\delta\alpha$, wird erhalten, indem wir mit GS die Grade DA durchschneiden und $Ui \parallel A\alpha'$ ziehen. Dann ist ic die gesuchte Schnittlinie; mithin k der Schnitt von $A\alpha$ und der Ebene $LM\mu\lambda$ und kc und kf sind die Schnittlinien des Parallelogramms $ML\lambda\mu$ mit den Parарallelogrammen $DA\alpha\delta$ und $AB\beta\alpha$.

Das unebene Vieleck $a'c'k'f'h'$ ist daher der zweite Zug der Durchdringungslinie.

Aus dem Grundriss entwickelt man den Aufriss der Durchdringungsfigur.

In der Figur sind die Theile der Kanten jedes Prisma, die im Innern des andern liegen, weggelassen worden; alle Constructionslinien, die nicht Prismenkanten sind und nicht zur Durchdringungsfigur gehören, sind als schwache ununterbrochene oder unterbrochene Striche gezeichnet.

Die Prismenkanten und die Kanten der Durchdringungsfigur, die man von einem unendlich fernen Punkte oberhalb der Horizontalebene bez. vor der Verticalebene

sehen kann, zeigen sich im Grundriss, bez. Aufriss als stärkere unterbrochene Linien, die unsichtbaren als stärkere unterbrochene Linien.

Um zu entscheiden, ob ein Punkt X' im Grundrisse sichtbar oder verdeckt ist, legt man durch X eine verticale Gerade und bestimmt die Punkte, in welchen diese Gerade die Seitenflächen der Figur schneidet; X' ist sichtbar, wenn X höher liegt als diese Schnittpunkte. Es ist selbstverständlich, dass der äusserste Umriss der Projection einer Figur immer sichtbar ist. Ferner bemerke man, dass alle von einem unsichtbaren Punkte ausgehenden Kanten in der Nähe dieses Punktes unsichtbar sind, während sie in einiger Entfernung davon sichtbar werden können, wie z. B. die von B ausgehenden Kanten im Grundriss unserer Figur. Die von einem sichtbaren Punkte ausgehenden Kanten können auch in der Nähe des Punktes unsichtbar sein, wie z. B. die von γ' ausgehende Kante $\gamma' C$ des Grundrisses.

Um die Netze der beiden Prismen zu erhalten, projiciren wir jedes Prisma auf eine Verticalebene, die den Kanten parallel ist, und bestimmen die Umlegung des Normalschnitts; es ist hierzu nicht nöthig, den Grundriss des Normalschnitts aufzusuchen, man wird dies vielmehr gern unterlassen, da sonst der Grundriss der Figur mit Linien zu sehr angefüllt wird.

Wir bestimmen noch die dritten Projectionen der zu den Kanten parallelen Geraden Ka, Ob, Pc, Qd, Re, Sf, die zugleich die wahren Längen dieser Geraden sind; suchen im Normalschnitt die Punkte auf, in welchen er von diesen Geraden geschnitten wird ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$) und können mit Hülfe dieser Punkte und mit Hülfe der aus der dritten Projection zu entnehmenden Strecken $\mathfrak{a}a$, $\mathfrak{b}b$, $\mathfrak{c}c$, $\mathfrak{d}d$, $\mathfrak{e}e$, $\mathfrak{f}f$ die Durchdringungsfigur in das Netz des 1. Prisma eintragen.

Um in das Netz des 2. Prisma die Durchdringungsfigur eintragen zu können, haben wir durch k und h Parallele zu $L\lambda$ zu legen, deren Projection auf die zu $L\lambda$ parallele Verticalebene zu bestimmen und die Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Normalschnitt des 2. Prisma in die Umlegung des Normalschnittes einzutragen.

Wer zum ersten Male eine Durchdringungsaufgabe löst und Mühe hat, sich beim Anblick der Projectionen die räumliche Figur deutlich vorzustellen, der wird gut thun, die Netze der beiden Prismen nebst den Durchdringungsfiguren auf Kartenpapier zu zeichnen. Das Netz des 2. Prisma bleibt in unserem Falle unverletzt, im 1. Prisma schneidet man das Fünfeck $ackfh$ und das Dreieck bde aus, schneidet dann die beiden Netze aus und kann nun das Modell jedes Prisma herstellen, indem man das Netz entlang jeder Seitenkante geeignet umbricht und die beim Herstellen des Netzes durch Zerschneiden getrennten Ränder wieder passend vereinigt.

Steckt man schliesslich das Modell des 2. Prisma durch die Lücke im 1. Prisma, so erhält man ein Modell der Durchdringungsfigur, aus dessen genauem Anblick man auch für die Construction der folgenden Durchdringungsaufgaben und anderer verwandter Figuren Nutzen ziehen wird.

6. Durchdringung der fünfseitigen Pyramide $ABCDEF$ mit einem vierseitigen Prisma.

Das vierseitige Prisma wollen wir uns als Prisma im weitern Sinne des Wortes, d. i. als die Raumfigur denken, die von vier Streifen umschlossen wird, von denen jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten eine Kante gemein hat; aus einem solchen Prisma wird durch irgend zwei parallele Ebenen, die die Längskanten schneiden, ein allseitig begrenztes Prisma (im engeren Sinne) ausgeschnitten.

Ein unbegrenztes vielseitiges Prisma ist durch Grund- und Aufriss seiner (Längs-)Kanten bestimmt; um es deutlicher zur Anschauung zu bringen, wollen wir seinen Durchschnitt mit der Horizontalebene angeben, indem wir die Horizontalspuren der Prismenkanten aufsuchen und der Reihe nach verbinden; ferner wollen wir in passender Entfernung von der Pyramide das Prisma durch eine verticale Ebene schneiden, deren Grundriss normal zum Grundriss der Prismenkanten gewählt werden mag. Wir schneiden dadurch aus dem Prisma den prismatischen Abschnitt $GHIKLMNO$ aus (Tafel VI, 1).

Um die Punkte der Durchdringungsfigur einer Pyramide mit einem Prisma zu erhalten, legen wir am einfachsten Ebenen durch die Spitze der Pyramide und durch die Kanten des Prisma. Jede solche Ebene schneidet jede Seitenfläche der Pyramide in einer Geraden, die nach der Spitze geht; der Schnitt dieser Geraden mit der betreffenden Prismenkante ist der Schnitt dieser Kante mit der betreffenden Seitenfläche der Pyramide.

Die Ebenen, welche durch F und die Kanten des Prisma gelegt werden, gehen alle durch die durch F gezogene Parallele zu den Prismenkanten; P sei Horizontalspur dieser Parallelen.

Die Horizontalspur der Ebene FGL ist die Gerade PG; die Ebene FGL schneidet daher die Pyramidenflächen FCB und FDE in den Geraden FQ und FR; von diesen erhält man zunächst die Grundrisse $F'Q$ und $F'R$ und hieraus kann man die Aufrisse ableiten. Der Schnitt a' von $F'Q$ und GL' ist der Grundriss des Punktes, in welchem die Ebene FCB von der Kante GL geschnitten wird; und der Schnitt von $F''Q$ und $G''L''$ giebt den Aufriss a'' desselben Schnittpunktes.

Es genügt im Allgemeinen, den Grundriss a' als Schnitt von $F'Q$ und GL' zu construiren und dann a'' als den zu a' gehörigen Punkt der Geraden $G''L''$ zu bestimmen; in dem Falle aber, dass $F'Q$ und GL' sich unter einem zu kleinen Winkel schneiden, so dass ihr Schnittpunkt sich nicht mit genügender Genauigkeit angeben lässt, wird man auch $F''Q''$ zeichnen, um zunächst für a'' und daraus auch für a' eine genauere Bestimmung zu erhalten.

Im Folgenden wird, wie es auch bei der vorigen Construction geschah, die Construction an der Pyramide und dem Prisma selbst entwickelt und weiter keine Rücksicht darauf genommen werden, ob man von nun an den Grundriss allein zur Herstellung der Grundrisse aller nöthigen Punkte der Durchdringungsfigur benutzt, und nachher den Aufriss entwickelt, oder ob man zur genauern Bestimmung einzelner Punkte erst den Aufriss, und dann den Grundriss aufsucht.

Wir legen nun eine Ebene durch F und die Prismenkante KO. Die Horizontalspur dieser Ebene ist PK; daher werden die Pyramidenflächen FCB und FDE von der Ebene FKO in den Geraden SF und TF, also von der Kante KO in den Punkten c und d geschnitten.

Die Dreiecke FCB und FDE schneiden also das Trapez $GLOK$ in den Geraden ac und bd.

Von den Schnitten derselben Dreiecke mit dem Trapez $OKIN$ haben wir je einen Punkt, c und d; noch einen Punkt jeder der beiden Schnittlinien erhalten wir, wenn wir den Schnitt der Kante IN mit den beiden Dreiecksebenen aufsuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir PI, schneiden damit durch die Verlängerungen von CB und DE und verbinden die Schnittpunkte mit F; dann sind e und f die Schnittpunkte von FCB und FDE mit IN, und mithin g und h die Schnittpunkte der Pyramidenkanten FB und FE mit der Prismenfläche $KINO$.

Wir verbinden nun *V* und *U* mit *F* und erhalten so die Schnittpunkte *k* und *i* der Kante *IN* mit den Ebenen *FBA* und *FAE*.

Das Trapez *OKIN* schneidet die Pyramide in den beiden gebrochenen Linien *cgi* und *dhk*.

Durch die Geraden *PH*, *FY* und *FZ* erhalten wir die Schnittpunkte *l* und *m* der Kante *HM* mit den Pyramidenflächen *FBC* und *FAE*. Wir ziehen *la* und erhalten so den Schnitt des Trapezes *GHML* und des Dreiecks *FBC*, so wie den Schnittpunkt *n* dieses Trapezes mit der Pyramidenkante *FB*.

Um nun den Schnitt des Dreiecks *FAE* und des Trapezes *GHML*, von dem wir schon einen Punkt *m* besitzen, zu erhalten, suchen wir den Schnitt der Kante *GL* und des Dreiecks *FAE* auf, indem wir mit *PG* durch *AE* schneiden und Z_1 mit *F* verbinden; dann ist *p* der gesuchte Schnittpunkt, und *pm* die gesuchte Schnittlinie. Die Schnitte *o* und *q* derselben mit den Kanten *FA* und *FE* sind die Punkte, in welchen *FA* und *FE* die Ebene *HGLM* durchdringen, und *oq* ist die Schnittlinie des Dreiecks *FAE* und des Trapezes *HGLM*.

Die gebrochene Linie *anoqb* ist daher der Schnitt des Trapezes *GHML* mit der Pyramide.

Die Punkte *k* und *m* sind die Schnitte von *IN* und *HM* mit der Ebene *FAE*, mithin ist *km* die Schnittlinie von *FAE* und *IHMN*, und *r* der Schnitt desselben Trapezes mit der Pyramidenkante *FA*. Daraus ergiebt sich endlich noch *ri* als Schnitt des Trapezes *HINM* und des Dreiecks *FAB*.

Die Pyramide und das Prisma scheiden sich also längs des einfachen Zuges *anoqbdhkrigc*. Die Pyramidenfläche *FCD* und die Prismenkante *HM* bleiben dabei unverletzt.

Zur Eintragung der Durchdringungsfigur in das Netz der Pyramiden bemerken wir Folgendes: Hat man nach Tafel IV, 3 die wahren Längen der Pyramidenkanten hergestellt, so erhält man die auf den Pyramidenkanten liegenden Punkte der Durchdringungsfigur ganz so, wie dort die Punkte *g*, *h*, *i* etc. des Netzes. Um einen Punkt der Durchdringungsfigur, der nicht auf einer Pyramidenkante liegt, in das Netz einzutragen, z. B. den Punkt *a*, tragen wir zunächst *FQ* mit Hülfe des Punktes *Q* in das Netz ein. Hierauf theilen wir F_0Q_0 des Netzes im Verhältniss $F'a' : a'Q$; der Theilpunkt ist der zu *a* gehörige Netzpunkt a_0.

7. Durchdringung zweier Ecken.

Die Durchdringung zweier Ecken wird am einfachsten gefunden, indem man Ebenen durch den Scheitel der einen Ecke I und die Kanten α, β, etc. der andern Ecke legt. Diese Ebenen gehen alle durch die Gerade, welche die Scheitel beider Ecken verbindet, ihre Horizontalspuren gehen also durch die Horizontalspur dieser Geraden, und ausserdem durch die Horizontalspuren von α, β, etc. Jede solche Ebene schneidet eine Seitenfläche von I in einer Geraden, und der Schnitt dieser Geraden mit der betreffenden Kante der anderen Ecke ist der Schnitt der Seitenfläche von I mit dieser Kante.

Wir wählen als Beispiel die Durchdringung einer fünfseitigen und einer vierseitigen Ecke (Tafel VI, 2). Wir schneiden die erstere durch die Horizontalebene und erhalten dadurch eine fünfseitige Pyramide *ABCDEF*. Hierauf bestimmen wir die Horizontalspur *M* der Geraden *FL*, sowie die Horizontalspuren *MG*, MH_0, MI_0, MK_0 der Ebenen *FLG*, *FLH*, *FLI*, *FLK*. Die Spur *MG* der Ebene *FLG* schneidet die Dreiecke *FAE* und *FBC* in den Geraden *PF* und *QF*; mithin sind *a* und *b* die Schnitte der Kante *LG* mit den Dreiecken *FAE* und *FBC*.

Die Ebene *FLH* hat die Spur MH_0 und schneidet daher dieselben beiden Dreiecke in den Geraden *FN* und *FO*; es sind somit *c* und *d* die Schnitte dieser beiden Dreiecke mit der Kante *LH*.

Hieraus ergeben sich *ac* und *bd* als Schnittlinien der Dreiecke *FAE* und *FBC* mit dem Winkel *GLH*.

Durch die Spur MK_0 der Ebene *FLK* und die Geraden *RF* und *SF* ergeben sich die Schnittpunkte *g* und *h* der Kante *LK* mit den Dreiecken *FDE* und *FDC*.

Die Geraden MI_0, *TF* und *VF* ergeben die Schnittpunkte *e* und *i* der Dreiecke *FEA* und *FDC* mit der Kante *LI*.

Hieraus folgt *hi* als Schnitt von *FDC* und *LIK*, und *ec* als Schnitt von *FEA* und *LHI*.

Vom Schnitte der Ebenen *FBC* und *LIH* haben wir bereits den Punkt *d*; den Punkt *f*, in welchem *FBC* von *LI* geschnitten wird, erhalten wir, indem wir *LI* durch *FV* schneiden; es ist daher *df* der Schnitt der beiden Ebenen *FBC* und *LIH*, sowie ferner *kf* der Schnitt von *FBC* und *KLI*.

Den Schnitt *l* von *LG* mit der Ebene *FDC* erhalten wir, indem wir *DC* durch *MG* und *FW* durch *LG* schneiden. Damit haben wir den Schnitt *hm* von *FDC* und *LKG*, sowie den Schnitt *bm* von *LKG* und *FBC* gefunden.

Das unebene Polygon *hkfdbm* ist ein Zug der Durchdringungsfigur der beiden Ecken.

Von dem andern Zuge haben wir bereits zwei Seiten *ac* und *ce*.

Um den Schnitt der Ebenen *LIK* und *FEA* zu erhalten, bestimmen wir den Schnitt von *LK* mit *FEA*, indem wir mit *MK* die Verlängerung von *AE* durchschneiden und den Schnittpunkt *H* mit *F* verbinden; dann ist *ne* die gesuchte Schnittlinie und *o* der Schnitt von *FE* und *LKI*.

Dies ergiebt weiter *og* als Schnitt der Dreiecke *FDE* und *LIK*. Verbinden wir *n* mit *a*, so erhalten wir den Schnitt der Ebenen *LGK* und *FEA* und *p* als Schnitt der Kante *FE* mit der Ebene *LGK*.

Ziehen wir noch *pg*, so ist nun auch der zweite Zug *aceogp* der Durchdringungsfigur vollendet.

Ueber die Herstellung der Netze gilt dasselbe, was bei der vorigen Aufgabe über die Construction des Pyramidennetzes bemerkt worden ist.

8. Durchdringung zweier Tetraëder (Tafel VII). Bei der Construction der Durchdringung der beiden Tetraëder *ABCD* und *EFGH* wollen wir eine Methode anwenden, die in jedem Falle zum Ziele führt, wo es sich um Durchdringung zweier Polyëder handelt.

Wir bestimmen in passender Reihenfolge die Punkte, in denen die Kanten jedes der Polyëder die Oberfläche des andern durchdringen.

Wir benutzen dazu die Verticalebenen, welche durch die Kanten jedes Tetraëders gelegt werden; dieselben sollen in Kürze mit den kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden, welche im Grundriss an die Kanten geschrieben sind.

Um den Schnitt von *FG* und der Ebene *ABC* zu erhalten, suchen wir die Schnittlinie der Ebenen *α* und *ABC* auf; der Schnittpunkt derselben mit *FG* ist der Schnitt von *FG* und *ABC*.

Die Ebene *α* schneidet *AC* und *BC* in Punkten, deren Grundrisse *I'* und *K'* sind; hieraus ergiebt sich der Aufriss *I''K''* der Schnittlinie und der Aufriss *a''* des Schnittpunktes, und aus diesem *a'*.

Der Schnitt b von GH und ACB wird gefunden, indem wir den Aufriss des Schnittes der Ebene β mit den Kanten AC und BC aus dem Grundriss $N'O'$ bestimmen, und $G''H''$ mit $N''O''$ durchschneiden.

Dies ergiebt ab als Schnittlinie der Dreiecke FGH und ABC. Wir bestimmen nun den Schnitt von EGH und ABC; dazu haben wir schon den Punkt b und brauchen noch den Schnittpunkt c von GE mit ABC. Wir durchschneiden BC und BA mit der Ebene γ, erhalten aus dem Grundriss $P'Q'$ den Aufriss der Schnittlinie, und indem wir $P''Q''$ mit $G''E''$ durchschneiden, folgt der Aufriss c'' des gesuchten Schnittpunktes.

Verbinden wir c mit b und a und durchschneiden AC mit diesen Linien in d und e, so erhalten wir bd und ae als Schnitte der Ebenen ACB mit EGH und EFG.

Für den Schnitt von ACD und EGH construiren wir noch den Punkt f, in welchem CD die Ebene EGH durchdringt. Aus dem Grundriss $R'S'$ construiren wir den Aufriss $R''S''$ und erhalten so den Aufriss f'' und hieraus die Schnittlinie df und den Schnittpunkt h der Ebene ACD mit der Kante EH (in der Figur befindet sich der Buchstabe h'' etwas unter dem Punkte).

Bei h schliesst sich der Schnitt der Ebenen ACD und EFH an; um denselben zu erhalten, suchen wir mit Hülfe der Ebene ε den Schnitt i der Kante DA und der Ebene EFH, und erhalten so den gesuchten Schnitt ih. Bestimmen wir mittelst der Ebene ζ den Schnitt k von BD und EFH, so haben wir nun die Linie ik, in welcher ABD und EFH sich schneiden.

Vom Schnitt der Ebenen EGH und BCD haben wir bereits f; wir suchen mit Benutzung der Ebene β den Schnittpunkt l der Kante GH und der Ebene BCD; dann ist lf die gesuchte Schnittlinie, und m der Schnittpunkt von BCD und der Kante EH.

Verbinden wir nun m mit k, so erhalten wir den Schnitt der Dreiecke EFH und BCD.

Mit Benutzung der schon vorhin verwendeten Ebene ζ construiren wir nun den Punkt n, in welchem BD die Ebene FGH durchstösst; die Strecke ln ist der Schnitt der Dreiecke FGH und BCD.

Die Ebene α liefert uns noch den Schnitt o der Kante FG und der Ebene ABD, und nun haben wir on, den Schnitt der Dreiecke ABD und FGH.

Fügen wir noch mit Benutzung der Ebene ε den Punkt p hinzu, in welchem EFG von der Kante AD geschnitten wird, so erhalten wir in den Strecken po und pe die Schnitte der Dreiecke ACD uud ADB mit dem Dreiecke EFG.

Hierdurch hat sich die Durchdringungsfigur geschlossen; dieselbe besteht in unserm Beispiele aus einem Zuge, nämlich aus dem unebnen Polygon $abdhikmlnopea$.

Zur Controle bemerke man, dass der Schnitt einer Ebene des einen Tetraëders mit einer Ecke des anderen ein Dreieck ist, dessen Eckpunkte auf den Kanten der Ecke liegen; die Grundrisse und Aufrisse der Eckpunkte liegen also auf den Grundrissen bez. Aufrissen der betreffenden Kanten. So schneidet z. B. die Ebene ABD die Ecke des anderen Tetraëders, dessen Scheitel F ist, in den drei Geraden ik, on und op; die Ecken des von diesen drei Geraden gebildeten Dreiecks liegen daher der Reihe nach auf den drei Kanten FG, FE und FH.

Das Netz eines der beiden Tetraëder, z. B. das von $EGFH$ zu erhalten, suchen wir die wahre Grösse jeder der Tetraëderkanten. Zu diesem Zwecke tragen wir von einem Punkte $\mathfrak{z}$ aus, der auf der Achse liegt, Strecken $\mathfrak{z}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{c}$,

$\mathfrak{z}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{f}$ auf, die der Reihe nach den Grundrissen $G'H'$, $G'F'$, $G'E'$, $H'E'$, $F'E'$, $F'H'$ gleich sind. In $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ errichten wir Senkrechte zur Achse, und ziehen durch G, H, F, E Parallelen zur Achse, welche die in $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ errichteten Senkrechten in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ schneiden; dann sind $\mathfrak{g}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{c}_1$ der Reihe nach gleich den Tetraëderkanten GH, GF, GE. Durchschneiden wir ferner mit den durch F und H gezogenen Parallelen zur Achse die in $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{z}$ errichteten Normalen, und mit der Parallelen durch E die Normalen in $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{z}$, so sind $\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{h}$ die Kantenlängen FH und EH und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{i}$ ist die Kantenlänge EF.

Aus den sechs Kanten kann man jede Seitenfläche des Tetraëders construiren; hängt man die Seitenflächen in passender Weise aneinander, so erhält man das Netz des Tetraëders.

Wir haben nun noch die Durchdringungsfigur in das Netz einzutragen; die dazu nöthigen Constructionen wollen wir an dem Theile der Durchdringungsfigur erläutern, der auf der Fläche FGH liegt.

Ziehen wir durch a'' und o'' Parallelen zur Achse bis zum Durchschnitte mit $\mathfrak{b}_1\mathfrak{g}$, so sind $\mathfrak{g}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{m}$ gleich den Kantenlängen Ga und Go und können in das Netz eingetragen werden.

Wir ziehen ferner eine Parallele durch q'' bis zum Durchschnitt mit $\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}$; dann ist $\mathfrak{o}\mathfrak{h}$ gleich der Strecke qH und wird auf HF in das Netz eingetragen. Hiermit ist auch oq im Netze gefunden.

Die Kantenlängen Hl und Hb können wir durch Parallelen zur Achse auf $\mathfrak{a}_1\mathfrak{g}$ nicht abschneiden, da die Schnitte unter zu kleinen Winkeln erfolgen würden. Wir nehmen daher den Grundriss zu Hülfe, machen $\mathfrak{z}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{z}\mathfrak{l}$ gleich $G'b'$ und $G'l'$, ziehen durch $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ Normalen zur Achse und erhalten so die gesuchten Kantenlängen $\mathfrak{g}\mathfrak{p} = Gb$, $\mathfrak{g}\mathfrak{q} = Gl$, die wir in das Netz eintragen.

Mittelst einer Parallelen zur Achse durch r'' schneiden wir auf $\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}$ die Strecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{r} = Fr$ ab, und bestimmen damit den Punkt r im Netze. Der Schnitt der Geraden oq und lr giebt endlich den Netzpunkt n. In gleicher Weise erhält man im Netze die übrigen Theile der Durchdringungsfigur.

§ 8. Der Rotationscylinder.

1. Der Rotationscylinder ist die Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche um eine zu ihr parallele Gerade rotirt. Die Rotationsachse heisst die Achse des Cylinders, der Abstand der rotirenden Geraden von der Achse heisst der Radius des Cylinders.

Eine Ebene, welche die Achse des Cylinders enthält, schneidet den Cylinder in zwei zur Achse parallelen Geraden, welche von ihr um den Cylinderradius nach beiden Seiten abstehen; diese Geraden heissen Mantellinien des Cylinders. Eine Ebene senkrecht zur Achse schneidet den Cylinder in einem Kreise, der den Cylinderradius zum Radius und den Schnitt mit der Achse zum Centrum hat; auf dem Cylinder giebt es unzählig viele solcher Kreise, die alle congruent sind, und, weil sie in parallelen Ebenen liegen, als Parallelkreise bezeichnet werden.

Der Rotationscylinder ist der Ort der Punkte, die um eine gegebene Strecke (den Cylinderradius) von einer festen Geraden (der Cylinderachse) entfernt sind.

Die Projection des Rotationscylinders auf eine Ebene senkrecht zur Achse ist der Parallelkreis, der auf der Projectionsebene liegt. Die Punkte dieses

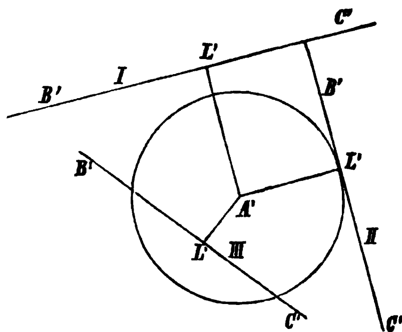
Parallelkreises sind die Projectionen der auf der Projectionsebene senkrechten Mantellinien und der Mittelpunkt ist die Projection der Cylinderachse*).

2. Eine Gerade, die zur Cylinderachse parallel ist, hat keinen Punkt mit dem Cylinder gemein, wenn ihr Abstand von der Cylinderachse grösser oder kleiner ist, wie der Cylinderradius; ist der Abstand gleich dem Cylinderradius, so liegt die Gerade auf dem Cylinder, ist eine Mantellinie des Cylinders.

Für eine Gerade, die zur Cylinderachse nicht parallel ist, gelten folgende Unterscheidungen:

Ist der kürzeste Abstand der Geraden von der Cylinderachse grösser, als der Cylinderradius, so liegen alle Punkte der Geraden ausserhalb des Cylinders, die Gerade hat also mit dem Cylinder keinen Punkt gemein. — Ist der kürzeste Abstand einer Geraden von der Cylinderachse gleich dem Cylinderradius, so liegt der Punkt der Geraden auf dem Cylinder, in welchem das gemeinsame Loth der Geraden und der Cylinderachse endigt; alle andern Punkte der Geraden sind um mehr als den Cylinderradius von der Achse entfernt, liegen also ausserhalb des Cylinders; wir sagen in diesem Falle, die Gerade berührt den Cylinder, ist eine Tangente des Cylinders. — Ist der kürzeste Abstand einer Geraden von der Achse eines Cylinders kleiner als der Cylinderradius, so giebt es auf der Geraden gleichweit vom Fusspunkte L des gemeinsamen Lothes der Geraden und der Achse zwei Punkte P und Q, welche um den Radius von der Achse abstehen; alle Punkte der Geraden zwischen P und Q liegen innerhalb, alle übrigen Punkte der Geraden ausserhalb des Cylinders; die Gerade schneidet also den Cylinder in zwei Punkten, P und Q.

Projiciren wir die Gerade und den Cylinder auf eine Ebene senkrecht zur Cylinderachse, so ist das von dem Grundriss A' der Achse auf den Grundriss $B'C'$ der Geraden gefällte Loth $A'L'$ parallel und gleich dem kürzesten Abstande der Cylinderachse A und der Geraden BC. Die Gerade BC trifft daher den Cylinder nicht, berührt ihn in einem Punkte oder schneidet ihn in zwei Punkten, je nachdem der Grundriss $B'C'$ der Geraden den Grundriss des Cylinders verfehlt, berührt, oder zweimal schneidet, und umgekehrt.



(M. 300.)

Aus dem Grundriss L' des Berührungspunktes L (im Falle II), bez. aus den Grundrissen P', Q' der Schnittpunkte (III) bestimmt man die Aufrisse L'', P'', Q'' als die zu L', P', Q' gehörenden Punkte des Aufrisses von BC.

3. Alle Geraden, die den Cylinder in demselben Punkte L berühren, stehen senkrecht auf dem Radius des Punktes L, liegen also auf der Ebene, die in L auf dem Cylinderradius senkrecht steht. Diese Ebene heisst die Tangentenebene des Cylinders im Punkte L; man sagt von ihr, dass sie den Cylinder im Punkte L berührt.

Ausser den durch L gehenden Tangenten enthält diese Ebene auch die durch L gehende Mantellinie; die Ebene, die den Cylinder in L berührt, hat also mit dem Cylinder die durch L gehende Mantellinie λ gemein.

*) Wenn in § 8 von einem Cylinder schlechthin die Rede ist, so ist immer ein Rotationscylinder gemeint.

Hieraus folgt weiter, dass diese Ebene den Cylinder in jedem Punkte der durch L gehenden Mantellinie λ berührt. Jede Gerade dieser Ebene, die λ schneidet, ist Tangente des Cylinders. Insofern man von den Geraden der Tangentialebene, die zu λ parallel sind, sagen kann, dass sie λ in einem unendlich fernen Punkte treffen, kann man auch sagen, dass sie den Cylinder in einem unendlich fernen Punkte berühren.

Spur (und Projection) einer Tangentialebene, die den Cylinder entlang der Mantellinie λ berührt, auf einer zur Cylinderachse normalen Ebene Π, ist die durch λ gehende Tangente des in Π gelegenen Parallelkreises.

Es giebt zwei Ebenen, die einen Rotationscylinder berühren und einer mit der Achse nicht gleichlaufenden Geraden parallel sind. Denn diese Ebenen sind aus der Schaar von Parallelebenen auszuwählen, die mit der Achse und der gegebenen Geraden parallel sind; und zwar sind die auszuwählen, die von der Cylinderachse um den Cylinderradius abstehen; deren giebt es aber zwei.

Alle Tangenten eines Rotationscylinders, die einer gegebenen mit der Achse nicht gleichlaufenden Geraden parallel sind, liegen auf einer der beiden zu dieser Geraden parallelen Tangentialebene des Cylinders.

4. Wird ein Cylinder auf eine Ebene durch Strahlen projicirt, die zu den Mantellinien parallel sind, so ist die Projection jeder Mantellinie ein Punkt; die Projection der ganzen Cylinderfläche ist also die krumme Linie, in welcher der Cylinder die Projectionsebene schneidet.

Sind die Projectionsstrahlen nicht parallel zu den Mantellinien des Cylinders, so bedeckt die Projection des Cylinders einen Theil der Projectionsebene. Denkt man sich durch jeden Punkt der Projectionsebene den Projectionsstrahl gezogen, so gehören die Punkte von Π zur Projection des Cylinders, deren Projectionsstrahlen den Cylinder treffen.

Ein Projectionsstrahl, der den Cylinder trifft, schneidet ihn im Allgemeinen in zwei Punkten; ein Punkt der Projection eines Rotationscylinders gehört also im Allgemeinen zu zwei Cylinderpunkten.

Das Gebiet der Punkte der Projectionsebene, deren Projectionsstrahlen den Cylinder zweimal schneiden, wird von dem Gebiet der Punkte, deren Strahlen den Cylinder nicht treffen, durch den Ort der Punkte getrennt, deren Projectionsstrahlen den Cylinder in einem Punkte berühren.

Diese Projectionsstrahlen erfüllen die beiden Tangentialebenen des Cylinders, welche den Projectionsstrahlen parallel sind; die Punkte, von welchen diese Strahlen ausgehen, erfüllen also die Spuren dieser beiden Tangentialebenen.

Diese Tangentialebenen sind parallel zur projicirenden Ebene der Cylinderachse und haben von ihr gleichen Abstand; ihre Spuren sind daher mit der Projection der Cylinderachse parallel und haben von derselben gleichen Abstand, und dieser ist die Projection des Cylinderradius, der auf der Richtung der Tangentialebenen senkrecht steht.

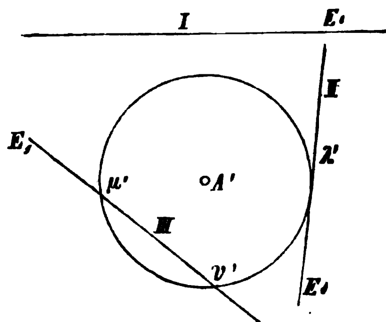
Sind die Projectionsstrahlen normal zur Projectionsebene, so ist dieser Cylinderradius parallel zur Projectionsebene, daher ist alsdann seine Projection ihm gleich.

Die Normalprojection eines Cylinders besteht also aus zwei Geraden, die zur Projection der Cylinderachse parallel sind und von ihr um den Cylinderradius abstehen.

5. Eine Ebene E (Fig. 301), die parallel zur Achse eines Rotationscylinders ist, projicirt sich auf eine Parallelkreisebene als Gerade; wenn diese Gerade E_1 die

Projection des Cylinders nicht trifft (I), berührt (II), oder zweimal schneidet (III) so hat die Ebene E mit dem Cylinder keinen Punkt gemein, oder berührt ihn längs der Mantellinie λ, oder schneidet ihn in den beiden Mantellinien, welche μ' und ν' zu Projectionen haben.

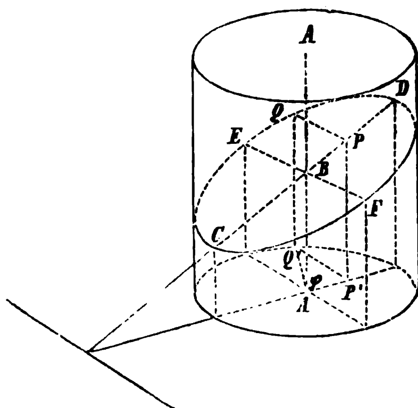
Eine Ebene E, welche die Cylinderachse schneidet, schneidet auch alle Mantellinien des Cylinders, und schneidet den Cylinder in einem Parallelkreise, wenn sie normal zur Achse ist; ist sie nicht normal zur Achse, so schneidet sie den Cylinder in einer geschlossenen krummen Linie, deren Normalprojection auf jede zur Achse normale Ebene ein Parallelkreis ist.



(M. 301.)

Die krumme Linie $CEDF$ sei der Schnitt der Ebene E mit dem Rotationscylinder. Wir legen eine Ebene durch die Achse AA normal zu E, diese schneide die E-Curve $CEDF$ in den Punkten C, D, so dass der Schnitt von CD und AA die Mitte von CD ist. Ferner legen wir durch B eine Ebene normal zur Achse; diese schneidet E und den Cylinder in den Punkten E, F, so dass EF von B halbirt wird und auf CD senkrecht steht.

Durch den beliebigen Punkt Q der Schnittcurve legen wir eine Ebene normal zu AA; sie schneidet E in einer Geraden QP, die normal zu BD ist.



(M. 302.)

Projiciren wir alles auf eine Parallelkreis-Ebene, so projiciren sich EF und CD als zwei auf einander senkrechte Diameter des Parallelkreises und QP als eine Normale zur Projection von BD. Ist r der Cylinderradius, ferner α der Winkel, unter welchem die Ebene E gegen die Cylinderachse geneigt ist, und φ der Winkel $F'AP'$, so hat man:

$$AP' = r\cos\varphi,\quad Q'P' = r\sin\varphi$$

$$BP = \frac{AP'}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}\cos\varphi,\quad QP = Q'P' = r\sin\varphi$$

Setzt man nun $\frac{r}{\sin\alpha} = a$, $r = b$, so erhält man:

$$BP = a\cos\varphi,\quad QP = b\sin\varphi.$$

Vergleicht man dies mit dem Inhalt von § 4, Nr. 2, insbesondere mit den Formeln am Ende dieser Nummer, so sieht man:

Eine Ebene, die nicht parallel oder normal zur Achse eines Rotationscylinders ist, schneidet den Cylinder in einer Ellipse; die grosse Achse derselben fällt in die Projection der Cylinderachse auf die Schnittebene und ist gleich dem Diameter des Cylinders getheilt

durch den Sinus des Winkels, unter dem die Schnittebene gegen die Cylinderachse geneigt ist; die kleine Achse ist der Diameter des Cylinders.

Aus § 4,18 folgt: Jede Parallelprojection eines ebenen Cylinderschnitts ist eine Ellipse.

6. Ein Rotationscylinder habe auf die Ebene Π_1 (Tafel VIII, 1) eines Parallelkreises den um O' mit Radius r geschlagenen Kreis als Projection und werde von einer Ebene E geschnitten, deren Spur E_1 und Neigungswinkel α gegen Π_1 ($CD \perp E_1$) gegeben sind. Der Schnittpunkt O der Cylinderachse und der Ebene E ist das Centrum der Schnittellipse, die durch O gelegte Falllinie enthält die grosse Achse AA_1 und die durch O gelegte Hauptlinie enthält die kleine Achse. Projicirt man den Cylinder und die Ebene E auf eine Verticalebene Π_2, die normal zu E_1 ist und durch C geht, so ist E_2 die Projection von E, und $A''A_1''$ gleich der grossen Achse der Ellipse.

Bestimmt man aus diesen beiden Projectionen den Aufriss der Figur auf eine beliebige Verticalebene Π_3 (z. B. auf die durch MM gelegte), so sind $A'''A_1'''$ und $B'''B_1'''$ conjugirte Diameter für die Projection der Schnittellipse auf Π_3. Aus diesen beiden conjugirten Durchmessern construirt man nach § 4 die Hauptachsen der Ellipse und hieraus beliebig viele Punkte und Tangenten derselben.

7. Einen Cylinder kann man sich als ein Prisma von unzählig vielen verschwindend breiten Seiten denken; dann sind die Parallelkreise desselben als congruente Polygone von unzählig vielen verschwindend kleinen Seiten anzusehen, und bilden Normalschnitte des Prisma; die Kanten des Prisma sind Mantellinien des Cylinders. Der Cylindermantel lässt sich daher in eine Ebene ausbreiten und giebt einen zwischen zwei Parallelen eingeschlossenen Streifen, dessen Breite gleich dem Umfange eines Parallelkreises ist.

Der Theil des Cylindermantels, der zwischen zwei Parallelkreisen liegt, giebt bei der Ausbreitung ein Rechteck, dessen Breite gleich dem Perimeter eines Parallelkreises und dessen Länge gleich dem Abstande der beiden begrenzenden Parallelkreise ist.

Der Theil des Cylindermantels, der zwischen zwei Mantellinien liegt, giebt ausgebreitet einen Streifen, dessen Breite gleich dem Bogen eines Parallelkreises ist, der auf dem betreffenden Theile des Cylindermantels zwischen den beiden begrenzenden Mantellinien liegt.

8. Um einen Cylinder oder Theile desselben in die Ebene auszubreiten, hat man also Strecken zu construiren, die gleich dem ganzen Perimeter oder gleich einem bestimmten Bogen eines gegebenen Kreises sind. Diese Constructionen lassen sich bekanntlich nur annäherungsweise ausführen; von den zahlreichen Annäherungen, die man aufgefunden hat, wollen wir folgende mittheilen.

a) Der Kreisumfang wird angenähert erhalten, indem man den Diameter dreimal nimmt und dazu den siebenten Theil des Diameters fügt.

Man setzt dabei, wenn u den Umfang, d den Diameter bezeichnet,

$$u = \frac{22}{7} d = 3{,}1429 \cdot d \text{ (auf 5 Ziffern abgekürzt),}$$

während der wahre Werth ist

$$u = \pi \cdot d,$$

also auf 5 Ziffern abgekürzt:

$$u = 3{,}1416 \cdot d.$$

Man erhält also durch die angegebene Annäherung den Umfang um $0{,}0013 \cdot d$ d. i. um ungefähr $\frac{1}{800}$ des Diameters, oder um $\frac{1}{2500}$ des Umfangs zu gross.

b) Man füge zu dem dreifachen Diameter ein Fünftel einer Quadrantensehne. Die Länge der Quadrantensehne ist $r\sqrt{2}$ oder $1{,}4142 \cdot r$, oder $\frac{1}{2} \cdot 1{,}4142 \cdot d$; der fünfte Theil davon also ist $0{,}14142 \cdot d$, also der angenähert gefundene Umfang

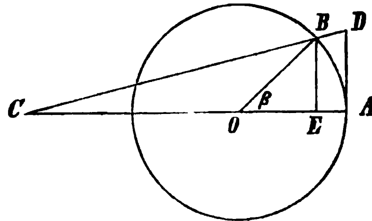
$$u = 3{,}14142 \cdot d.$$

Mit dem auf 6 Ziffern abgekürzten genauen Werthe verglichen:

$$u = 3{,}14159 \cdot d$$

zeigt sich der Annäherungswerth um $0{,}00017 \cdot d$, also ungefähr um $\frac{1}{600}$ des Diameters oder um $\frac{1}{19000}$ des Umfangs zu klein. Dies ist. ein für graphische Zwecke hinreichender Grad der Uebereinstimmung. —

c) Um eine Strecke zu zeichnen, die einem gegebenen Kreisbogen AB gleich ist, mache man auf der Verlängerung des Radius OA die Strecke OC gleich dem Diameter des Kreises, ziehe AD normal zu OA und durchschneide diese Grade durch CB; dann ist DA angenähert gleich dem Kreisbogen AB.



(M. 303.)

Ist nämlich β der Arcus des Centriwinkels von AB, und macht man $BE \perp OA$, so hat man

$$CE : CA = EB : AD.$$

Nun ist aber

$$CE = CO + OE = 2r + r\cos\beta,\quad CA = 3r,$$
$$BE = r\sin\beta,$$

folglich

$$2r + r\cos\beta : 3r = r\sin\beta : AD,$$

also

$$AD = \frac{3\sin\beta}{2 + \cos\beta} \cdot r,$$

Die Differentialrechnung lehrt, dass man angenähert setzen kann

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\beta^5}{120},\quad \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}.$$

Mithin ist mit demselben Grade der Genauigkeit

$$AD = \frac{3\left(\beta - \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^5}{120}\right)}{3 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}} \cdot r.$$

Hebt man im Zähler den Faktor β und im Nenner den Faktor 3 aus, und tilgt den letzteren gegen den gleichen Faktor im Zähler, so entsteht

$$AD = \frac{1 - \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^4}{120}}{1 - \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^4}{72}} \cdot \beta r.$$

Führt man Division aus, so erhält man, wenn man von Glieder mit höheren Potenzen von β, als der vierten, absieht, und bemerkt, dass βr der Kreisbogen AB ist, den wir kurz mit b bezeichnen wollen,

$$AD = \left(1 - \frac{\beta^4}{180}\right)b.$$

Für einen Bogen, dessen Centriwinkel 30° ist, beträgt der Arcus den sechsten Theil von π, also wenig mehr als $\frac{1}{2}$; somit ist alsdann

$$\frac{\beta^4}{180} \text{ ungefähr} = \frac{1}{16 \cdot 180} = \frac{1}{2880} \cdot$$

Wenn es auf $\frac{1}{2880}$ einer Strecke bei graphischen Darstellungen nicht ankommt, kann also diese Annäherungsconstruction benutzt werden.

Man sieht, wie man mit Hülfe derselben auch den Bogen eines Kreises findet, der einer gegebenen Strecke gleich ist.

9. Will man den Schnitt des Rotationscylinders mit der Ebene E (Tafel VIII, 1) in die Ausbreitung des Cylindermantels eintragen, so theilt man den Umfang des Parallelkreises in eine beliebige Anzahl gleiche Theile; man wählt dabei am besten eine durch vier theilbare Zahl und beginnt die Theilung bei einem der vier Punkte A', A_1' B', oder B_1' dann treten alle diese Punkte als Theilpunkte auf. In der Figur sind sechzehn Theile angenommen worden. Durch die Theilpunkte legt man Mantellinien und projicirt dieselben auf Π_2; dann haben immer je zwei gleichweit von A' oder von A_1' abstehende dieselbe Projection. Die Stücke dieser Mantellinien, welche zwischen der horizontalen Ebene und der Schnittebene E liegen, sind gleich den zwischen CD und E_2 liegenden Strecken ihrer Projection auf Π_2.

Denkt man sich den Cylindermantel behufs der Ausbreitung entlang der durch B gehenden Mantellinie aufgeschnitten, theilt in der Ausbreitung den in eine Gerade ausgestreckten Umfang der in Π_1 liegenden Cylinderbasis in 16 gleiche Theile und zieht durch die Theilpunkte Normale zur ausgestreckten Basis FF, so hat man die durch die Theilpunkte der Basis gelegten Mantellinien in das Cylindernetz eingetragen. Man messe nun die Längen der einzelnen Mantellinien an der Projection auf Π_2 ab, so erhält man 16 Punkte der ausgebreiteten Schnittlinie.

Wir ziehen durch den Punkt G der Ellipse eine Tangente. Betrachtet man den Cylinder als Prisma von unendlich vielen verschwindend schmalen Seiten, so erscheint die Ellipse als ebenes Schnittpolygon dieses Prisma, und die Ellipsentangente in G erscheint als die Verlängerung der durch G gehenden Seite des Schnittpolygons.

Die Basis des Cylinders kann als Grundriss des Schnittpolygons aufgefasst werden; der Grundriss der durch G gehenden unendlich kleinen Seite des Schnittpolygons ist daher das durch G' gehende Kreiselement, und der Grundriss der durch G gehenden Ellipsentangente ist mithin die durch G' gehende Tangente der Basis. Beide Tangenten treffen sich in H, da ja die Ellipsentangente auf E liegt.

Die Ebene HGG' ist Tangentialebene des Cylinders und berührt ihn entlang der Mantellinie GG'; sie kann als Erweiterung der unendlich schmalen Prismenfläche angesehen werden, auf welcher die Mantellinie GG' liegt. Bei der Ausbreitung des Prismen- d. i. Cylinder-Mantels kommt daher diese Ebene auf die Projectionsebene zu liegen und GH ist dann die Verlängerung der durch den Netzpunkt G gehenden unendlich kleinen Seite des Schnittpolygons im Netze, d. i. Tangente der Schnittcurve im Netze im Netzpunkte G_0. $G'H$ legt sich bei der Ausbreitung auf die Gerade, in welche sich die Cylinderbasis ausstreckt.

Tragen wir daher von der Mantellinie G_0 im Netze auf FF die Strecke

$G_0'h = G'H$ auf, und verbinden h mit dem Netzpunkte G_0, so ist hG_0 Tangente der Ausbreitung der Schnittellipse.

Construiren wir so zu den 16 Netzpunkten der Schnittcurve die Tangenten, so haben wir genug Anhalt, um die ganze Schnittcurve im Netz zu zeichnen.

10. Als Beispiel für die Durchdringung eines Rotationscylinders mit einem ebenflächigen Körper wählen wir die Durchdringung mit einem Tetraëder (Tafel VIII, 2). Wir nehmen eine Parallelkreisebene des Cylinders zur horizontalen Projectionsebene; der Kreis um O sei der Grundriss des Cylinders, $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$ seien die Projectionen des Tetraëders.

Zunächst construiren wir (nach § 8, 2) die Aufrisse der Schnittpunkte $EFGH$ der Tetraëderkanten AC, AD, BC, BD und des Cylinders.

Um Punkte für den Aufriss der Ellipsen zu erhalten, in welchen die Ebenen ABC etc. den Cylinder schneiden, theilen wir den Bogen des Parallelkreises zwischen den Mantellinien durch E und H (zwischen denen sich die Schnittfigur befindet), in eine genügende Anzahl, etwa 12, gleiche Theile, und zeichnen die Aufrisse der durch die Theilpunkte gehenden Mantellinien.

Wir legen nun durch die Mantellinien 1 bis 9 Verticalebenen, die der Kante AC parallel sind, deren Grundrisse also durch die Punkte 1 bis 9 parallel zu $A'C'$ gehen. Diese Ebenen schneiden das Dreieck ABC in Parallelen zu AC, deren Aufrisse aus den Grundrissen der Punkte gefunden werden, in welchen sie die Gerade AB oder CB schneiden. So finden wir z. B. den Aufriss der auf ABC durch die Mantellinie 6 gehenden Parallelen zu AC, indem wir $6\alpha'$ parallel $A'C'$ ziehen, den Aufriss α'' des Punktes α der Kante AB bestimmen, und durch α'' eine Parallele zu $A''C''$ legen. Wir bestimmen in dieser Weise Grundrisse und Aufrisse aller auf ABC durch die Mantellinien 1 bis 9 gehenden Parallelen zu AC, und construiren dann die Aufrisse der Schnittpunkte dieser Parallelen mit dem Cylinder. Wir erhalten dadurch zwischen den äussersten Punkten E'' und G'' nach 9 Aufrisse von Punkten der Ellipse, in der der Cylinder von ABC geschnitten wird, und diese Punkte können genügen, um den Aufriss der Schnittlinie zu zeichnen.

Die durch 1, 2, 3 gehenden Parallelen zu $A'C'$ können auch als Grundrisse von auf ACD liegenden Parallelen zu AC angesehen werden. Bestimmt man deren Aufrisse mit Hülfe der Punkte, in denen die Grundrisse die Gerade $A'D'$ schneiden, und dann weiter die Schnitte dieser Parallelen und des Cylinders, so erhält man drei Punkte für die kurzen Ellipsenbogen, der den Aufriss des Schnittes des Dreiecks ACD und des Cylinders bildet.

Um Punkte vom Aufrisse des Schnittes der Ebenen BDA und BDC mit dem Cylinder zu haben, legen wir in gleicher Weise durch die Punkte 4 bis 11 Parallele zu $B'D'$ und betrachten diese als Grundrisse von Parallelen zu BD, die auf der Ebene BDA liegen; sowie die Parallelen 10, 11 als Grundrisse von Parallelen zu BD auf der Ebene BDC; suchen die Aufrisse dieser Parallelen; und bestimmen schliesslich die Aufrisse ihrer Schnittpunkte mit dem Cylinder.

Das Eintragen der im Innern der Flächen liegenden Punkte der Schnittcurven in das Netz des Tetraëders erfolgt, indem man die auf jeder Tetraëderfläche liegenden Parallelen in das Netz einträgt, durch die Curvenpunkte Parallele zu einer anderen Seite jedes Dreiecks (auf ABC z. B. Parallele zu CB) zieht, und auch diese in das Netz einträgt; die Netzpunkte der Schnittcurven werden dann als Schnittpunkte einer Parallelen zu der einen Dreiecksseite (AC) mit der entsprechenden Parallelen zu der anderen Dreieckseite (CB) erhalten.

Um die Schnittcurven in das Netz des Cylinders einzutragen, wollen wir die Mantelfläche des Cylinders entlang der Mantellinie durch Γ aufschneiden. Wir schneiden von der Rectification der Cylinderbasis Strecken ab, die den Bogen $\Gamma'E'$, $E'F'$, $F'G'$, $G'H'$ gleich sind. Drei dieser Bogen $\Gamma'E'$, $E'F'$, $G'H'$ haben Centriwinkel, die nicht grösser sind als 30°, können also direkt nach der in Nr. 8 angegebenen Methode rectificirt werden. Um den Bogen $F'G'$ zu rectificiren, nehme man von ihm einen Bogen hinweg, der zum Centriwinkel 30° gehört; den kleinen übrigbleibenden Bogen rectificiren wir nach Nr. 8; und fügen schliesslich zum zwölften Theile des Kreisumfangs (d. i. zu dem Bogen, dessen Centriwinkel = 30°) die Rectification des Restes.

Wir erhalten so im Netz die Mantellinien durch $E'F'G'H'$ und damit auch die Eckpunkte des krummlinigen Schnittcurvenvierecks.

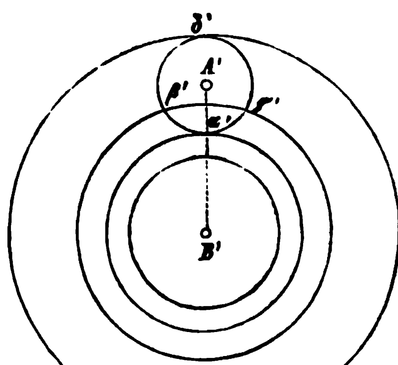
Den zwischen den Netzpunkten E' und H' liegenden Theil der Cylinderbasis theile man in 12 gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte Mantellinien und trage auf denselben aus dem Aufrisse die Strecken ab, welche von der Basis bis zu den auf ihnen liegenden Punkten der Durchdringungsfigur reichen.

11. Wir untersuchen die Schnittlinie zweier Rotationscylinder.

Wir wollen dabei der einfacheren Darstellung willen die horizontale Projectionsebene normal zur Achse des einen Cylinders und die Verticalebene parallel der Achse des andern wählen.

Der einfachste Fall ist die Durchdringung zweier Cylinder, deren Achsen parallel sind. Die Grundrisse beider Cylinder sind dann zwei Kreise; die Punkte, welche dieselben gemein haben, sind die Grundrisse von Mantellinien, welche die Cylinder gemein haben.

Für zwei Rotationscylinder mit parallelen Achsen gelten die Sätze: Ist der Abstand der Achsen grösser, als die Summe der Cylinderradien, so haben die Cylinder keinen Punkt gemein. Ist der Abstand der Achsen gleich der Summe der beiden Radien, so haben die Cylinder eine Mantellinie (α) gemein, die auf der Ebene der Achsen zwischen denselben liegt; entlang dieser Mantellinie werden beide Cylinder von derselben Ebene berührt, man sagt daher die beiden Cylinder berühren sich in dieser Mantellinie.



(M. 304.)

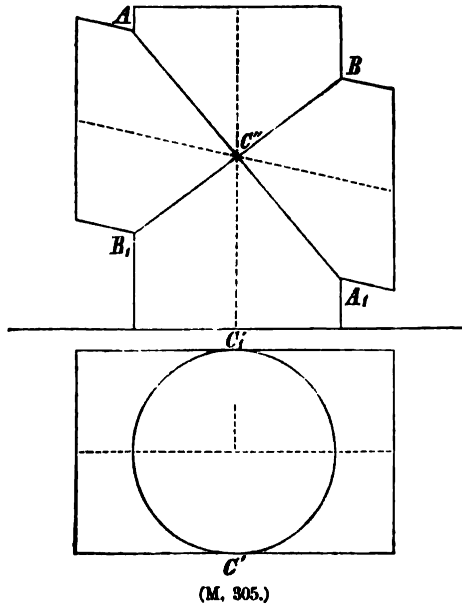
Ist die Summe der Radien grösser und die Differenz der Radien kleiner als der Abstand der Achsen, so haben die Cylinder zwei Mantellinien gemein (β und γ), in denen sie sich schneiden; diese beiden Mantellinien liegen symmetrisch zur Ebene der Achsen.

Ist die Differenz der Radien gleich dem Abstand der Achsen, so wird der kleinere Cylinder ganz von dem grösseren eingeschlossen und hat mit ihm eine Mantellinie (δ) gemein, die auf der Ebene der beiden Achsen liegt. Entlang dieser Mantellinie werden die Cylinder von derselben Ebene berührt, die Cylinder tangiren einander also entlang dieser Linie.

Ist die Differenz der Radien grösser, als der Abstand der Achsen, so schliesst der grössere den kleineren ein, ohne mit ihm einen Punkt gemein zu haben.

12. Wir betrachten nun die Durchdringung zweier gleichen Cylinder, deren Achsen sich schneiden; wir wollen den einen durch zwei Parallelkreisebenen, den anderen durch zwei Ebenen vertical zur Projectionsachse abgrenzen.

Die Geraden AA_1 und BB_1 sind die Aufrisse der Halbirungslinien der von den Cylinderachsen gebildeten Winkel, und zugleich die Projectionen der durch diese Halbirungslinien normal zur Verticalebene gelegten Ebenen. Die Stereometrie lehrt, dass alle Punkte, welche von zwei sich schneidenden Geraden gleichweit entfernt sind, auf einer der beiden Ebenen liegen, welche durch die Halbirungslinien der von den beiden Geraden eingeschlossenen Winkel normal zur Ebene der Geraden stehen. Da nun die Punkte, welche beide Cylinder gemeinsam haben, gleichweit, nämlich um den Radius beider Cylinder, von den Achsen der Cylinder entfernt sind, so folgt, dass diese gemeinsamen Punkte auf den beiden Ebenen E und F liegen, welche AA_1 und BB_1 zu Projectionen haben. Die Schnittcurve der beiden Cylinder besteht also aus zwei Ellipsen; dieselben können als die Schnitte des vertical stehenden Cylinders mit den Ebenen E und F construirt und in die Cylindernetze eingetragen werden.



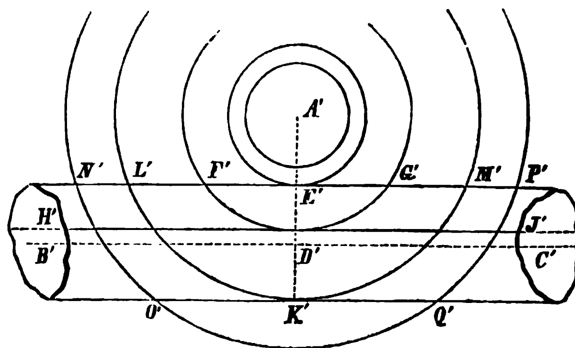
(M. 305.)

Es mag noch bemerkt werden, dass in den beiden Punkten, deren Grundrisse C' und C_1' sind, und deren gemeinsamer Aufriss C'' ist, die beiden Durchdringungsellipsen sich schneiden. In diesen Punkten haben beide Cylinder je eine gemeinsame Tangentialebene; man sagt daher, die beiden Cylinder berühren sich in den Punkten C und C_1.

13. Bei der Beurtheilung der gegenseitigen Lage zweier ungleichen Cylinder, deren Achsen nicht parallel sind, kommt der kürzeste Abstand der beiden Cylinderachsen in Betracht.

Ist die Horizontalebene normal zur Achse des einen Cylinders, so ist das von der Projection A' dieser Cylinderachse auf den Grundriss $B'C'$ der Achse des andern Cylinders gefällte Loth $A'D'$ parallel und gleich dem kürzesten Abstande beider Cylinderachsen.

Ist die Summe der Cylinderradien kleiner als der kürzeste Abstand der beiden Achsen, so haben die Cylinder keinen Punkt gemein.



(M. 306.)

Ist die Summe der Radien gleich dem kürzesten Achsenabstande, so haben die Cylinder einen Punkt (E) gemein. Hat man die Verticalebene parallel Bt gelegt, so ist der Aufriss von AD der Schnittpunkt der Achsenaufrisse; dieser Punkt ist zugleich der Aufriss E. Wie man sieht, haben die Cylinder in E eine gemeinsame Tangentialebene, sie berühren sich also in E.

Ist die Summe der Cylinderradien grösser, und ihre Differenz kleiner als der kürzeste Achsenabstand, so schneiden sich die Cylinder in einer Durchdringungscurve, die aus einem einzigen Zuge besteht. Auf dem verticalen Cylinder liegt die Durchdringungscurve zwischen den Mantellinien F und G, auf dem schrägen zwischen den beiden Mantellinien, deren gemeinsamer Grundriss $H'I'$ ist. Diese vier begrenzenden Mantellinien sind Tangenten der Durchdringungscurve.

Ist die Differenz der Radien gleich dem kürzesten Achsenabstande, so haben die beiden Cylinder unter Anderm den Punkt K gemein (dessen Aufriss mit dem Schnittpunkt der Achsenaufrisse zusammenfällt) und berühren sich in diesem Punkte.

Ausserdem schneiden sie sich in einer Curve, die eine ganz besondere Gestalt annimmt. Auf dem verticalen Cylinder liegt sie nämlich zwischen den Mantellinien L und M, auf dem schrägen Cylinder reicht sie sowol auf der nach oben gewandten Seite des Cylinders, als auf der der Horizontalebene zugewandten, bis an den Punkt K; die beiden Theile der Durchdringungscurve, der von oben sichtbare und der von oben nicht sichtbare (die beide den Kreisbogen $L'K'M'$ zum Grundriss haben) treffen sich also in K. Dieser Punkt spielt daher für die Durchdringungscurve eine ausgezeichnete Rolle; man bezeichnet ihn als Doppelpunkt der Durchdringungscurve. Die Curve hat ungefähr die Gestalt einer auf den Mantel des verticalen Cylinders schräg aufgelegten arabischen Ziffer 8; der Punkt, durch welchen der Schriftzug zweimal hindurchgeht, und in welchem derselbe sich selbst durchschneidet, entspricht dem Doppelpunkt K der Durchdringungscurve.

Ist die Differenz der Cylinderradien grösser, als der kürzeste Achsenabstand, so durchdringen sich die Cylinder in einer Curve, die aus zwei vollständig getrennten Zügen besteht. Auf dem grösseren, verticalen Cylinder liegt der eine Zug zwischen den Mantellinien N und O, der andere zwischen P und Q. Der kleinere (schräge) Cylinder wird von den beiden Zügen in drei getrennte Theile zerlegt; der mittlere, endliche Theil liegt ganz innerhalb des grösseren Cylinders, die andern beiden, einerseits unbegrenzten Theile liegen ausserhalb des grösseren Cylinders.

14. Wir wollen nun zeigen, wie die Construction des Aufrisses der Durchdringungscurve zweier Cylinder und die Eintragung in das Netz erfolgt, und zwar wollen wir die Construction für den Fall durchführen, dass der Unterschied der Cylinderradien gleich dem kürzesten Achsenabstande ist, weil dieser Fall durch das Auftreten eines Doppelpunktes in der Durchdringungscurve besondere Aufmerksamkeit erfordert (Tafel VIII.)

Wir nehmen die Horizontalebene normal zur Achse des grösseren Cylinders und grenzen denselben durch die horizontale Projectionsebene und eine in passender Höhe gelegte Parallelebene ab. Den kleineren (schrägen) Cylinder grenzen wir durch zwei Parallelkreisebenen ab, die also, wenn die Achsen der Cylinder wie wir annehmen wollen, sich nicht rechtwinkelig kreuzen, congruente Ellipsen zu Grundrissen haben. Die halbe grosse Achse derselben ist gleich dem Ra-

dius ρ des kleineren Cylinders und steht normal auf dem Grundriss der Cylinderachse; die halbe kleine Achse fällt in die Richtung der Cylinderachse und ist gleich dem Radius ρ multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels α, den die Cylinderachsen mit einander bilden.

Wir bestimmen zunächst die Aufrisse der Punkte L und I, in denen die Mantellinie GE den grösseren Cylinder schneidet, sowie den Aufriss des Doppelpunktes K.

Um nun weitere Punkte der Durchdringungscurve zu erhalten, schneiden wir die Cylinder durch Ebenen, die beiden Cylinderachsen parallel sind. Jede solche Ebene schneidet jeden Cylinder im Allgemeinen in zwei Mantellinien, und diese zwei Paare Mantellinien schneiden sich in den Ecken eines Parallelogramms; dies sind vier Punkte der Durchdringungscurve der beiden Cylinder.

In der Figur sind die Schnittebenen so angeordnet, dass sie den schrägen Cylinder in 16 gleiche Theile zerlegen. Eine dieser Ebenen trifft den verticalen Cylinder in den Mantellinien μ und ν, den schrägen in den Mantellinien α und β.

Letzere werden aus dem Grundriss in den Aufriss übertragen in dem man den einen den Cylinder begrenzenden Parallelkreis um seinen horizontalen Diameter dreht, bis er parallel der Horizontalebene ist, die Umlegungen der Endpunkte der Mantellinien α und β aufsucht und $\alpha''G'' = \beta''G''$ gleich dem gemeinsamen Abstande dieser Umlegungen von $G'H'$ macht.

Wir wollen noch zeigen, wie die Tangenten an die Durchdringungscurve in den durch Construction soeben gewonnenen Punkten gefunden werden.

Betrachtet man beide Cylinder als Prismen von unendlich vielen verschwindend schmalen Seitenflächen, so erscheint die Durchdringungscurve als ein Polygon von unzählig vielen verschwindend kleinen Seiten, und die Tangente der Durchdringungscurve im Punkte M erscheint als die Gerade, auf welcher die durch M gehende Seite des Durchdringungspolygons liegt; diese ist aber der Durchschnitt der durch M gehenden Seitenflächen der beiden Prismen, und diese Seitenflächen liegen auf den durch M gehenden Tangentialebenen beider Cylinder. Wir haben daher den Satz: Die Gerade, welche die Durchdringungscurve zweier Rotationscylinder in einem gegebenen Punkte derselben berührt, ist die Schnittlinie der durch diesen Punkt gehenden Tangentialebenen der beiden Cylinder.

Der Schnittpunkt dieser Schnittlinie mit der durch die Achse des schrägen Cylinders und durch das gemeinsame Loth beider Achsen (also normal zu Π_2) gelegten Ebene kann leicht gefunden werden.

Legt man durch den zu α gehörigen Punkt O der Umlegung der Endfläche des schrägen Cylinders eine Tangente an den Kreis um B', durchschneidet damit $G'H'$ und zieht PQ' parallel $B'C'$, so ist PQ' der Grundriss und $G''E''$ der Aufriss der Geraden, in welcher die den schrägen Cylinder entlang α tangirende Ebene die Ebene GBC schneidet.

Zieht man ferner $M'Q'$ normal zu $M'A'$, so ist $M'Q'$ der Grundriss der Tangentialebene des verticalen Cylinders, die ihn entlang μ berührt.

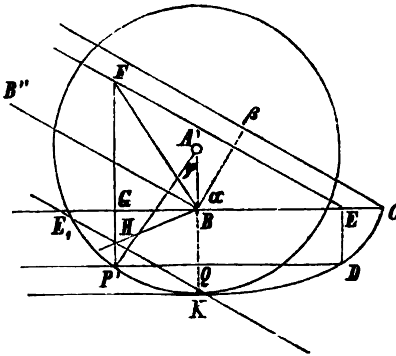
Daher ist Q' der Grundriss und Q'' der Aufriss eines Punktes der in M an die Durchdringungscurve gelegten Tangente; also sind $M'Q'$ und $M''Q''$ Grund- und Aufriss dieser Tangente.

Die Construction führt zu keinem bestimmten Resultate, wenn man die Tangente im Doppelpunkt K bestimmen will. Die beiden Tangentialebenen an die beiden Cylinder im Punkte K fallen zusammen, und jede durch K gehende Ge-

rade dieser gemeinsamen Tangentialebene kann daher als Tangente der Curve im Doppelpunkte angesehen werden. Unter diesen unzähligen Geraden, die durch den Doppelpunkt gehen und in der gemeinsamen Tangentialebene beider Cylinder liegen, sind zwei von besonderer Bedeutung, nämlich die beiden, welche die Richtungen der durch den Doppelpunkt gehenden Curvenzweige angeben.

Um die Winkel zu erhalten, die diese beiden Geraden mit der Horizontalebene bilden, verbinden wir K mit irgend einem Punkte der Durchdringungsfigur, dessen Radius im Grundriss mit $A'K'$ den Winkel φ bilde und suchen eine Function des Winkels zu berechnen, den der Aufriss dieser Verbindungslinie mit der Projectionsachse bildet. Lassen wir dann diesen Winkel immer kleiner und kleiner werden, so geht die Verbindungslinie immer mehr in die Lage einer der gesuchten Geraden über, und fällt mit ihr zusammen, wenn man $\varphi = 0$ setzt.

Um die Betrachtung durchzuführen, legen wir durch K eine Parallelkreisebene des grossen Cylinders, nehmen sie zur Horizontalebene und legen die Verticalebene durch den Grundriss BC der Achse des schrägen Cylinders. KDC sei ein Quadrant der Spurellipse des schrägen Cylinders.



(M. 307.)

Ziehen wir $P'D \perp A'K$ und $DE \perp BC$, machen $BE_1 = BE$ und ziehen $EF \parallel E_1H$ parallel mit dem Aufriss BB'' der Achse des schrägen Cylinders, so sind F und H die Aufrisse der Punkte der Durchdringungscurve, welche den Grundriss P' haben.

Wir wollen nun die Tangenten der Winkel GBF und GBH aus den Radien r und ρ des verticalen und des schrägen Cylinders, aus dem Winkel α, den die Achse des schrägen Cylinders mit der des verticalen macht, und dem Winkel φ berechnen.

Ist $B\beta \perp BB''$, so ist $CB\beta = \alpha$ und daher die grosse Halbachse der Spurellipse $BC = \rho : \cos\alpha$, die kleine Halbachse $BK = \rho$.

Nach § 4,2 giebt es einen Winkel ψ, für welchen man hat

1. $$BE = BC \cdot \cos\psi, \quad ED = BK \cdot \sin\psi.$$

Aus der zweiten Formel folgt

$$\sin\psi = \frac{ED}{BK}, \text{ also:}$$

$$\cos\psi = \sqrt{1 - \frac{ED^2}{BK^2}} = \frac{1}{BK}\sqrt{BK^2 - ED^2}.$$

Dies ergiebt

2. $$BE = \frac{BC}{BK}\sqrt{BK^2 - ED^2}.$$

Nun ist $BK = \rho$, und

$$ED = BQ = A'Q - A'B = r\cos\varphi - (r - \rho)$$
$$= \rho - r(1 - \cos\varphi)$$
$$= \rho - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$3. \qquad BK^2 - ED^2 = \rho^2 - \left(\rho - 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 4r\rho\sin^2\frac{\varphi}{2} - 4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2}.$$

Da ferner $BC = \frac{\rho}{\cos\alpha}$ und $BK = \rho$, so ist

$$4. \qquad \frac{BC}{BK} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Setzt man die in 3. und 4. gewonnenen Werthe in 2. ein, so entsteht:

$$BE = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{4r\rho\sin^2\frac{\varphi}{2} - 4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}, \text{ also folgt}$$

$$5. \qquad = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha}\sqrt{r\rho - r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

Da ferner $GB = P'Q = r\sin\varphi$, so folgt:

$$6. \qquad \begin{aligned} GE = BE + BG &= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha}\sqrt{r\rho - r\sin^2\frac{\varphi}{2}} + r\sin\varphi \\ GE_1 = BE - BG &= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha}\sqrt{r\rho - r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} - r\sin\varphi \end{aligned}$$

Nun ist

$$7. \qquad FG = GE\cdot\cot\alpha, \qquad GH = GE_1\cdot\cot\alpha$$

und hieraus endlich folgt

$$8. \qquad \begin{aligned} \tan GBF &= \frac{GF}{GB} = \frac{GE\cot\alpha}{r\sin\varphi} = \frac{GE\cos\alpha}{2r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\alpha} \\ \tan GBH &= \frac{GH}{GB} = \frac{GE_1\cot\alpha}{r\sin\varphi} = \frac{GE_1\cos\alpha}{2r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\alpha} \end{aligned}$$

Setzt man hier die Werthe 6. ein, so hat man

$$9. \qquad \begin{aligned} \tan GBF &= \frac{1}{r\sin\alpha\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{r\rho - r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} + \cot\alpha \\ \tan GBH &= \frac{1}{r\sin\alpha\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{r\rho - r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \cot\alpha \end{aligned}$$

Setzt man hier $\varphi = 0$, so geben diese Formeln die Tangenten der Winkel ε und ε_1, welche die Richtungen der beiden durch den Doppelpunkt gehenden Curvenzweige mit der Horizontalen einschliessen. Da nun für $\varphi = 0$, $\cos\frac{\varphi}{2} = 1$, $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, so folgt:

$$10. \qquad \begin{aligned} \tan\varepsilon &= \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\rho}{r}} + \cot\alpha \\ \tan\varepsilon_1 &= \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\rho}{r}} - \cot\alpha \end{aligned}$$

Wir wollen die Strecken TS und TS_1 (Tafel VIII, 3) construiren, welche die unter den Richtungen ε und ε_1 durch K gezogenen Geraden (die als die Doppelpunktstangenten bezeichnet werden) von SS_1 abschneiden. Wir haben:

11.
$$TS = r\,tang\,\varepsilon = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\rho r} + r \cot\alpha$$
$$TS_1 = r\,tang\,\varepsilon_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\rho r} - r \cot\alpha$$

Nun ist.

$$K''b = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad K''c = \frac{\rho}{\sin\alpha}, \quad ab = r\cot\alpha$$

Macht man also $K''d = K''b$, $K''e = K''c$ und schlägt den Kreis, der ed zum Diameter hat, so ist

$$K''f = K''f_1 = \sqrt{\frac{r}{\sin\alpha}\cdot\frac{\rho}{\sin\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{r\rho};$$

und zieht man weiter $bg \parallel K''a$, so ist

$$gf = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{r\rho} + r\cot\alpha, \quad gf_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{r\rho} - r\cot\alpha.$$

Die Gerade gT ist parallel $K''b$; zieht man hierzu Parallelen durch f und f_1, so sind SK'' und S_1K'' die Aufrisse der Doppelpunktstangenten der Durchdringungscurve der beiden Cylinder.

Die Construction des Netzes beider Cylinder, das Eintragen der Doppelpunktstangenten sowie der Tangenten in den übrigen Punkten der Netzcurve ist aus dem bisher Mitgetheilten leicht abzuleiten.

§ 9. Die Kugel.

1. Die Kugel ist der Ort der Punkte, welche vom Kugelcentrum um den Kugelradius entfernt sind; sie wird von einem Halbkreis beschrieben, der um den seine Endpunkte verbindenden Diameter rotirt.

Eine Gerade hat mit einer Kugel keinen oder zwei Punkte gemein, je nachdem ihr Abstand vom Kugelcentrum grösser oder kleiner ist, als der Radius. Ist der Abstand der Geraden vom Kugelcentrum gleich dem Radius, so hat die Gerade mit der Kugel den Fusspunkt des vom Centrum auf die Gerade gefällten Lothes gemein; sie berührt die Kugel in diesem Punkte. Alle Geraden, welche die Kugel in einem gegebenen Kugelpunkte P berühren, stehen senkrecht auf dem Radius dieses Punktes und erfüllen daher eine Ebene, die auf diesem Radius senkrecht steht und mit der Kugel nur diesen Punkt P gemein hat; diese Ebene heisst daher Tangentialebene der Kugel im Punkte P.

Alle Tangenten der Kugel, die einer gegebenen Richtung parallel sind, sind um den Kugelradius von der Geraden α entfernt, die parallel zu der Richtung durch das Centrum gelegt wird; sie sind daher die Mantellinien eines Rotationscylinders, dessen Achse die Gerade α und dessen Radius gleich dem Kugelradius ist. Dieser Cylinder ist der Kugel umschrieben; die Berührungspunkte der Mantellinien mit der Kugel liegen auf dem Parallelkreis des Cylinders, dessen Ebene durch das Kugelcentrum geht.

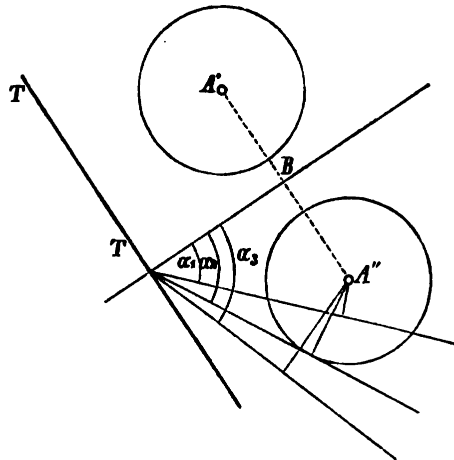
Hieraus folgt: Eine Normalprojection der Kugel ist ein Kreis, der die Projection des Centrums zum Centrum hat und dessen Radius gleich dem Kugelradius ist.

Eine (schräge) Parallelprojection der Kegel ist eine Ellipse; das Centrum derselben ist die Projection des Kugelcentrums; die kleine Achse steht normal auf den Projectionsstrahlen und ist gleich dem Kugeldiameter; die grosse Achse ist gleich dem Kugeldiameter getheilt durch den Cosinus des Winkels, den die Projectionsstrahlen mit einer Normalen zur Projectionsebene bilden.

Denn der Umriss der normalen oder schrägen Parallelprojection einer Kugel wird von den Punkten gebildet, deren Projectionsstrahlen die Kugel berühren; diese Projectionsstrahlen sind aber, wie wir schon gesehen haben, die Mantellinien eines der Kugel umgeschriebenen Rotationscylinders. Im Falle der Normalprojection ist die Kugelprojection ein Normalschnitt (Parallelkreis) dieses Cylinders, im Falle der schrägen Parallelprojection ein schräg zur Cylinderachse geführter Schnitt (die Horizontalspur des umschriebenen Cylinders).

2. Ist der Abstand einer Ebene vom Centrum einer Kugel grösser, als der Kugelradius, so hat die Ebene mit der Kugel keinen Punkt gemein; ist der Abstand gleich dem Kugelradius, so berührt die Ebene die Kugel im Endpunkte des vom Kugelcentrum auf die Ebene gefällten Lothes; ist der Abstand kleiner als der Kugelradius, so schneidet die Ebene die Kugel in einem Kreise, dessen Centrum die Normalprojection des Kugelcentrums auf die Schnittebene ist.

Projicirt man die Kugel und die Ebene E auf eine Ebene Π_2 senkrecht zu E, so projicirt sich E als Gerade E_2 und der Abstand der Ebene E vom Kugelcentrum ist gleich und parallel dem Abstande der Projection des Kugelcentrums von der Projection von E; die Projection der Kugel auf Π_2 ist ein Kreis, der die Projection des Kugelcentrums zum Centrum und der Radius der Kugel hat. Je nachdem die Projection E_2 den Kreis schneidet, berührt oder verfehlt, hat die Ebene E mit der Kugel einen Kreis gemein, oder tangirt sie in einem Punkte oder trifft sie nicht.

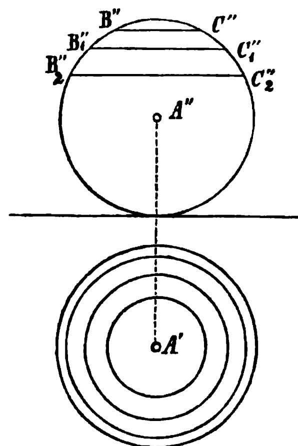


(M. 308.)

In der Figur ist angenommen, dass die Kugel durch die Projection des Centrums, den Radius und den Abstand BA'' des Centrums von der horizontalen Projectionsebene, die Schnittebene E durch die Spur TT und den Neigungswinkel (α_1 bez. α_2, α_3) gegeben ist.

Ebenen durch den Kugelmittelpunkt schneiden die Kugel in Hauptkreisen, d. i. in Kreisen, die mit der Kugel das Centrum und den Radius gemein haben.

3. Mit Ausnahme des Hauptkreises, dessen Ebene der Projectionsebene parallel ist und dessen Projection die Kugelprojection selbst ist, hat jeder Hauptkreis eine Ellipse als Projection. Die grosse Achse dieser Ellipse ist der Kugeldiameter und ist parallel der Spur der Hauptkreisebene; die kleine Achse ist gleich dem Kugeldiameter multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den die Hauptkreisebene mit der Projectionsebene einschliesst.

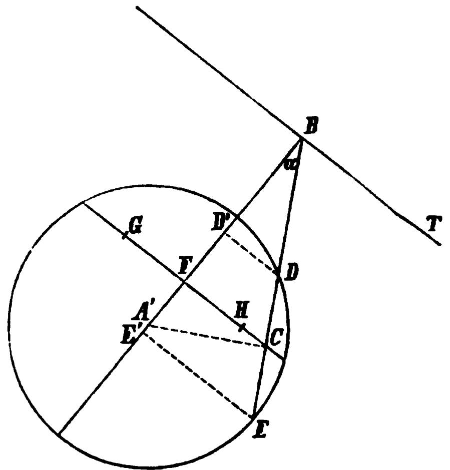


(M. 309.)

Ebenen, die der Projectionsebene Π_1 parallel sind, deren Projectionen auf eine dazu verticale Ebene Π_2 also Gerade $B''C''$, $B_1''C_1''$, $B_2''C_2''$,

sind, schneiden die Kugel in Kreisen, welche die Diameter $B''C''$, $B_1''C_1''$, $B_2''C_2''$, ... haben; die Projectionen dieser Kreise auf Π_1 sind mit ihnen congruent und haben A' zum Centrum. Ein Kugelkreis, dessen Ebene nicht mit der Projectionsebene parallel ist, hat sein Centrum auf dem seiner Ebene normalen Diameter, projicirt sich also als Ellipse, deren Mittelpunkt auf dem Lothe liegt, das von der Projection des Kugelcentrums auf die Spur der Kreisebene gefällt wird.

Ist der Kreis um A' die Projection der Kugel, T die Spur einer Schnittebene E, $A'B$ normal zu T, α der Neigungswinkel der Schnittebene zur Projectionsebene und $A'C$ normal zu BC, so ist BE die Umlegung der durchs Centrum des Schnittkreises gehenden Falllinie der Ebene E, C die Umlegung des Schnittkreiscentrums und ED die des Diameters des Schnittkreises. Zieht man $CF \perp A'B$, so ist F das Centrum der Ellipse, als welche sich der Schnittkreis projicirt; die grosse Achse GH ist gleich DE und liegt auf FC, die kleine Achse ist die Projection $D'E'$ der Strecke DE auf die Gerade $A'B$.

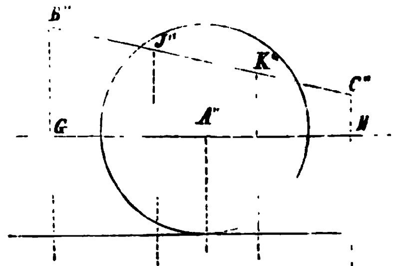


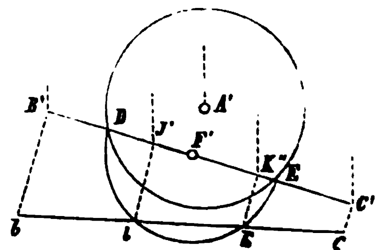
(M. 810.)

Kugelkreise, deren Ebenen unter einander parallel, aber nicht parallel zur Projectionsebene sind, projiciren sich als Ellipsen, deren Centra auf einer Geraden liegen, die durch die Projection des Kugelcentrums normal zur Richtung der Spuren der Kreisebenen gezogen ist; auf dieser Geraden liegen zugleich die kleinen Achsen der Projections-Ellipsen. Alle diese Ellipsen sind einander ähnlich, d. h. sie haben dasselbe Achsenverhältniss; denn das Verhältniss der kleinen Achse zur grossen ist bei allen diesen Ellipsen gleich dem Cosinus des Neigungswinkels der Parallelebenen gegen die Projectionsebene.

4. Sind die beiden Projectionen einer Kugel und einer Geraden BC gegeben, so können wir die Projectionen der Schnittpunkte der Kugel und der Geraden in folgender Weise bestimmen.

Wir legen durch BC eine verticale Ebene E; dieselbe schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Diameter DE und dessen Centrum die Projection F des Punktes A auf die Ebene E ist. Legen wir durch A eine horizontale Ebene und legen E in diese Ebene um, so wird die Umlegung der Geraden BC (oder vielmehr die horizontale Pro-





(M. 811.)

jection dieser Umlegung) gewonnen, indem wir $B'b \perp B'C'$ und gleich GB'', sowie $C'c \perp B'C'$ und gleich HC' machen, und b mit c verbinden. Die Umlegung des Kreises, in welchem die Kugel von E geschnitten wird, ist der um F' mit Radius DF' geschlagene Kreis. Die Schnittpunkte i und k dieses Kreises mit bc sind die Umlegungen der Punkte, in denen die Kugel von der Geraden BC geschnitten wird; aus ihnen werden die Grundrisse I', K' und die Aufrisse I'', K'' gefunden.

5. Die Lage eines Rotationscylinders gegen eine Kugel hängt von dem Radius der Kugel, dem Radius des Cylinders und dem Abstande der Cylinderachse von dem Kugelcentrum ab.

Ist der Abstand des Kugelcentrums von der Cylinderachse grösser, als die Summe der beiden Radien, so hat der Cylinder mit der Kugel keinen Punkt gemein.

Ist der Abstand des Kugelcentrums von der Cylinderachse gleich der Summe der Radien, so hat die Kugel mit dem Cylinder den Punkt gemein, der auf dem zur Cylinderachse normalen Radius liegt; und ausserdem keinen Punkt. Die Ebene, welche durch den gemeinsamen Punkt normal zum Kugelradius gelegt wird, ist von dem Kugelcentrum um den Kugelradius, von der zu ihr parallelen Cylinderachse um den Cylinderradius entfernt, tangirt also die Kugel und den Cylinder. Man sagt daher: Die Kugel und der Cylinder berühren sich in dem gemeinsamen Punkte.

Ist die Summe der Radien grösser und ihre Differenz kleiner als der Abstand des Kugelcentrums von der Cylinderachse, so durchschneiden sich die Kugel und der Cylinder entlang einer Curve, die aus einem einzigen Zuge besteht.

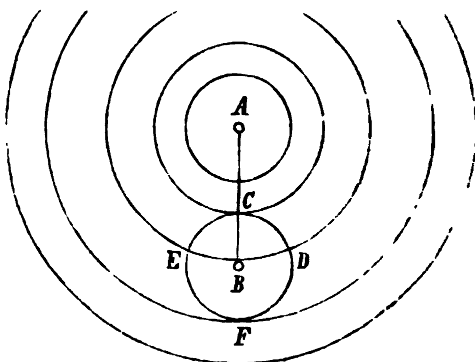
Ist die Differenz der Radien gleich dem Abstande des Kugelcentrums von der Cylinderachse, so berühren sich die Kugel und der Cylinder in dem Kugelpunkte, der auf dem zur Cylinderachse normalen Radius liegt; ist der Cylinderradius grösser, als der Kugelradius, so haben die Kugel und der Cylinder ausser dem Berührungspunkte keinen Punkt gemein; ist dagegen der Cylinderradius kleiner, als der Kugelradius, so durchdringt der Cylinder die Kugel in einer Curve, die aus einem Zuge besteht, und die den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat.

Ist die Differenz der Radien grösser als der Abstand des Kugelcentrums von der Cylinderachse und der Kugelradius kleiner als der Cylinderradius, so liegt die Kugel ganz im Innern des Cylinders, ohne mit ihm einen Punkt gemein zu haben ist der Kugelradius der grössere, so durchdringt der Cylinder die Kugel in einer Curve, die aus zwei getrennten Zügen besteht, durch welche die Kugel in zwei, der Cylinder in drei vollkommen getrennte Stücke zerschnitten werden.

Diese Verhältnisse lassen sich am leichtesten übersehen, wenn man durch das Kugelcentrum eine Ebene normal zur Cylinderachse legt und auf dieselbe die Kugel und den Cylinder projicirt; die Kugel projicirt sich als Hauptkreis, die Projection des Cylinders ist ein Parallelkreis desselben, die Centrale beider Kreise AB ist der Abstand des Kugelcentrums A von der Cylinderachse.

Wenn sich die beiden Kreise ausschliessen, so haben Kugel und Cylinder keinen Punkt gemein. Wenn sie sich von aussen berühren, so berühren sich Kugel und Cylinder in dem Berührungspunkte der beiden Kreise und die durch die gemeinsame Tangente der Kreise normal zur Projectionsebene gelegte Ebene tangirt sowol Kugel als Cylinder. Wenn sich die Kreise zweimal schneiden, so

haben Kugel und Cylinder eine Curve gemein, die auf der der Kugel zugewandten Seite des Cylinders zwischen den Mantellinien liegt, die durch D und E gehen, und von diesen Mantellinien berührt wird. Wenn der Kreis um A den Kreis um B einschliesst und berührt, so durchdringt der Cylinder die Kugel in einer Curve, die aus einem Zuge besteht und F zum Doppelpunkte hat. Schliesst der Kreis um A den Kreis um B ein, ohne ihn zu berühren, so durchdringt der Cylinder die Kugel in zwei getrennten Curven.



(M. 312.)

6. Wir wollen die Construction der Durchdringungscurve eines Cylinders und einer Kugel für den Fall durchführen, der durch das Auftreten eines Doppelpunktes besonderes Interesse hat. (Tafel VIII, 4.)

Wir nehmen an, die Kugel berühre die erste Projectionsebene, die durch das Kugelcentrum A und die Cylinderachse BC bestimmte Ebene sei parallel der ersten Projectionsebene Π_1, und die Cylinderachse sei parallel zur Achse. Wir grenzen den Cylinder durch zwei Parallelkreise ab, und legen den einen Parallelkreis (oder seine obere Hälfte) in die durch die Cylinderachse geführte Horizontalebene um. Diesen Kreis theilen wir in eine genügende Anzahl gleicher Theile, am besten von E aus, in eine durch vier theilbare Zahl, damit auch die höchste und die tiefste Mantellinie bei der weiteren Construction betheiligt werden. Durch diese Theile ziehen wir Mantellinien des Cylinders und construiren die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der Kugel.

Die Aufrisse der zu h gehörigen Mantellinien HI und H_1I_1 werden erhalten, indem wir $C'H'' = C'H_1'' = hH'$ von C' aus auf $C''\Gamma''$ abtragen und $H''I''$, $H_1''I_1''$ parallel BC ziehen; construiren wir um A'' einen Kreis mit Diameter KK'', so sind die Schnittpunkte $N''M''$ $N_1''M_1''$ dieses Kreises mit $H''I''$, $H_1''I_1''$ die Aufrisse der Schnittpunkte der Mantellinien HI und H_1I_1 mit der Kugel.

Um die Punkte zu haben, in welchen der Aufriss der Durchdringungscurve den Aufriss der Kugel berührt, construiren wir noch die Schnittpunkte der Kugel mit den Mantellinien des Cylinders, deren Grundriss durch A' geht.

Die Richtungen, unter denen sich die Curvenzweige im Doppelpunkte durchschneiden, erhalten wir auf ähnlichem Wege, wie bei der Durchdringung zweier Cylinder.

Wir verbinden den Doppelpunkt Δ mit dem Curvenpunkte, der auf der zu h gehörenden Mantellinie liegt. Ist r der Kugel- und ρ der Cylinderradius, so ist die Höhe dieser Mantellinie über der durch das Kugelcentrum gehenden Horizontalebene.

1. $$hH' = N''O = N_1''O = \rho \sin\varphi.$$

Ferner ist

$$A'L = r - L\Delta' = r - H'E$$
$$= r - \rho(1 - \cos\varphi) = r - 2\rho \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$KL = \sqrt{r^2 - A'L^2} = \sqrt{4r\rho\, sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4\rho\, sin^4 \frac{\varphi}{2}}$$

$$2. \quad = 2\, sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{r\rho - \rho^2\, sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Da nun $N''A'' = N_1''A'' = KL$, so folgt

$$sin\, N''A''O = sin\, N_1''A''O = \frac{N''O}{N''A''} = \rho\, sin\, \varphi : 2\, sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{r\rho - \rho\, sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= 2\rho\, sin \frac{\varphi}{2} \cdot cos \frac{\varphi}{2} : 2\, sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{r\rho - \rho^2\, sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

also 3. $$sin\, N''A''O = \rho\, cos \frac{\varphi}{2} : \sqrt{r\rho - \rho\, sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Lässt man nun den Winkel φ bis zur Grenze Null abnehmen, so ergiebt diese Formel den Sinus des Winkels ε, unter welchen die Doppelpunktstangenten nach oben und unten gegen die durch das Kugelcentrum und die Cylinderachse gelegte Ebene geneigt sind. Setzt man in 3. $cos \frac{\varphi}{2} = 1$, $sin \frac{\varphi}{2} = 0$, so erhält man

$$4. \quad sin\, \varepsilon = \rho : \sqrt{r\rho} = \sqrt{\frac{\rho}{r}}.$$

Die Höhen (über und unter $B''C''$) der Punkte, in denen die Doppelpunktstangenten den Aufriss der Kugel schneiden, ergeben sich zu

$$5. \quad r\, sin\, \varepsilon = r \sqrt{\frac{\rho}{r}} = \sqrt{\rho r}.$$

Macht man also $A''Q = \rho$ und schlägt einen Kreis, der PQ zum Diameter hat, und zieht $TR \parallel US \parallel B''C''$, so sind $A''T$ und $A''U$ die Doppelpunktstangenten.

Legt man im Cylindernetz durch den Netzpunkt Δ eine Parallele zur ausgestreckten Cylinderbasis und trägt auf ihr die Strecken $\Delta r = \Delta s = A''R$ ab, zieht durch r und s Mantellinien und schneidet auf diesen nach derselben Seite hin $rt = su = RT$ ab, so sind Δt und Δu die Doppelpunktstangenten der Durchdringungscurve im Netze.

Der Schnitt der durch einen Punkt der Durchdringungscurve gehenden Tangentialebenen der Kugel und des Cylinders ist die Tangente der Durchdringungscurve in diesem Punkte. Construiren wir die Spuren der beiden Tangentialebenen auf der durch das Kugelcentrum gehenden Horizontalebene, so ist der Schnitt dieser Spuren die Spur der Tangente auf derselben Ebene.

Um die Tangente im Punkte V zu projiciren, ziehen wir $V'v \perp A'V'$; da wir den Kreis um A' auch als Umlegung des verticalen Hauptkreises der Kugel betrachten können, der durch V geht (umgelegt in die durch A gehende Horizontalebene), so ist v die Umlegung von V. Ziehen wir nun $vw \perp vA'$, so so ist vw die Umlegung einer Kugeltangente und zugleich die Projection der in V die Kugel berührenden Ebene auf die Ebene des verticalen Hauptkreises durch den Punkt V. Es ist daher w ein Punkt der Spur dieser Tangentialebene und der durch A gelegten Horizontalebene; die Spur Ww selbst geht durch w normal zu $A'w$.

Ziehen wir $XY \perp C'Y$, so ist X ein Punkt der Geraden, in welchem die Ebene, die den Cylinder entlang der Mantellinie VY berührt, die durch A gelegte Horizontalebene durchschneidet; die Gerade $XW \parallel B'C'$ ist daher der Grundriss dieser Schnittlinie selbst.

Hieraus ergeben sich der Punkt W als der Schnittpunkt der in V an die Durchdringungscurve gelegten Tangente mit der Horizontalebene durch A, und die Projectionen $W'V'$ und $W''V''$ der Tangente.

Bei der Construction des Cylindernetzes hat man von dem Punkte V des Netzes aus nach E zu normal zu den Mantellinien YX abzuschneiden, durch X die Mantellinie zu ziehen, XW darauf abzutragen und W mit dem Netzpunkte V zu verbinden; dann ist WV die Tangente in V an die Durchdringungscurve im Netze.

7. Um über den Schnitt zweier Kugeln zu urtheilen, legen wir eine Ebene durch beide Kugelcentren; diese Ebene schneidet die Kugeln in Hauptkreisen, K_1 und K_2. Man sieht:

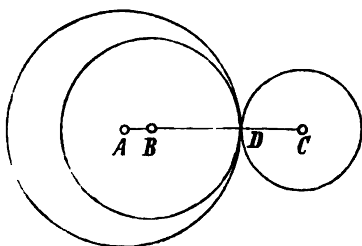
Ist die Summe der Radien kleiner, oder die Differenz der Radien grösser als die Centrale (die Strecke zwischen den Centren), so haben die Kugeln keinen gemeinsamen Punkt.

Ist die Summe oder die Differenz der Radien gleich der Centralen, so berühren sich die Kugeln in einem auf der Centralen liegenden Punkte, und zwar im ersten Falle von aussen, im andren einschliessend.

Ist die Summe der Radien grösser und zugleich die Differenz kleiner als die Centrale, so haben die Kugeln einen Kreis gemein, dessen Ebene normal zur Centralen steht und der durch die gemeinsamen Punkte der Kreise K_1 und K_2 geht.

8. Wir betrachten nun den Schnitt dreier Kugeln.

Wir legen die Projectionsebene durch die Centren A, B, C; die Projectionen der Kugeln sind die mit den Kugelradien r, s, t um A, B, C geschlagenen Kreise K, L, M.

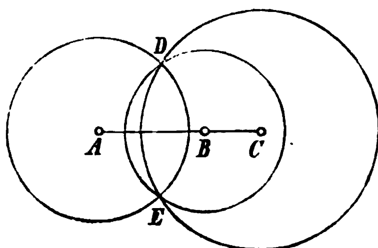


(M. 313.)

Liegen A, B, C auf einer Geraden und haben K, L, M einen gemeinsamen Punkt D, so berühren sich die drei Kugeln in diesem Punkte.

Liegen die Mittelpunkte A, B, C auf einer Geraden und haben die Kreise K, L, M zwei Punkte D und E gemein, so haben die drei Kugeln den Kreis gemein, der D und E zum Diameter hat.

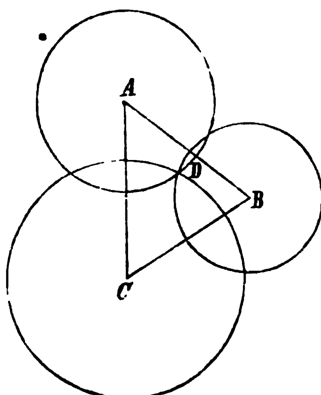
Sind A, B, C die Ecken eines Dreiecks und haben die Kreise K, L, M einen und nur einen Punkt D gemein, so haben die Kugeln diesen Punkt D und sonst keinen gemein und haben in D eine gemeinsame Tangente, welche lothrecht zur Centralebene ABC ist.



(M. 314.)

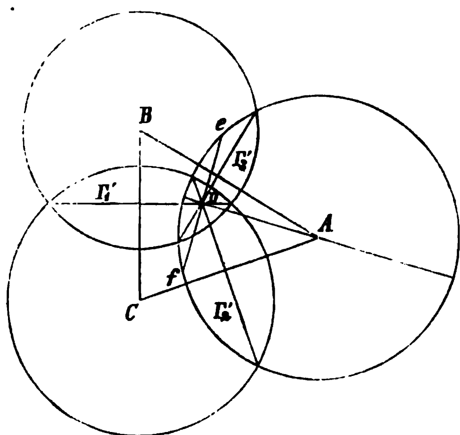
Sollen die drei Kugeln einen ausserhalb der Ebene der Centren liegenden Punkt gemein haben, so müssen je zwei der Kugeln sich schneiden. Die Ebenen Γ_1, Γ_2, Γ_3 der Schnittkreise haben als Projection auf ABC die Chordalen Γ_1', Γ_2', Γ_3' der drei Kreise um A, B und C; diese schneiden sich bekanntlich in einem Punkte D, der für die drei Kreise gleiche Potenz hat; die Ebenen Γ_1, Γ_2, Γ_3 schneiden sich daher in der Geraden, die durch D normal zur Ebene der Centren geht.

Liegt nun der Chordalpunkt D innerhalb eines der drei Kreise, so liegt er bekanntlich auch innerhalb der beiden anderen. Sind E und F die beiden Punkte der Kugel K_1, deren Projection auf die Ebene der Centren mit D zusammenfällt, so liegen E und F auf dem Kreise der Kugel K_1, dessen Projection in Γ_2' fällt, sowie auf dem Kreise von K_1, dessen Projection in Γ_3' fällt, also liegen E und F auch auf den Kugeln K_2 und K_3, sind also die Schnittpunkte der drei Kugeln. Zieht man DA und macht $De \perp DA$, so ist $De = Df$ der gemeinsame Abstand der beiden Kugelschnittpunkte E und F von der Centralebene ABC der drei Kugeln.



(M. 815.)

Zieht man in den Kreisen K_2 und K_3 Sehnen, welche normal zu BD und CD sind, so sind diese beiden Sehnen gleich der Sehne ef; denn die zweiten Potenzen der Hälften dieser drei Sehnen sind die Potenz des Punktes D für die drei Kreise, und sind gleich, weil D gleiche Potenz für alle drei Kreise hat.



(M. 316.)

§ 10. Der Rotationskegel.

1. Der Rotationskegel ist die Fläche, welche durch Rotation einer Geraden um eine Gerade entsteht, die von ihr geschnitten wird; die letztere Gerade heisst die Achse des Rotationskegels, die erstere heisst in jeder ihrer bei der Rotation erreichten Lagen Mantellinie des Kegels. Der spitze Winkel, den die rotirende Gerade mit der Rotationsachse bildet (also den Winkel jeder Mantellinie mit der Kegelachse) wird als Meridianwinkel des Kegels bezeichnet. Der Schnittpunkt der rotirenden Geraden mit der Kegelachse heisst die Spitze des Kegels. Der Rotationskegel besteht aus zwei congruenten Theilen, die durch die Spitze von einander getrennt werden.

Man kann den Rotationskegel auch als den Ort der Punkte definiren, deren Abstand von einer festen Geraden (Kegelachse) zum Abstand von einem festen Punkte dieser Geraden (Kegelspitze) ein gegebenes Verhältniss hat; dieses Verhältniss ist der Sinus des Meridianwinkels.

Jede Ebene, die normal zur Kegelachse ist und nicht durch die Spitze geht, schneidet den Kegel in einem Kreise, einem Parallelkreise des Rotationskegels; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnitt seiner Ebene mit der Kegelachse. Ist α der Meridianwinkel des Kegels und d der Abstand der Parallelkreisebene von der Kegelspitze, so ist der Radius des Parallelkreises

$$r = d \cdot \tang \alpha.$$

Zwei gleich weit von der Spitze entfernte Parallelkreise sind daher gleich

2. Für die Lage eines Rotationskegels gegen eine Ebene, die durch die Spitze des Kegels geht, ergeben sich folgende Fälle:

Ist der Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Ebene grösser, als der Meridianwinkel des Kegels, so hat der Kegel mit der Ebene ausser der Kegelspitze keinen weiteren Punkt gemein.

Ist der Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Ebene gleich dem Meridianwinkel, so hat der Kegel mit der Ebene eine Mantellinie gemein, nämlich die Projection der Kegelachse auf die Ebene; der Kegel und die Ebene berühren sich entlang dieser Mantellinie.

Ist der Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Ebene kleiner, als der Meridianwinkel, so schneidet die Ebene den Kegel in zwei Mantellinien, die symmetrisch zur Projection der Kegelachse auf die Schnittebene liegen. Der Winkel dieser Schnittlinien ist kleiner als der Meridianwinkel, ausser wenn die Ebene durch die Kegelachse geht; denn dann wird der Kegel in zwei Mantellinien geschnitten, die symmetrisch zur Kegelachse liegen.

Legt man eine Ebene Π normal zur Kegelachse und bezeichnet den auf ihr liegenden Parallelkreis des Kegels mit K, die Spur der durch die Kegelspitze gehenden Ebene E auf der Ebene Π mit S, so hat die Schnittebene mit dem Kegel keine Mantellinie gemein, wenn die Gerade S den Kreis K nicht trifft; berührt S den Kreis K in einem Punkte A, so berührt die Ebene E den Kegel entlang der durch A gehenden Mantellinie; schneiden sich S und K in zwei Punkten B und C, so schneidet die Ebene E den Kegel in den beiden Mantellinien, die durch B und C gehen.

3. Um die Lage einer Geraden a gegen einen Rotationskegel zu beurtheilen, durch dessen Spitze die Gerade a nicht geht, lege man eine Ebene E durch a und durch die Kegelspitze. Hat diese Ebene mit dem Kegel keine Mantellinie gemein, so trifft die Gerade a den Kegel nicht. Berührt E den Kegel entlang einer Mantellinie, und wird diese Mantellinie von a in einem Punkte A geschnitten, so hat der Kegel mit der Geraden a diesen Punkt A und sonst keinen gemein, die Gerade a tangirt den Kegel in diesem Punkte. Auch dann, wenn a mit der Mantellinie parallel ist, kann man sagen, dass a den Kegel berührt; insofern man sagen kann, dass parallele Gerade einen unendlich fernen Punkt gemeinsam haben, insofern kann man in unserem Falle auch sagen, dass die Gerade a den Kegel in einem unendlich fernen Punkte berührt.

Schneidet die Ebene E den Kegel in zwei Mantellinien, so schneidet die Gerade a den Kegel in den beiden Punkten, die sie mit diesen Mantellinien gemein hat. Ist die Gerade a mit der einen dieser beiden Mantellinien parallel so kann man sagen, dass sie den Kegel in einem erreichbaren und in einem unendlich fernen Punkte schneidet.

4. Aus dem soeben Mitgetheilten folgt, dass alle Tangenten eines Kegels, die einer festen Richtung parallel sind, die beiden Ebenen erfüllen, die durch die Kegelspitze parallel der festen Richtung gehen und den Kegel berühren. diese Ebenen gehen durch die Gerade, die durch die Kegelspitze der festen Richtung parallel gelegt ist.

Um die Tangentialebenen eines Rotationskegels zu finden, die durch eine durch die Kegelspitze gehende Gerade a gelegt werden können, schneiden wir den Kegel und die Gerade durch eine Parallelkreisebene Π des Kegels, den Kegel in einem Parallelkreise K, die Gerade a in einem Punkte A. Die Ge-

raden, in denen die durch *a* gehenden Tangentenebenen des Kegels die Ebene Π schneiden, sind die von *A* an den Kreis *K* gelegten Tangenten. Je nachdem nun *A* innerhalb des Parallelkreises, auf demselben, oder ausserhalb liegt, kann man von *A* keine Tangente, eine, oder zwei an den Parallelkreis, und daher durch *a* keine, eine oder zwei Tangentenebenen an den Kegel legen.

Die Geraden, die durch die Kegelspitze gehen und mit der Achse einen Winkel bilden, der kleiner wie der Meridianwinkel ist, können als im Innern des Kegels liegend bezeichnet werden.

Ferner wollen wir bemerken, dass die Aufgabe, durch einen Punkt Tangentenebenen an einen Kegel zu legen, mit der identisch ist, Tangentenebenen durch die Gerade zu legen, die den Punkt mit der Kegelspitze verbindet. Wenn man dies beachtet, so ergeben sich aus dem Vorhergehenden die Bemerkungen:

Durch einen Punkt oder durch eine die Kegelspitze enthaltende Gerade lassen sich keine, eine oder zwei Tangentenebenen an einen Rotationskegel legen, je nachdem der Punkt oder die Gerade im Innern des Kegels, auf dem Kegel oder ausserhalb desselben liegt.

Im Anschluss hieran ergiebt sich noch:

Um zu beurtheilen, ob parallel einer festen Richtung Gerade gezogen werden können, die einen Kegel nicht treffen, ziehe man durch die Spitze eine Gerade *a* der Richtung parallel. Liegt diese Gerade im Innern des Kegels, so schneidet jede zu ihr parallele Gerade den Kegel in zwei Punkten, von denen keiner unendlich fern ist, und die auf beide durch die Spitze getrennten Hälften des Kegels vertheilt sind. Ist die Gerade *a* eine Mantellinie des Kegels, so giebt es unter den zu ihr parallelen Geraden solche, die den Kegel in einem unendlich fernen Punkte berühren; dieselben liegen auf der durch *a* gehenden Tangentenebene des Kegels; alle anderen zu *a* parallelen Geraden treffen den Kegel in einem endlich fernen und in einem unendlich fernen Punkte.

Liegt die Gerade *a* ausserhalb des Kegels, so lege man durch *a* zwei Tangentenebenen an den Kegel; diese theilen den Raum in vier Flächenwinkel; in dem einen Winkel liegt die eine Hälfte, im Scheitelwinkel die andere Hälfte des Kegels, die beiden anderen Scheitelwinkel enthalten keinen Punkt des Kegels (ausser der auf der Kante liegenden Kegelspitze). Die Parallelen zu *a*, welche in den Scheitelwinkeln liegen, die den Kegel nicht enthalten, treffen den Kegel nicht; die Parallelen zu *a*, welche in den Scheitelwinkeln liegen, die den Kegel enthalten, treffen jede den Kegel in zwei Punkten, die auf derselben Kegelhälfte liegen; die Parallelen zu *a*, welche auf den durch *a* gehenden Tangentenebenen liegen, tangiren den Kegel.

5. Die Parallelprojection eines Rotationskegels bedeckt entweder die ganze Projectionsebene oder nur einen Theil derselben; welcher von beiden Fällen eintritt, hängt von der Richtung der Kegelachse gegen die Projectionsstrahlen ab.

Ist der Winkel, den die Kegelachse mit den Projectionsstrahlen bildet, kleiner als der Meridianwinkel (liegt also die durch die Kegelspitze parallel zu den Projectionsstrahlen gezogene Gerade *a* im Innern des Kegels), so schneidet jeder Projectionsstrahl den Kegel zweimal; also ist jeder Punkt der Projectionsebene die Projection zweier Kegelpunkte, die auf die beiden durch die Spitze getrennten Kegelhälften vertheilt sind. Eine Ausnahme hiervon macht nur der Punkt, der die Projection der Kegelspitze ist.

Ist der Winkel zwischen der Kegelachse und der Richtung der Projections-

strahlen gleich dem Meridianwinkel (liegt also die durch die Spitze zu den Projectionsstrahlen gezogene Parallele a auf dem Kegel), so construire man die Ebene E, die den Kegel entlang a berührt. Alle Punkte, die auf der Spur S dieser Ebene liegen, haben Projectionsstrahlen, die den Kegel nicht (oder wenigstens in keinem erreichbaren Punkte) schneiden, mit Ausnahme des Punktes, in welchem S von a geschnitten wird, denn dieser Punkt ist die Projection von allen den Punkten des Kegels, die auf der Mantellinie a liegen. Die eine Kegelhälfte liegt ganz auf der einen, die andere ganz auf der anderen Seite von E und beide ruhen auf E entlang den beiden durch die Spitze getrennten Hälften der Mantellinie a. Die Punkte der Projectionsebene, die auf einer Seite von S liegen, sind die Projectionen je eines Punktes der einen Kegelhälfte, die auf der andern Seite von S liegenden Punkte gehören zur andern Kegelhälfte.

Ist also der Winkel zwischen der Kegelachse und den Projectionsstrahlen gleich dem Meridianwinkel, so bedeckt die Projection des Kegels die ganze Projectionsebene mit Ausnahme der Geraden S; die auf beiden Seiten von S liegenden Hälften der Projectionsebene sind die Projectionen je einer Kegelhälfte; jeder Punkt der Projectionsebene ist die Projection eines und nur eines Kegelpunktes. Die Punkte auf S sind nicht Projectionen von Kegelpunkten, bis auf einen von ihnen, der die Projection der Mantellinie des Kegels ist, deren Richtung mit den Projectionsstrahlen parallel ist.

Ist der Winkel zwischen der Kegelachse und den Projectionsstrahlen grösser als der Meridianwinkel (liegt also die durch die Kegelspitze zu den Projectionsstrahlen gezogene Parallele a ausserhalb des Kegels), so lege man durch a zwei Tangentenebenen E und E_1 an den Kegel; deren Spuren seien S und S_1. Der Schnittpunkt dieser Spuren ist die Projection der Kegelspitze. Die beiden von S und S_1 gebildeten Scheitelwinkel, die in den beiden von E und E_1 eingeschlossenen Flächenwinkel liegen, in denen der Kegel liegt, enthalten die Punkte der Projectionsebene, deren Projectionsstrahlen den Kegel zweimal und zwar auf derselben Hälfte schneiden; jeder dieser beiden Scheitelwinkel ist also die Projection einer Kegelhälfte und zwar ist jeder Punkt die Projection zweier Punkte dieser Hälfte. Die Punkte der beiden anderen von S und S_1 eingeschlossenen Scheitelwinkel sind nicht Projectionen von Kegelpunkten. Die Geraden S und S_1 sind die Projectionen der Mantellinien, entlang welcher die Ebenen E und E_1 den Kegel berühren.

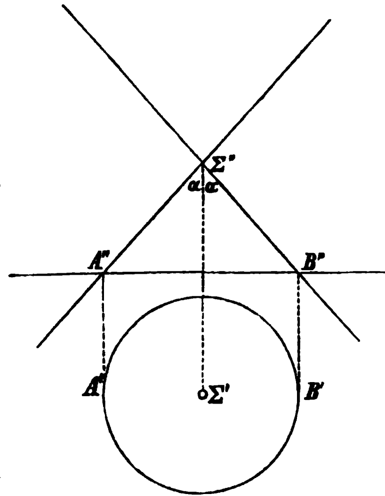
Projicirt man einen Rotationskegel auf eine Ebene Π_1 normal zur Kegelachse und auf eine Ebene Π_2 parallel zur Kegelachse, so bedeckt die erste Projection des Kegels die ganze Ebene Π_1 und jeder Punkt von Π_1 ist die Projection zweier gleich weit von der Kegelspitze entfernten Punkte.

Die Projection auf Π_2 wird von zwei Geraden begrenzt, die die Projection der Kegelachse in der Projection der Spitze schneiden und mit ihr nach beiden Seiten hin den Meridianwinkel einschliessen.

Die Parallelkreise des Kegels projiciren sich in der ersten Projection als Kreise, welche die Projection der Spitze zum gemeinsamen Centrum haben; in der zweiten Projection erscheinen sie als Gerade, die normal zur Projection der Kegelachse sind.

Wir wollen im Folgenden — wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist — die horizontale Projectionsebene immer normal zur Kegelachse wählen.

Sind Σ' und Σ'' die Projectionen der Spitze, so ist $\Sigma'\Sigma''$ der Aufriss der Kegelachse; ist der Meridianwinkel α, so ziehe man $\Sigma''A''$ und $\Sigma''B''$ so, dass sie mit der Achsenprojection den Winkel α bilden; dann ist der Winkel $A''\Sigma''B''$ und sein Scheitelwinkel der Aufriss des Kegels. Die Spur des Kegels auf der Horizontalebene ist der um das Centrum Σ' mit dem Diameter $A'B' = A''B''$ beschriebene Kreis.



(M. 317.)

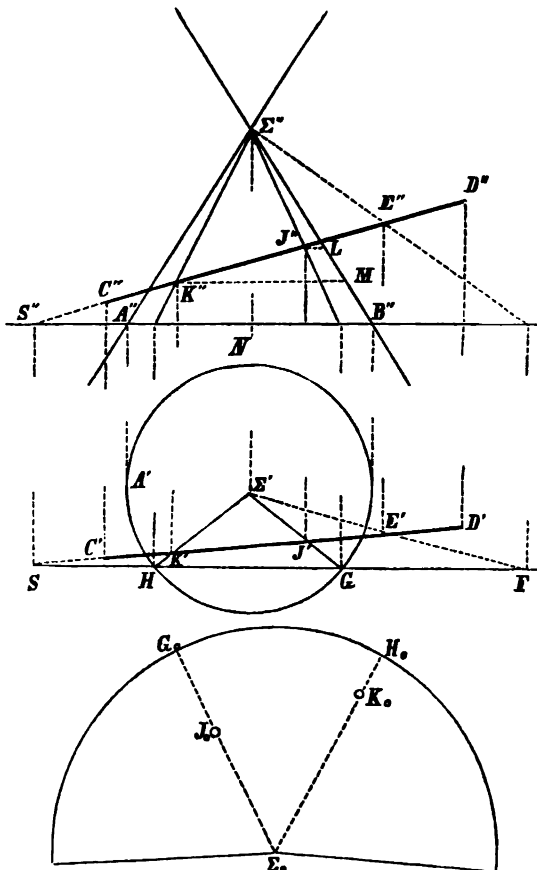
6. Um die Schnittpunkte eines Rotationskegels mit einer ihn schneidenden Geraden darzustellen, suchen wir die horizontale Spur S der Schnittgeraden BC auf; verbinden ferner die Kegelspitze Σ mit einem passenden Punkte E der Geraden BC und bestimmen die Horizontalspur F dieser Geraden ΣE.

Dann ist SF die Horizontalspur der durch Σ und BC gelegten Ebene. Soll BC den Kegel schneiden, so muss diese Spur SF die Horizontalspur des Kegels zweimal schneiden.

Verbinden wir die Schnittpunkte G und H mit Σ, so sind ΣG und ΣH die Schnittlinien des Kegels und der Ebene ΣBC; mithin sind I und K die Schnittpunkte des Kegels mit der Geraden BC.

7. Betrachtet man den Rotationskegel als eine Ecke von unzählig vielen verschwindend schmalen Seitenflächen, so sieht man, dass sich der Kegel in eine Ebene ausbreiten lässt. Zerschneidet man die Kegelfläche längs einer Mantellinie und breitet dann die Fläche dann aus, so giebt die Ausbreitung zwei Scheitelwinkel; die Mantellinien sind auch in der Ausbreitung Gerade durch die Kegelspitze.

Die Punkte eines Parallelkreises sind gleichweit von der Spitze entfernt, werden also in der Ausbreitung zu Punkten



(M. 318.)

eines Kreises, der um die Kegelspitze beschrieben ist und die auf einer Mantellinie zwischen der Spitze und dem Parallelkreise liegende Strecke zum Radius hat.

Ist m diese Strecke und α der Meridianwinkel des Kegels, so ist der Radius ρ des Parallelkreises

$$\rho = m \sin \alpha;$$

der Umfang des Parallelkreises ist daher

$$u = 2\pi\rho = 2\pi m \sin \alpha.$$

Der Winkel x, welchen wir (nebst seinem Scheitelwinkel) als Ausbreitung des Kegels erhalten haben, gehört als Centriwinkel im Kreise mit dem Radius m zum Bogen u; also ist der Arcus dieses Winkels:

$$arc\, x = \frac{u}{m} = 2\pi \cdot \sin \alpha,$$

und der Winkel in Gradmass:

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot arc\, x = 360^\circ \cdot \sin \alpha.$$

Um diesen Winkel angenähert zu finden, wird man wie folgt verfahren:

Man zeichnet eine Strecke a, die gleich dem Umfange u eines Parallelkreises ist.

Man zeichnet eine Strecke b gleich dem Umfange des Kreises, der das von der Kegelspitze bis zum Parallelkreise reichende Stück m einer Mantellinie zum Halbmesser hat, sowie diesen Kreis μ selbst.

Man theilt die Strecke b und den Kreis μ in zwölf gleiche Theile, und schneidet ein solches Zwölftel so oft als möglich von der Strecke a ab; es sei dies $n$mal möglich, und es bleibe noch ein Rest a_1, so dass man hat

$$a = \frac{b}{12} \cdot n + a_1.$$

Man construire im Kreis mit dem Halbmesser m den Centriwinkel φ, dessen Bogen gleich a_1 ist.

Die Ausbreitung des Kegels ist dann der Winkel

$$x = 30^\circ \cdot n + \varphi \cdot$$

Um Punkte in das Netz einzutragen, dessen Grundrisse und Aufrisse vorliegen, z. B. I und K, theilen wir den Umfang des Parallelkreises AB, der zur Construction des Winkels x benützt wurde, von der Mantellinie ΣN aus, entlang welchen wir den Kegel aufgeschnitten haben, in 12 gleiche Theile, entsprechend den Winkeln von 30°, die in dem Kegelnetz sich schon vorfinden.

Hierauf construiren wir die Strecken, die den Bogen NG und NH gleich sind, und die Winkel des Kreises mit dem Radius m, deren Bogen gleich den Strecken NG und NH sind. Dadurch erhalten wir im Netz die Mantellinien $\Sigma_0 G_0$ und $\Sigma_0 H_0$, die den Mantellinien ΣG und ΣH des Kegels entsprechen.

Ziehen wir nun im Aufriss $K''M \parallel I''L'' \parallel A''B''$, so sind $B''L$ und $B''M$ gleich den Strecken HI und GK; trägt man also auf den Mantellinien $\Sigma_0 G_0$ und ΣH_0 des Netzes von H_0 und G_0 aus die Strecken $G_0 I_0 = B''L$, $H_0 K_0 = B''M$ ab, so sind I_0 und K_0 die Netzpunkte, die den Kugelpunkten I und K entsprechen.

8. **Die Gestalt der Curve, in welcher ein Rotationskegel von einer Ebene** E geschnitten wird, ist wesentlich davon abhängig, ob die Ebene E_1, die parallel zu E durch die Kegelspitze gelegt wird, mit dem Kegel keine, eine oder zwei Mantellinien gemein hat.

Hat E_1 mit dem Kegel keine Mantellinie gemein, so liegen die Kegelhälften

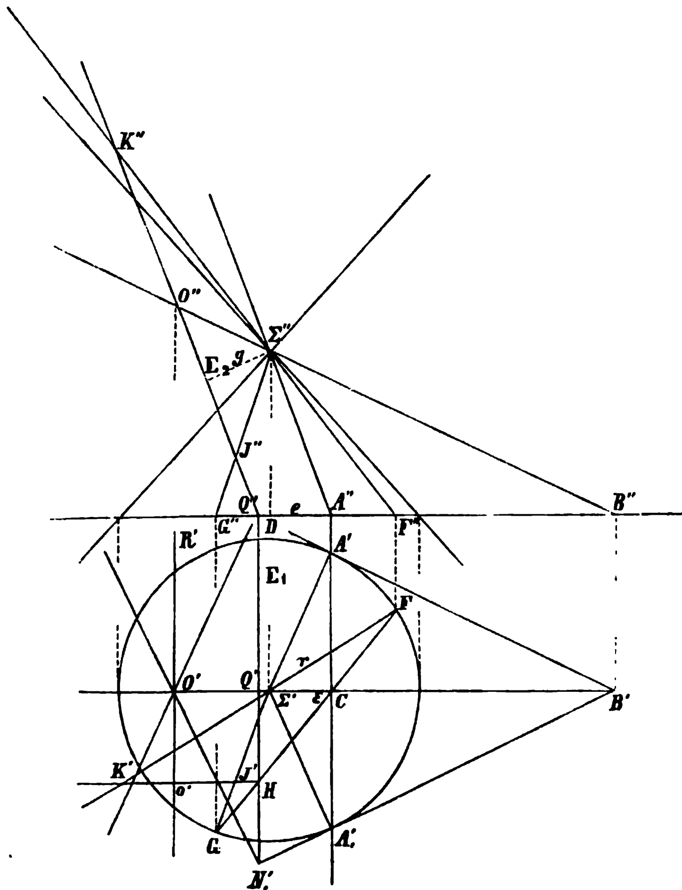
auf entgegengesetzten Seiten von E_1 und die gegebene Ebene E ist mit keiner Mantellinie parallel, sondern trifft alle Mantellinien in Punkten, die im Endlichen liegen. Die Schnittcurve ist daher eine geschlossene, aus einem Zuge bestehende Curve; wir werden dann beweisen, dass die Schnittcurve in diesem Falle eine Ellipse ist.

Enthält die Parallelebene E_1 eine Mantellinie a, so ist die Ebene E dieser Mantellinie parallel, ein Punkt der Durchdringungscurve, der auf dieser Mantellinie liegt, ist also unendlich fern. Da auch jetzt die beiden Kegelhälften auf entgegengesetzten Seiten von E_1 liegen, so schneidet E nur die eine Kegelhälfte Die Schnittcurve besteht daher aus einem Zuge, und erstreckt sich nach einer Richtung hin ins Unendliche. Schnittcurven dieser Art heissen **Parabeln**.

Enthält die Parallelebene E_1 zwei Mantellinien a und b, so liegt auf jeder Seite von E_1 von jeder Kegelhälfte ein Theil; ausser der Spitze haben diese Theile keinen Zusammenhang unter einander. Die Schnittebene trifft alle Mantellinien des Kegels, ausgenommen a und b, mit denen sie parallel ist. Die Schnittcurve besteht daher aus zwei getrennten Zügen, die auf den beiden Kegelhälften liegen; jeder Zug läuft nach den Richtungen der beiden Mantellinien a und b ins Unendliche. Schnittcurven dieser Art heissen **Hyperbeln**.

9. **Symmetrieverhältnisse der Kegelschnitte** (d. i. ebenen Schnittcurven des Rotationskegels).

Legt man durch die Kegelachse eine Ebene F normal zur Schnittebene, so sind der Rotationskegel und die Schnittebene zu dieser Ebene F symmetrisch; also ist auch die Curve, in welcher die Schnittebene den Kegel schneidet, zu F symmetrisch, folglich symmetrisch zu der Geraden, in welcher die Ebene E von F geschnitten wird. Diese Gerade ist die Normalprojection der Kegelachse auf die Schnittebene.



(M. 319.)

Wir schliessen hieraus: Jeder ebene Schnitt eines Rotationskegels hat die Projection der Kegelachse auf die Schnittebene zur Symmetrieachse.

Diese Symmetrieachse wird als Achse der Parabel, bez. als Hauptachse der Hyperbel bezeichnet.

Es ist ersichtlich, dass die Parabeln eine zweite Symmetrieachse nicht haben können. Bei den Hyperbeln lässt sich aber (wie bei den Ellipsen) noch eine zweite Symmetrieachse nachweisen.

Es sei der Kreis um Σ' die Horizontalspur eines Rotationskegels, Σ'' der Aufriss der Spitze, die Aufrissebene normal zur Spur E_1 der Schnittebene E. E_2 die Verticalspur von E. Machen wir $\Sigma''A''$ parallel E_2 und $A''A'_1$ normal zur Projectionsachse, so sind $\Sigma''A''$ und $A'A'_1$ die Spuren der Ebene, die durch Σ parallel zu E geht, und ΣA und ΣA_1 sind die zu E parallelen Mantellinien des Kegels. Die Ebenen, welche den Kegel entlang derselben berühren, haben die Tangenten in A' und A'_1 an die Horizontalspur des Kegels zu Spuren, schneiden sich alo in der Geraden ΣB, welche die Ebene E in O trifft.

OQ ist die Hauptachse der Schnitthyperbel; wir wollen nun beweisen, dass die durch O gehende Senkrechte zu OQ ebenfalls Symmetrieachse der Hyperbel ist.

Wir haben dazu nachzuweisen, dass alle Hyperbelsehnen, die der Hauptachse parallel sind, von den Geraden halbirt werden, die zu OQ in O normal ist; der Aufriss dieser Geraden fällt in den Punkt O'' und der Grundriss derselben $O'R'$ ist normal zu $O'Q'$.

Die Gerade ΣC ist der Hauptachse der Hyperbel parallel; die Ebene ΣFG schneidet den Kegel in den Mantellinien ΣF und ΣG und die Ebene E in der durch H gehenden Parallelen zu ΣC; also sind I und K zwei Hyperbelpunkte.

Nun ist $$HI' : C\Sigma' = GH : GC, \qquad HK' : C\Sigma' = FH : FC$$

also ist $$HI' = C\Sigma' \cdot \frac{GH}{GC}, \qquad HK' = C\Sigma' \cdot \frac{FH}{FC},$$

$$HI' + HK' = C\Sigma' \, \frac{GH \cdot FC + FH \cdot GC}{GC \cdot FC}.$$

Da nun $$GH \cdot FC + FH \cdot GC = (GC - CH)\, FC + (FC + CH)\, GC$$
$$= 2GC \cdot FC + CH(GC - FC)$$

und $$CH = Q'C : \cos\varepsilon, \quad GC - FC = 2C\Sigma' \cdot \cos\varepsilon,$$

so folgt $$\frac{1}{2}(HI' + HK') = C\Sigma' \left(1 + \frac{Q'C \cdot C\Sigma'}{A'C^2}\right).$$

Ferner ist $$C\Sigma' = A'C^2 : CB', \text{ und } Q'C : CB' = O'\Sigma' : \Sigma'B',$$

mithin $$\frac{1}{2}(HI' + HK') = C\Sigma' \left(1 + \frac{O'\Sigma'}{\Sigma'B'}\right) = C\Sigma' \cdot \frac{O'B'}{\Sigma'B'} = O'Q',$$

w. z. b. w.

Aus der Existenz zweier Symmetrieachsen folgt, dass alle durch den Schnittpunkt O der Symmetrieachsen gehenden Hyperbelsehnen in O halbirt werden; man bezeichnet daher O als den Mittelpunkt der Hyperbel.

10. Wir haben in § 4 die Ellipse charakterisirt, indem wir jeden Punkt P derselben auf die Hauptachsen projicirten und fanden, dass die dadurch von den Achsen abgeschnittenen Stücke OP' und OP', die wir mit x und y bezeichnen wollen, durch die Formeln verknüpft sind

1. $$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi;$$

wir erhalten hieraus die Projectionsabstände x und y für alle Ellipsenpunkte, wenn wir den willkürlichen Winkel φ alle Werthe von 0° bis 360° durchlaufen lassen.

Durch die Formeln 1. sind x und y mit einander verbunden; diesen Zusammenhang kann man ohne den Hülfswinkel φ in Form einer Gleichung zwischen x und y darstellen, wenn man φ aus den beiden Formeln eliminirt. Bildet man

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi,$$

quadrirt und addirt, so erhält man die gewünschte Gleichung.

2. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung 2. sagt genau dasselbe aus, wie die Formeln 1.; die Curve, für deren Punkte die projicirenden Strahlen $PP'' = x$ und $PP' = y$ durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verknüpft sind, ist also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.

In ähnlicher Weise wollen wir nun auch die Hyperbel charakterisiren: Wir projiciren jeden Hyperbelpunkt (z. B. I) auf die Symmetrieachsen, bezeichnen die dadurch auf den Achsen abgeschnittenen Stücke $O''I''$ mit x, $o'O' = HQ'$ mit y und suchen eine Gleichung zwischen x und y auf.

Ist δ der Neigungswinkel der Hyperbelebene gegen die Kegelachse, so ist

$$2x = K'I' : \sin\delta = (K'H - I'H) : \sin\delta,$$

mithin $$2x \sin\delta = \Sigma'C \cdot \frac{(FC + CG)\, CH}{GC \cdot FC} = \frac{\Sigma'C \cdot FG \cdot CH}{GC \cdot FC}.$$

Wird $AC = k$ gesetzt, so ist $GC \cdot FC = k^2$. Ferner ist, wenn $\Sigma'C$ mit e und $Q'C$ mit h bezeichnet werden:

$$FG = 2\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varepsilon}$$
$$y = CH \cdot \sin\varepsilon, \quad CH^2 = y^2 + h^2.$$

Folglich hat man

$$x \sin\delta = \frac{e}{k^2}\sqrt{r^2(y^2 + h^2) - e^2 y^2} = \frac{e}{k^2}\sqrt{k^2 y^2 + r^2 h^2}.$$

Mithin ergiebt sich

3. $$k^2 \sin^2\delta \cdot x^2 - e^2 y^2 = \frac{r^2 e^2 h^2}{k^2}.$$

Das Stück, welches die Curve von der X-Achse $O''Q''$ abschneidet, ergiebt sich hieraus, indem wir $y = 0$ setzen; bezeichnen wir dasselbe, wie bei der Ellipse, als halbe Hauptachse und schreiben dafür a, so folgt

$$a = \frac{reh}{k^2 \sin\delta};$$

ferner setzen wir $rh : k = b$; die Gleichung 3. geht dann nach der Division durch die rechte Seite über in

4. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung wird als **Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Symmetrieachsen**, bezeichnet.

11. Wir wollen zeigen, dass diese Gleichung charakteristisch für die Hyperbel ist, indem wir beweisen:

Sind die Strahlen x und y, welche jeden Punkt einer Curve auf zwei aufeinander senkrechte Achsen projiciren, durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verbunden, so ist die Curve eine Hyperbel.

Zu diesem Zwecke drücken wir a und b durch den Meridianwinkel α des Kegels, den Neigungswinkel δ der Hyperbelebene gegen die Kegelachse und den Abstand g der Hyperbelebene von der Kegelspitze aus. Wir haben, wenn $\Sigma''D$ mit d bezeichnet wird, die Formeln:

$$e = d \tan\delta,\; r = d \tan\alpha,\; h = \frac{g}{\cos\delta}$$

$$k^2 = r^2 - e^2 = d^2 (\tan^2\alpha - \tan^2\delta), \text{ also}$$

1. $$a = \frac{\tan\delta \tan\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\delta} \cdot \frac{g}{\cos\delta \sin\delta} = \frac{g \tan\alpha}{\cos^2\delta} \cdot \frac{1}{\tan^2\alpha - \tan^2\delta}$$

2. $$b = \frac{g \tan\alpha}{\cos\delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\delta}}.$$

Hieraus ergiebt sich das Verhältniss

3. $$\frac{b}{a} = \cos\delta \cdot \sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\delta}.$$

Man kann nun g und δ so bestimmen, dass a und b beliebig gegebene Werthe annehmen. Setzt man $b : a = \gamma$, so ergiebt sich der Winkel δ nach 3. aus der Gleichung

$$\cos^2\delta (\tan^2\alpha - \tan^2\delta) = \gamma^2,$$

oder:

$$\cos^2\delta \sin^2\alpha - \sin^2\delta \cos^2\alpha = \gamma^2 \cos^2\alpha.$$

Nun ist $(\cos^2\delta \sin^2\alpha - \sin^2\delta \cos^2\alpha) = (\cos\delta \sin\alpha + \sin\delta \cos\alpha)(\cos\delta \sin\alpha - \sin\delta \cos\alpha)$

$$= \sin(\alpha + \delta) \cdot \sin(\alpha - \delta)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos 2\delta - \cos 2\alpha).$$

Daher hat man

$$\cos 2\delta - \cos 2\alpha = 2\gamma^2 \cos^2\alpha$$

$$\cos 2\delta = 2\gamma^2 \cos^2\alpha + \cos 2\alpha = 2\gamma^2 \cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1, \text{ also}$$

4. $$\cos 2\delta = 2(\gamma^2 + 1)\cos^2\alpha - 1.$$

Diese Formel ist nur dann brauchbar, wenn

$$(\gamma^2 + 1)\cos^2\alpha \leqq 1, \text{ also}$$

$$\gamma \leqq \tan\alpha.$$

Aus dem Werthe für δ folgt nun g mit Hülfe der Formeln 1. oder 2. Wir schliessen daher:

Sind die Strecken, welche die Punkte einer Curve auf zwei senkrechte Achsen projiciren, durch die Gleichung verbunden:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ist die Curve eine Hyperbel; sie kann als ebener Schnitt aller Rotationskegel erhalten werden, für welche die Tangente des Meridianwinkels nicht kleiner ist als das Verhältniss $b : a$.

Projicirt man eine Hyperbel auf eine Ebene, die zur Nebenachse (d. i. zur zweiten Symmetrieachse) parallel ist, so sind die Projectionen der Achsen normal zu einander. Bezeichnen ξ und η die Abstände eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Projection der Hyperbel von den Projectionen der Hyperbelachsen, und x und y die Ab-

stände des zugehörigen Hyperbelpunkts P von den Hyperbelachsen, ferner β den Neigungswinkel der Hyperbelebene gegen die Projectionsebene, so ist

$$\eta = y, \quad \xi = x \cos\beta.$$

Ist die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so gilt daher für die Projection der Hyperbel die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos\beta} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Projection der Hyperbel ist also wieder eine Hyperbel.

Es genügt daher, weitere geometrische Untersuchungen auf den Grundriss einer Schnitthyperbel zu beschränken; die für denselben aufgefundenen Sätze gelten für alle Hyperbeln.

12. Der Grundriss einer Schnitthyperbel kann ohne Benutzung des Aufrisses in einfacher Weise folgendermassen construirt werden: Es seien E_1 die Spur der Schnittebene, ΣA und ΣA_1 die zur Schnittebene parallelen Mantellinien. Um den Schnitt der Hyperbelebene mit der Mantellinie ΣB zu erhalten, legen wir die Ebene ΣAB; diese schneidet die Hyperbelebene in einer Geraden, die durch C parallel zu ΣA geht; der Grundriss CP' derselben ist also parallel zu ΣA. Der Schnittpunkt P' der Geraden $\Sigma' B$ und CP' ist ein Punkt der gesuchten Hyperbel.

Lässt man B den ganzen Kreis durchlaufen, so erhält man alle Hyperbelpunkte; der Kreisbogen ABA_1 liefert den unteren, der andere Kreisbogen den oberen Zug der Hyperbel; von letzterem ist die Construction eines Punktes P_1' in der Figur noch ausgeführt.

13. Da $\Sigma' A = \Sigma' B$, so ist auch $P'C = P'B$, mithin

1. $\Sigma' P' + P'C = r$,

wenn r den Radius der Spur des Kegels bezeichnet.

Ziehen wir die Gerade $\Delta\Delta$, deren parallel mit $\Sigma' A'$ gemessene Entfernung von E_1 den Betrag r hat, so ist

2. $CP' + P'\Pi = r$.

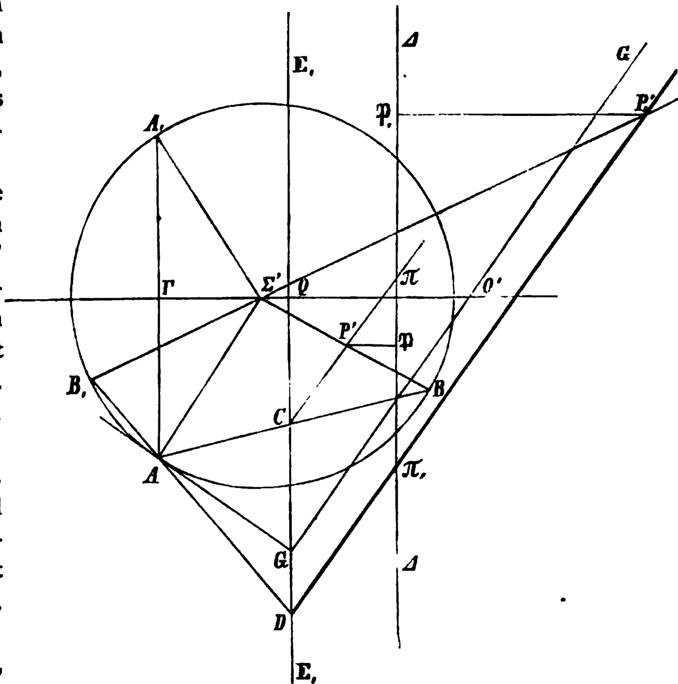
Aus 1. und 2. folgt

3. $\Sigma' P' = P'\Pi$.

Wird der Winkel $\Sigma' A A_1$ mit ε bezeichnet, und ist $P'\mathfrak{P}$ normal zu Δ, so hat man

$P'\Pi = P'\mathfrak{P} : \sin\varepsilon$,

folglich



(M. 320.)

$$\frac{\Sigma' P'}{P'\mathfrak{P}} = \frac{1}{\sin\varepsilon}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$P_1'D = P_1'B_1, \text{ also } P_1D - r = \Sigma'P'_1 = P'_1\Pi_1 = P'_1\mathfrak{P}_1 \cdot \frac{1}{\sin\varepsilon}$$

folglich
$$\frac{\Sigma' P_1'}{P_1'\mathfrak{P}_1} = \frac{1}{\sin\varepsilon}.$$

Dies ergiebt den Satz:

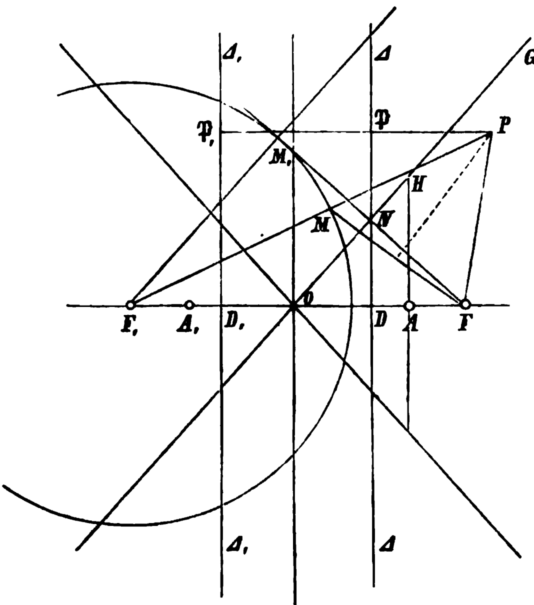
Für alle Hyperbelpunkte hat der Abstand von einem festen, auf der Hauptachse gelegenen Punkte zum Abstande von einer festen, zur Hauptachse normalen Geraden ein constantes Verhältniss, das grösser als die Einheit ist.

Man überzeugt sich leicht, dass diese Schlüsse und Constructionen umkehrbar sind und gewinnt so den Satz:

Der Ort der Punkte, deren Abstand von einem festen Punkte zum Abstand von einer festen Geraden ein gegebenes Verhältniss hat, das grösser als 1 ist, ist eine Hyperbel, deren Hauptachse durch den festen Punkt normal zu der festen Geraden geht.

Der Punkt Σ' wird als Brennpunkt (Focus) der Hyperbel, die Gerade Δ als Directrix bezeichnet.

Aus der doppeltsymmetrischen Gestalt der Hyperbel folgt, dass es zwei Brennpunkte F und F_1 und zwei Directricen Δ und Δ_1 giebt, die symmetrisch zum Centrum der Hyperbel liegen, so dass für alle Hyperbelpunkte auch der Abstand von F_1 zum Abstande von Δ_1 das constante Verhältniss $1 : \sin\varepsilon$ hat.



(M. 321.)

14. Bezeichnen wir $1 : \sin\varepsilon$ mit e, so ist:

$PF = e \cdot P\mathfrak{P},\ PF_1 = e \cdot P\mathfrak{P}_1$, mithin

$$PF_1 - PF = e(P\mathfrak{P}_1 - P\mathfrak{P}) = e \cdot D_1D = 2e \cdot OD.$$

Hieraus folgt: Die Differenz der Abstände jedes Hyperbelpunkts von den beiden Brennpunkten ist constant.

Insbesondere gilt für die Scheitel der Hyperbel d. i. für die auf der Hauptachse liegenden Punkte A und A_1:

$$FA_1 - FA = 2e \cdot OD, \quad \text{also}$$
$$OA = a = e \cdot OD.$$

Also folgt: $\quad PF_1 - PF = 2a.$

Auch dieser Satz ist umkehrbar. Aus demselben folgt eine einfache Construction der Hyperbel.

Sind F und F_1 die Brennpunkte, A und A_1 die Scheitel, so wähle man auf der Hauptachse ausserhalb FF_1 liegende Punkte, z. B. C, und schlage von F und F_1 aus Kreise mit den Radien CA und CA_1; durch deren Schnittpunkte erhält man im Ganzen vier Hyperbelpunkte.

15. Rücken die Punkte B oder B_1 (Figur siehe No. 13) in den Punkt A, so geht BA oder B_1A in die Kreistangente AG über; die Geraden $\Sigma'A$ und die durch G hierzu zu ziehende Parallele schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte. Da A als Grenzlage von B und B_1 angesehen werden kann, so folgt, dass beide getrennte Züge der Hyperbel mit GG einen unendlich fernen Punkt gemein haben, dass also je ein ins Unendliche verlaufender Hyperbelast an GG sich im Unendlichen anschmiegt.

Je näher B oder B_1 an A rücken, um so mehr nähert sich die Gerade $C\Pi$ der Geraden GG, um so näher rücken also auch die auf $\Sigma'B$ und $\Sigma'B_1$ liegenden Hyperbelpunkte an GG heran; der Abstand von GG nimmt bis zur Grenze Null ab, wenn B oder B_1 unendlich nahe an A herankommt.

Die Gerade GG heisst Asymptote der Hyperbel.

Aus den Symmetrieverhältnissen folgt, dass es noch eine Asymptote G_1G_1 giebt; dieselbe geht durch den Schnitt der Kreistangente A_1G_1 und der Geraden E_1 parallel zu $\Sigma'A_1$ und trifft GG auf der Hauptachse der Hyperbel.

GG und G_1G_1 sind die Grundrisse der Geraden, in welchen die den Kegel entlang ΣA und Σ_1A_1 berührenden Ebenen die Schnittebene E treffen; der Schnittpunkt dieser Geraden ist daher das Centrum der auf E liegenden Schnitthyperbel, und der Grundriss O' folglich das Centrum der in der Grundrissebene liegenden Hyperbel.

Die Gleichung der letzteren Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

dann ist, wenn man die Bezeichnungen von No. 9 benutzt und bemerkt, dass die Ebene E mit der Horizontalebene den Winkel $90° - \delta$ bildet, und mit Rücksicht auf No. 10

$$a_1 = a\sin\delta, \quad b_1 = b,$$

Daher

$$b_1 : a_1 = b : a\sin\delta.$$

Setzt man hier für a und b die in No. 9 gefundenen Werthe ein, so hat man

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\sqrt{r^2 - e^2}}{e} = \frac{A'C}{\Sigma'C} = \frac{N'Q'}{O'Q'}$$

Bezeichnet γ den Winkel der Hyperbelasymptoten mit der Hauptachse, so ist daher

$$tang\,\gamma = \frac{b_1}{a_1}.$$

Construirt man (vorige Figur) um einen Brennpunkt F_1 einen Kreis mit dem Radius $2a$, verbindet einen Punkt M dieses Kreises mit F_1 und F und schneidet F_1M mit der Normalhalbirenden von MF, so ist der Schnittpunkt P ein Hyperbelpunkt; denn man hat $PF_1 - PF = 2a$.

Ist M_1F Tangente an den Kreis um F_1, und rückt M_1 näher an M, so nähert sich der Winkel F_1MF immer mehr einem Rechten, und die Gerade F_1M und die Normalhalbirende von MF nähern sich der parallelen Lage; rückt M nach M_1, so sind die beiden genannten Geraden parallel, ihr Schnittpunkt ist unendlich fern; mithin ist ON, die Normalhalbirende von M_1F, eine Asymptote der Hyperbel. Man hat

$$tang\,\gamma = \frac{NF}{NO} = \frac{\sqrt{OF^2 - NO^2}}{NO}.$$

Bezeichnet man OF mit c und benutzt $NO = a_1$, so folgt

$$tang\,\gamma = \frac{\sqrt{c^2 - a_1^2}}{a_1}.$$

Da nun $tang\,\gamma = \frac{b_1}{a_1}$, so folgt:

$c^2 - a_1^2 = b_1^2$, oder besser

$c^2 = a_1^2 + b_1^2$.

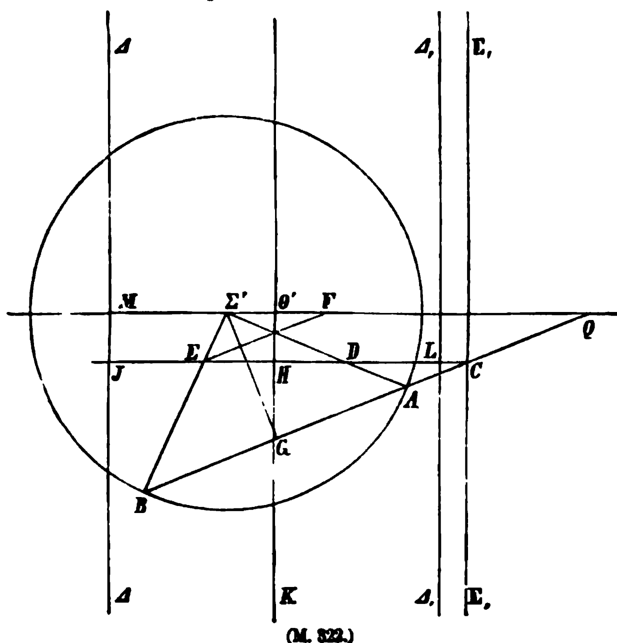
Zieht man durch den Hyperbelscheitel A eine Normale zur Hauptachse und durchschneidet damit die Asymptote OG in H, so folgt aus den Formeln

$$tang\,\gamma = \frac{b_1}{a_1} \text{ und } c^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

dass die Strecke HA gleich b_1 und OH gleich c ist.

Sind daher die Strecken a_1 und b_1 zur Construction einer Hyperbel gegeben, so zeichne man $OA = OA_1 = a_1$; ziehe HH_1 durch $A \perp OA$, und mache $HA = H_1A = b$, $OF = OF_1 = OH$. Dann sind OH und OH_1 die Asymptoten der Hyperbel und F und F_1 die Brennpunkte.

16. Wir wollen nun nachweisen, dass eine Ebene, die keiner Mantellinie des Kegels parallel ist, den Kegel in einer Ellipse schneidet; auf dem Wege zu diesem Beweise werden wir eine einfache Construction des Schnittgrundrisses (ohne Benutzung des Aufrisses) und die Directrixeigenschaften der Ellipse kennen lernen.



(M. 322.)

Der Kreis um Σ' sei die Spur des Rotationskegels, E_1 die Spur der Schnittebene, Q die Spur einer durch Σ parallel zu einer Falllinie der Schnittebene E gelegten Geraden, $\Sigma'Q$ also normal zu E_1. Da die durch $\Sigma'Q$ gelegte Verticalebene Symmetrieebene für den Kegel und für die Ebene E ist, so ist sie auch Symmetrieebene für den Kegelschnitt auf E und für seinen Grundriss; dieser hat also $\Sigma'Q$ zur Symmetrieachse.

Eine Ebene durch ΣQ hat zur Spur eine durch Q gehende Gerade QB; sie schneidet den Kegel in den Mantellinien ΣA und ΣB, und die Ebene E in der durch C gehenden Parallelen zu ΣQ, deren Grundriss parallel zu $\Sigma'Q$ ist. Mithin sind D und E Punkte des Grundrisses der Schnittcurve.

Man hat nun:

$$EC : \Sigma'Q = BC : BQ, \quad DC : \Sigma'Q = AC : AQ,$$

folglich $$EC = \frac{BC}{BQ} \cdot \Sigma'Q, \quad DC = \frac{AC}{AQ} \Sigma'Q;$$
und hieraus

1. $$EC + DC = \Sigma'Q \cdot \frac{BC \cdot AQ + AC \cdot BQ}{AQ \cdot BQ}.$$

Setzt man $\Sigma'A = r$ und $\Sigma'Q = d$, so folgt
$$AQ \cdot BQ = d^2 - r^2.$$

Ferner ist
$$BC \cdot AQ + AC \cdot BQ = (BQ - CQ) AQ + (AQ - CQ) BQ$$

2. $$= 2BQ \cdot AQ - CQ(AQ + BQ).$$

Ist $\Sigma'G$ normal zu BQ und N der Schnittpunkt von E_1 und MQ, so ist $\Sigma'GCN$ ein Kreisviereck und
$$AQ + BQ = 2GQ, \quad GQ \cdot CQ = \Sigma'Q \cdot NQ = d \cdot NQ.$$

Also folgt
$$EC + DC = 2d - \frac{2d^2 \cdot NQ}{d^2 - r^2},$$
mithin ist $$\frac{EC + DC}{2} = d - NQ \cdot \frac{d^2}{d^2 - r^2}.$$

Ist H die Mitte von ED, so ist $2HC = EC + DC$, also
$$HC = d - NQ \cdot \frac{d^2}{d^2 - r^2}.$$

Die Mitten aller zur ersten Symmetrieachse parallelen Sehnen der Schnittcurve und ihrer Projection haben daher von E_1 einen constanten Abstand; die Projection der Schnittcurve hat daher eine zweite zu OQ normale Symmetrieachse $O'K$.

17. Aus der Proportion
$$DC : \Sigma'Q = AD : A\Sigma'$$
folgt $$DC = \frac{d \cdot AD}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich $$DC + \frac{d}{r} \cdot \Sigma'D = \frac{d}{r}(AD + D\Sigma') = d.$$

Zieht man zu E_1 eine Parallele Δ im Abstand $IC = d$, so ist
$$DI = \frac{d}{r} \Sigma'D,$$
also $$\frac{\Sigma'D}{DI} = \frac{r}{d}.$$

Für alle Punkte des Grundrisses der Schnittcurve hat also der Abstand von einem festen Punkte (Σ') zum Abstand von einer festen Geraden (Δ) ein constantes Verhältniss ($r : d$).

Der Punkt Σ' heisst in Rücksicht auf diese Eigenschaft Brennpunkt, die Gerade Δ Directrix unserer Curve.

Da die Curve symmetrisch gegen $O'K$ ist, so existiren noch ein zweiter Brennpunkt F und eine zweite Directrix Δ_1, so dass die Brennpunkte und die Directrixgeraden symmetrisch zu O' liegen.

Ist E ein Curvenpunkt, so ist also auch
$$FE : EL = r : d, \quad FE = \frac{r}{d} \cdot EL.$$

Addirt man hierzu $$\Sigma'E = \frac{r}{d} \cdot EI,$$
so entsteht

1. $$EF + \Sigma'E = \frac{r}{d}(EL + EI) = \frac{r}{d} \cdot 2\,MO'.$$

Die Summe der Abstände jedes Curvenpunktes von den beiden Brennpunkten (Σ' und F) ist also constant.

Die Curve im Grundriss ist folglich eine Ellipse; und daher auch die auf E liegende Schnittcurve selbst, da diese als Parallelprojection der Grundrisscurve auf die Ebene E angesehen werden kann, und wir bewiesen haben, dass jede Parallelprojection einer Ellipse wieder eine Ellipse ist.

Man kann die Schlüsse, die uns zu 1. führten, auch in umgekehrter Folge an einander reihen und sieht dann, dass jeder Curve, die die Eigenschaft 1. besitzt, d. i. also jeder Ellipse, auch die Directrixeigenschaften zukommen.

18. Wir untersuchen nun den Schnitt eines Rotationskegels mit einer Ebene, die zu einer Mantellinie parallel ist, und entwickeln zunächst die Construction und einige Eigenschaften des Grundrisses der Schnittparabel.

Es sei wieder der Kreis um Σ' die Horizontalspur des Kegels, E_1 die Spur der Schnittebene, $\Sigma'Q$ normal zu E_1, also ΣQ die zu E parallele Mantellinie. Da Kegel, Schnittebene und Projectionsebene symmetrisch zur Ebene $\Sigma\Sigma'Q$ sind, und die Projectionsstrahlen parallel zu dieser Ebene, so ist nicht nur die Schnittparabel selbst, sondern auch ihr Grundriss symmetrisch zu dieser Ebene; also ist der Grundriss der Parabel symmetrisch zu $\Sigma'Q$.

(M. 823.)

Die Ebene ΣAQ schneidet den Kegel in der Mantellinie ΣA, die Ebene E in der durch B gehenden Parallelen zu ΣQ, deren Grundriss BC parallel $\Sigma'Q$ ist; mithin ist C ein Punkt des Parabelgrundrisses.

Da nun $\Sigma'Q = \Sigma'A$, so ist auch $CA = CB$, also

1. $$C\Sigma' + CB = r.$$

Zieht man Δ parallel zu E_1 im Abstande $DB = r$, so ist

2. $$DC + CB = r.$$

Aus 1. und 2. folgt:

3. $$C\Sigma' = CD.$$

Jeder Punkt des Parabelgrundrisses hat also von einem festen Punkt (Σ') denselben Abstand wie von einer festen Geraden (Δ). Der feste Punkt heisst wieder Brennpunkt, die feste Gerade Directrix. Der Grundriss S' des Parabelscheitels liegt daher in der Mitte von Σ' und $\Delta\Delta$.

Wir ziehen durch S' eine Parallele $S'T$ zur Directrix und suchen den Zusammenhang zwischen den Abständen x und y jedes Parabelpunkts von den Geraden $S'T$ und $S'Q$ auf.

Bezeichnen wir den Abstand der Geraden $\Delta\Delta$ von Σ' mit p, so ist

1. $$CD = CC_2 + C_2D = x + \frac{p}{2}.$$

Ferner ist

2. $$C\Sigma'^2 = CC_1^2 + C_1\Sigma'^2 = y^2 + (\frac{p}{2} - x)^2.$$

Da nun $C\Sigma'^2 = CD^2$, so folgt:

3. $$y^2 + (\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2} + x)^2.$$

Hieraus ergiebt sich nach Auflösung der Klammern:

4. $$y^2 = 2px.$$

Geht man von der Gleichung 4. aus, so kann man rückwärts zu 3. 2. 1. gelangen, sowie alle Constructionen umkehren und man sieht daher:

Wenn die Abstände der Punkte einer Curve von zwei aufeinander senkrechten Achsen einer Gleichung von der Form genügen: $y^2 = 2px$, so ist die Curve die Normalprojection einer Parabel.

Sind ξ und η die Abstände eines Parabelpunktes von der Symmetrieachse und der durch S gelegten Normalen (welche $S'T$ zur Projection hat), ist ferner α der Meridianwinkel des Kegels, also auch der Neigungswinkel der Ebene E gegen den Horizont, so ist für jeden Parabelpunkt und seinen Grundriss $x = \xi \cos\alpha$, $y = \eta$. Mithin ist

$$\eta^2 = 2p\cos\alpha \cdot \xi.$$

Diese Gleichung hat aber die Form $\eta^2 = 2p_1\xi$, wenn man $p_1 = p\cos\alpha$ setzt. Die Schnittparabel kann also selbst als Projection einer Parabel aufgefasst werden; die Normalprojectionen von Schnittparabeln auf Parallelkreisebenen sind daher wieder Parabeln, und die soeben für den Grundriss einer Schnittparabel entwickelte Directrixeigenschaft gilt daher für Parabeln überhaupt.

In den Figuren Tafel IX, 1 und 2 α, β,. γ sind eine Parabel und drei Hyperbeln in grösserer Ausdehnung aufgezeichnet worden.

19. Aus Tafel VIII, 4 ergiebt sich Folgendes:

Es ist $H'C' = \rho\cos\varphi$, folglich, wenn e den Abstand des Kugelcentrums von der Cylinderachse bezeichnet,

$$A'L = e + H'C' = e + \rho\cos\varphi.$$

Ferner ist $$A'N'^2 = r^2 - H'h^2 = r^2 - \rho^2\sin^2\varphi.$$

Daher $$N'L^2 = N'A'^2 - A'L^2 = r^2 - \rho^2\sin^2\rho - e^2 - 2e\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi$$
$$= r^2 - \rho^2 - e^2 - 2e(A'L - e)$$
$$= r^2 - \rho^2 + e^2 - 2e \cdot A'L$$
$$= 2e(\frac{r^2 - \rho^2 + e^2}{2e} - A'L).$$

Trägt man auf $A'L$ von A' aus nach L zu die Strecke

$$A'Z = \frac{r^2 - \rho^2 + e^2}{2e}$$

auf, so hat man

$$N'L^2 = 2e(A'Z - A'L) = 2e \cdot LZ.$$

Die Projection der Durchdringungscurve einer Kugel und eines Rotationscylinders auf die Ebene, welche das Kugelcentrum und die Cylinderachse enthält, besteht also aus zwei Bogen einer Parabel; der Scheitel dieser Parabel ist um $(r^2 - \rho^2 + e^2) : 2e$ vom Kugelcentrum entfernt.

Berührt die Kugel den Cylinder (wie in der Figur), so ist $r = \rho + e$, und daher, wie man leicht sieht, $A'Z = r$, also fällt der Scheitel der Parabel mit A' zusammen.

20. Die **Durchdringungsfigur eines Rotationskegels und eines Prisma** wird gefunden, indem man durch die Kegelspitze Ebenen legt, die parallel den Prismenkanten sind, die also alle die Gerade enthalten, welche den Prismenkanten parallel durch die Kegelspitze gelegt wird. Die Construction verläuft wesentlich so, wie bei der Durchdringung einer Ecke mit einem Prisma.

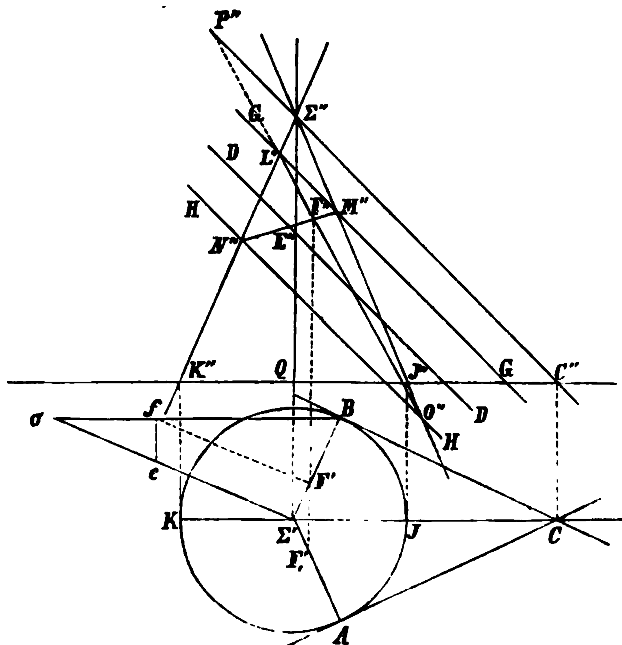
Um die **Durchdringung eines Rotationskegels mit einer Ecke** zu construiren, legt man Ebenen durch die Spitzen des Kegels und der Ecke, und verfährt im Wesentlichen ebenso, wie bei der Durchdringung zweier Ecken.

Ueber die Eintragung der Schnittlinie in das Netz des Kegels ist zu dem, was am Schlusse von No. 6 mitgetheilt worden ist, nichts hinzuzufügen.

21. Ein **Rotationscylinder** kann einen **Rotationskegel** ganz verfehlen. Oder er hat mit ihm eine Tangentialebene gemein, und berührt ihn also in dem Schnittpunkte A der Mantellinien, längs welcher die gemeinsame Tangentialebene den Kegel und den Cylinder berührt; haben Cylinder und Kegel noch ausserdem Punkte gemein, so ist der Punkt A Doppelpunkt der Durchdringungscurve.

Haben Cylinder und Kegel zwei gemeinsame Tangentialebenen E und F, berühren sie sich also in zwei Punkten, so ist die Cylinderachse der Schnittlinie dieser Tangentenebenen parallel; und da jeder Punkt der Cylinderachse gleiche Abstände von E und F hat, so liegt die Cylinderachse auf einer der beiden Halbirungsebenen der vier von E und F gebildeten Flächenwinkel; auf einer dieser Halbirungsebenen liegt auch die Kegelachse. Liegen nun die Cylinderachse und die Kegelachse nicht auf derselben Halbirungsebene, so haben Cylinder und Kegel ausser den beiden auf E und F gelegenen Berührungspunkten keinen Punkt gemein. Liegen aber beide Achsen auf derselben Halbirungsebene, so schneiden sich die beiden Achsen und die beiden Flächen.

Sind AC und BC die Spuren der beiden Flächen gemeinsamen Tangentenebenen, so ist die Cylinderachse parallel zu ΣC, und der Grundriss der Cylinderachse fällt in die Gerade $\Sigma' C$. $DD \parallel \Sigma'' C''$ sei der Aufriss der Cylinderachse, also E der Schnittpunkt beider Achsen.



(M. 324.)

Das von E auf die Tangentenebene ΣBC gefällte Loth hat $\Sigma' B$ zum Grundriss; denn der Grundriss dieses Lothes geht durch Σ', den Grundriss von E, und ist normal zu BC

der Spur von ΣBC. Dieses Loth trifft ΣBC in dem Cylinderpunkte, der zugleich auf der Mantellinie ΣB des Kegels liegt; folglich ist der Fusspunkt dieses Lothes einer der Berührungspunkte des Kegels und des Cylinders; der andere Berührungspunkt ist der Fusspunkt des von E auf ΣA (oder ΣAC) gefällten Lothes; diese Lothe sind gleich dem Cylinderradius.

Construirt man die Umlegung $\sigma\Sigma' B$ des Dreiecks $\Sigma\Sigma' B$ macht $\sigma e = \Sigma'' E''$ und $ef \perp \sigma B$, $fF' \perp EB$, so ist ef der Cylinderradius und F' und F'_1 sind die Grundrisse der beiden Doppelpunkte der Durchdringungscurve. Zieht man zu DD zwei Parallelen GG und HH, die von DD den Abstand ef haben, so ist der von diesen Parallelen eingeschlossene Streifen der Aufriss des Rotationscylinders.

Die Mantellinie ΣK durchdringt den Cylinder in den Punkten L und N. Die Ebene, welche durch L und die beiden Doppelpunkte geht, schneidet den Cylinder und den Kegel in zwei Ellipsen, deren gemeinsamer Scheitel L ist und deren grosse Achsen auf der Geraden liegen, die durch L geht und FF_1 normal halbirt. Die Schnitte der Ebene LFF_1 mit den Tangentenebenen ΣBC und ΣAC haben mit beiden Ellipsen in den Doppelpunkten F und F_1 je zwei unendlich nahe Punkte gemein, beide Schnittlinien berühren die beiden Ellipsen also in den Doppelpunkten.

Der Schnittpunkt P der Ebene LFF_1 mit der Geraden ΣC ist der Schnitt der beiden Tangenten; er liegt auf der verlängerten grossen Achse beider Ellipsen.

Wir wollen nun zeigen, dass es nur eine Ellipse giebt, deren grosse Achse auf einer gegebenen Geraden LP liegt, und von der ein Scheitel L, sowie ein ausserhalb der Achse liegender Punkt und die Tangente PF in diesem Punkte bekannt sind.

Ist nämlich S das Centrum einer solchen Ellipse, LUR der um S mit der halben grossen Achse $LS = a$ beschriebene Kreis und U der zu F gehörige Kreispunkt, so geht die Kreistangente in U durch P. Setze man $PS = d$, so ergiebt sich

(M. 325.)

$$TS = \frac{a^2}{d}, \quad LT = a - \frac{a^2}{d} = \frac{a}{d}(d-a), \quad LP = d - a,$$

$$RT = a + \frac{a^2}{d} = \frac{a}{d}(d+a), \quad RP = d + a.$$

Hieraus folgt:

$$RP : RT = LP : LT.$$

Hierdurch ist R eindeutig bestimmt; macht man $Pl = PL$, $lt = TL$, und zieht durch l eine Parallele zu tT, so schneidet diese PT in dem gesuchten Punkte R. Hierdurch ist nun auch U eindeutig bestimmt, und mithin auch die kleine Halbachse b der Ellipse, denn es ist bekanntlich:

$$b : a = FT : UT.$$

Hieraus folgt, dass die Ebene LFF_1 den Kegel und den Cylinder in derselben Ellipse schneidet; ebenso schliesst man, dass auch die Ebene NFF_1 identische Schnitte mit dem Kegel und dem Cylinder hat. Wir erhalten daher den Satz:

Wenn ein Rotationscylinder und ein Rotationskegel sich in zwei Punkten berühren, so besteht ihre Durchdringungscurve aus zwei Ellipsen.

Es folgt noch, dass LO und NM die grossen Achsen der Durchdringungsellipsen und der Schnittpunkt von $L''O''$ und $N''M''$ der Aufriss der Doppelpunkte F und F_1 sind.

22. Wir construiren nun den Grundriss der Durchdringungscurve eines Rotationskegels und eines Rotationscylinders. (Tafel IX, 3.)

Der Kreis um Σ' sei die Horizontalspur des Kegels, A die Spur der Cylinderachse, AB der Grundriss dieser Achse, α ihr Neigungswinkel gegen die Projectionsebene, $DC \perp AB$ und $AC = AD$ gleich dem Cylinderradius, ferner $CE \parallel DF \parallel AB$, so begrenzen CE und DF den Grundriss des Cylinders. Ferner sei $\Sigma'\sigma$ ($\perp AB$) die Höhe der Kegelspitze über der Projectionsebene und $\Sigma'd \parallel AB$. Die Gerade dd_1 ist die Projection der Cylinderachse auf die Ebene $\Sigma\Sigma'd$: ziehen wir $dH'' \perp dd_1$, so ist diese Gerade die Projection der durch A gehenden Parallelkreisebene des Cylinders; der um A mit dem Radius AC geschlagene Kreis ist die Umlegung dieses Parallelkreises.

Um nun Punkte der Durchdringungscurve des Kegels und Cylinders zu erhalten, legen wir durch Σ eine Gerade parallel der Cylinderachse; der Aufriss derselben σG ist parallel dd_1, ihre Spur ist G, und H'' ist der Aufriss ihres Schnittpunktes mit der durch A gehenden Parallelkreisebene E des Cylinders. Macht man $dh = dH''$, so ist h die Umlegung von H (in der Umlegung von E).

Wir legen nun eine Ebene durch ΣG, die den Kegel und den Cylinder schneidet; sie schneidet beide Flächen in Mantellinien, und die Schnittpunkte der Kegelmantellinien mit den Mantellinien des Cylinders sind Punkte der Durchdringungsfigur.

Die Ebene ΣGN schneidet den Kegel in den Mantellinien ΣN und ΣM. Die Ebene E trifft diese Ebene in der Geraden HI, deren Umlegung hI ist: mithin wird der Cylinder von der Ebene ΣGN in den beiden Mantellinien geschnitten, die durch die Punkte gehen, deren Umlegungen k und l sind; die Grundrisse dieser Mantellinien gehen durch k und l parallel zu AB. Mithin sind O', P', Q', R' Punkte des Grundrisses der Durchdringungscurve.

Die Tangente der Durchdringungscurve im Punkte P ist der Schnitt der durch P gehenden Tangentenebenen des Kegels und des Cylinders.

Zieht man in l die Tangente des umgelegten Parallelkreises und construirt in der aus der Figur ersichtlichen Weise die Spuren m und o der Parallelen zu AB, welche durch Punkte der Ebene E gelegt sind, die l und n zu Umlegungen haben, so ist mo die Spur der Ebene, die den Cylinder entlang der Mantellinie OP tangirt. Fügt man die Spur NT der Ebene hinzu, welche den Kegel entlang $N\Sigma$ berührt, so ist p die Spur der gesuchten Tangente der Durchdringungscurve, ihr Grundriss pP' berührt den Grundriss der Durchdringungscurve in P'

Die Mantellinien des Cylinders, welche die Durchdringungscurve berühren, also den Theil des Cylindermantels begrenzen, innerhalb dessen die Durchdringungscurve liegt, werden auf dem Cylinder durch die Ebene ΣGU ausge-

schnitten, die den Kegel berührt; die Grundrisse derselben sind also vv und ww, und V und W die auf ihnen liegenden Punkte der Durchdringungscurve.

Die Grundrisse der auf der Mantellinie CE liegenden Punkte X' Y' der Durchdringungscurve werden mit Hülfe der Ebene ΣGC gewonnen und liegen auf den Kegelmantellinien Σx und Σy.

23. Wenn die Cylinderachse nahezu normal zur Kegelachse ist, so ist die soeben mitgetheilte Methode nicht mehr verwendbar. Man hat dann eine kleine Veränderung anzubringen, indem man folgendermassen verfährt. (Tafel IX, 4.)

Es sei $A'B'$ der Grundriss der Cylinderachse und $A''B''$ der Aufriss auf die durch die Kegelachse parallel zur Cylinderachse gelegte Ebene $\Sigma\Sigma'C$.

Wir legen durch A und Σ' Normalebenen zur Cylinderachse; die Projectionen dieser Ebenen auf die Ebene $\Sigma\Sigma'C$, $A''E$ und $D''\Sigma'$, sind normal zu $A''B''$, die Horizontalspuren E und $\Sigma'H$ sind normal zu $\Sigma'C$.

Wir ziehen durch Σ wieder eine Parallele zur Cylinderachse, die die beiden Normalebenen in I und K schneidet.

Beide Normalebenen AEF und $D\Sigma'H$ legen wir in die Horizontalebene um und geben die Umlegungen i und k von I und K sowie die Umlegung des Parallelkreises an, in welchem AEF den Cylinder schneidet.

Eine Ebene, die durch $I\Sigma$ gelegt wird, schneidet die Ebenen AEF und $D\Sigma H$ in Parallelen, die durch I und K gehen. Ziehen wir also durch i und k zwei Parallele, welche EF und $\Sigma'H$ in L und M schneiden, so ist LM die Spur einer durch ΣI gelegten Ebene. Diese Ebene schneidet den Cylinder in Mantellinien, deren Grundrisse durch N und O gehen, und den Kegel in den Mantellinien ΣP und ΣQ; mithin sind R', S', T', U' Punkte des Grundrisses der Durchdringungscurve.

Ist die Cylinderachse normal zur Kegelachse, so werden AB und ΣI parallel zur Projectionsebene; mithin sind auch die Spuren der durch ΣI gelegten Ebenen parallel zu $A'B'$. Man bedarf also in diesem Falle der Hülfsebene $D\Sigma H$ nicht, sondern zieht LQ durch L parallel zu $A'B'$.

24. Zwei Rotationskegel können sich verfehlen; oder sie haben eine Tangentenebene gemein, ohne sich sonst zu schneiden; oder sie haben zwei Tangentenebenen gemein, ohne sich sonst zu schneiden; oder sie schneiden sich, und zwar kann die Durchdringungscurve aus einem Zuge oder aus zwei Zügen bestehen.

Wenn die Kegel eine Tangentenebene E gemein haben, so haben sie den Punkt A gemein, in welchem sich die Mantellinien schneiden, längs welcher die Kegel von der Ebene E berührt werden.

Haben die Kegel noch ausserdem Punkte gemein, so ist A Doppelpunkt der Durchdringungscurve.

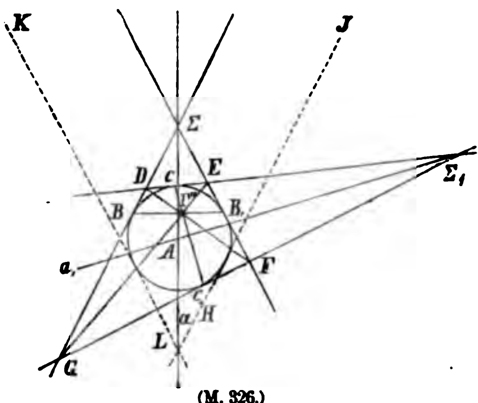
Wenn die Kegel zwei Tangentenebenen E und F gemein haben, so berühren sie sich in zwei Punkten P und Q, die auf E und F liegen.

Jede Achse liegt auf einer der zwei Halbirungsebenen der von E und F gebildeten Flächenwinkel. Liegen die Achsen auf verschiedenen Halbirungsebenen und haben die Kegel die Spitze nicht gemein, so haben die Kegel ausser P und Q keinen Punkt gemein.

Liegen beide Achsen auf derselben Halbirungsebene, und haben die Kegel die Spitzen nicht gemein, so schneiden sich die Kegelachsen in einem mit keiner Spitze zusammenfallenden Punkte A. Die von diesem Schnittpunkte auf die gemeinsamen Tangentialebenen gefällten Lothe treffen jede dieser Ebenen in je

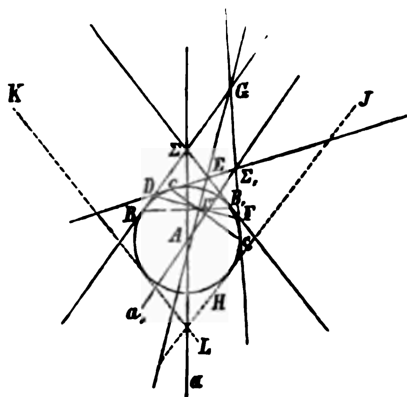
einem Punkte, P und Q, die auf beiden Kegeln liegen, also die Berührungspunkte der beiden Kegel und die Doppelpunkte ihrer Durchdringungscurve sind; sie liegen symmetrisch zur Ebene der beiden Kegelachsen.

Ist die Bildfläche die Ebene der Achsen Σa und $\Sigma_1 a_1$, so ist aus dem soeben Mitgetheilten zunächst ersichtlich, dass die auf der Ebene der Achsen liegenden. Mantellinien einen Kreis berühren, der den Schnittpunkt der Achsen zum Centrum hat; die Kegel selbst sind der Kugel umschrieben, welche diesen Kreis zum Hauptkreis hat. BB_1 und CC_1 sind die Diameter der Kreise, in welchen diese Kugel von den beiden Kegeln berührt wird und Γ'' ist die Projection der gemeinsamen Berührungspunkte P, Q beider Kegel (und der Kugel).



(M. 326.)

Sind IH und KL Tangenten an den um A geschlagenen Kreis parallel zu ΣG bez. ΣF, und liegt Σ_1 ausserhalb der Streifen ΣGHI und ΣFKL, so liegen die vier Schnittpunkte der auf der Bildfläche enthaltenen Mantellinien auf derselben Seite beider Kegelspitzen. Die beiden Ebenen DPQ und EPQ schneiden jede die Kegel in zwei Ellipsen, deren grosse Achsen auf $D\Gamma''$ bez. $E\Gamma''$ liegen, die einen Scheitel D bez. E, ferner die Doppelpunkte P und Q, sowie in diesen Punkten die Tangenten gemein haben; diese Ellipsen sind also paarweise identisch und DF und EG ihre grossen Achsen.



(M. 327.)

Liegt Σ_1 innerhalb eines der beiden Streifen ΣFLK oder ΣGHI, so schneidet die Ebene DPQ beide Kegel in Ellipsen, deren grosse Achsen auf $D\Gamma''$ liegen, und die den Scheitel D, die Doppelpunkte P und Q_1 und die Tangenten in diesen Punkten gemein haben; die also identisch sind.

Die Ebene EPQ schneidet beide Kegel in Hyperbeln, deren grosse Achsen auf $E\Gamma''$ liegen, und die den Scheitel E, die Doppelpunkte P und Q und die Tangenten in diesen Punkten gemein haben. Aehnlich, wie bei Ellipsen, kann man beweisen, dass diese Hyperbeln identisch sind.

Die beiden Kegel schneiden sich also in diesem Falle in einer Ellipse und einer Hyperbel, deren Hauptachsen DF und EG sind.

Liegt Σ_1 auf IH oder KL, so besteht der Schnitt der Kegel in einer Ellipse mit der grossen Achse DF und einer Parabel, die den Scheitel E und die Achse $E\Gamma''$ hat (Fig. 328).

25. Wir construiren die Projection der Durchdringungscurve zweier Kegel auf eine Parallelkreisebene des einen Kegels (Tafel X, 1).

Der Kreis um Σ' sei die Spur des einen Kegels, $\Sigma_1{}'$ sei der Grundriss der Spitze, $\Sigma'_1 A'$ der Grundriss der Achse des anderen Kegels; Σ'', Σ''_1, A'' seien die Aufrisse von Σ, Σ_1, A auf eine Ebene $\Sigma\Sigma' B$, die durch die Achse des ersten Kegels parallel zu $\Sigma_1 A$ gelegt ist.

Wir legen durch A und Σ Ebenen α und β normal zu $A\Sigma_1$; ihre Aufrisse $A''B$ und $\Sigma''C$ sind normal zu $A''\Sigma''_1$, die Horizontalspuren BB_1 und CC_1 sind normal zu $B\Sigma'$. Wir construiren den Schnitt D der Geraden $\Sigma_1\Sigma$ mit der Ebene α, sowie die Umlegung d dieses Punktes und des in α liegenden Parallelkreises des zweiten Kegels, der die Umlegung a des Punktes A zum Centrum hat. Ferner legen wir die Ebene β um und bestimmen die Umlegung s des auf β liegenden Punktes Σ.

(M. 328.)

Ziehen wir parallele Gerade durch d und s und schneiden damit durch BB_1 und CC_1, so ist die Verbindungsgerade der Schnittpunkte E und F die Spur einer durch $\Sigma\Sigma_1$ gelegten Ebene. Diese Ebene schneidet α in der Geraden, welche dE zur Umlegung hat, also den zweiten Kegel in den Mantellinien, welche durch die Punkte gehen, die g und h zu Umlegungen haben. Zieht man $gg_1 \perp BB_1$ und macht $BG'' = gg_1$, so ist G'' der Aufriss des zu g gehörigen Punktes; aus ihm gewinnt man den Grundriss G' und in gleicher Weise H'.

Die Ebene $\Sigma\Sigma_1 EF$ schneidet den ersten Kegel in den Mantellinien ΣI und ΣK, den zweiten in den Mantellinien $\Sigma_1 G$ und $\Sigma_1 H$. Mithin sind L', M', N', O' Punkte des Grundrisses der Durchdringungscurve beider Kegel.

In der Figur sind noch die Punkte der Durchdringungscurve construirt, die auf den Mantellinien ΣR und ΣS liegen (mit Hülfe von p, q, P'', Q'') und die Constructionen der Mantellinien des zweiten Kegels angedeutet, welche die Durchdringungscurve berühren.

Wenn die Spur der Geraden $\Sigma\Sigma_1$ in keiner unpassenden Entfernung liegt, so kann man sie zur Construction mit verwenden und dafür die Ebene ΣCC_1 weglassen.

Die in der Nähe oder auf der Verticalebene durch $\Sigma\Sigma_1$ liegenden Punkte der Durchdringungscurve findet man durch Benutzung des Aufrisses.

26. Liegt das Centrum C einer Kugel auf der Achse ΣA eines Rotationskegels, dessen Meridianwinkel α ist, so gelten folgende Sätze:

Ist der Abstand $d = CD$ des Centrums von einer Mantellinie ΣB grösser als der Kugelradius, so hat die Kugel mit dem Kegel keinen Punkt gemein; ist d gleich dem Kugelradius, so berührt der Kegel die Kugel entlang des durch D gehenden Parallelkreises des Kegels; ist

(M. 329.)

d kleiner als der Kugelradius, so schneiden sich Kugel und Kegel in den beiden durch E und F gehenden Parallelkreisen des Kegels. Ist dabei der Kugelradius kleiner als ΣC, so liegen beide Schnittkreise auf derselben Kegelhälfte; ist der Kugelradius gleich ΣC, so zieht sich der eine Schnittkreis zu einem Punkte, der Kegelspitze, zusammen; ist der Kugelradius grösser als ΣC, so sind die beiden Schnittkreise auf beide Kegelhälften vertheilt.

27. Wir construiren nun den Schnitt eines Kegels mit einer Kugel, deren Centrum nicht auf der Kegelachse liegt. (Tafel X, 2.)

Wir wählen als Projectionsebenen eine Parallelkreisebene des Kegels und eine Ebene, die parallel zu der durch die Kegelachse und das Kugelcentrum A gelegten Ebene ist.

Bei der in der Figur gewählten Lage der Kugel gegen den Kegel besteht die Schnittcurve aus zwei getrennten Zügen.

Der eine Zug liegt zwischen den beiden Parallelkreisen des Kegels, die durch B und C gehen und den Zug in B und C berühren; der andere Zug liegt zwischen den beiden Parallelkreisen, die durch D und E gehen, und wird von ihnen in D und E berührt.

Um nun weitere Punkte, z. B. des oberen Zuges, zu erhalten, legen wir eine Parallelkreisebene des Kegels zwischen B und C; der Aufriss derselben schneide den Aufriss der Kugel in F'' und G'', den Aufriss des Kegels in H'' und I''; der Grundriss des Schnittes dieser Ebene mit Kegel und Kugel sind die um Σ' und A' mit den Durchmessern $H''I''$ und $F''G''$ beschriebenen Kreise. Die Schnittpunkte K und L dieser Kreise sind Punkte der Durchdringungscurve.

28. Zieht man durch Σ'' eine Normale $\Sigma''M$ zum Aufriss der Kegelachse, so ergiebt sich für einen Punkt K'' des Aufrisses die Durchdringungscurve zwischen den Abständen $K''N$ und $\Sigma''N$ folgender Zusammenhang.

Ist r der Kugelradius, so ist

$$r^2 = AK^2 = A'K'^2 + K''T^2 = A'K'^2 + (K''N - TN)^2.$$

Setzt man $TN = A''M = b$, sowie $A'\Sigma' = a$, so ist

$$A'K'^2 = a^2 + \Sigma'K'^2 - 2a \cdot \Sigma'K' \cdot \cos\varphi,$$

und daher

$$r^2 = a^2 + \Sigma'K'^2 - 2a\,\Sigma'K' \cdot \cos\varphi + (K''N - b)^2.$$

Nun ist weiter

$$\Sigma'K' = OI'' = O\Sigma''\,\mathrm{tang}\,\alpha = K''N\,\mathrm{tang}\,\alpha$$

und

$$\Sigma'K'\cos\varphi = \Sigma''N,$$

also hat man die Gleichung:

$$r^2 = a^2 + K''N^2\,\mathrm{tang}\,\alpha - 2a\,\Sigma''N + (K''N - b)^2,$$

$$r^2 = a^2 + b^2 + K''N^2(\mathrm{tang}^2\alpha + 1) - 2b\,K''N - 2a\,\Sigma''N;$$

mithin: $K''N^2(\tan^2\alpha + 1) - 2b \cdot K''N = 2a \cdot \Sigma''N + r^2 - a^2 - b^2$

$$K''N^2 - 2b \cdot \cos^2\alpha \cdot K''N + b^2\cos^4\alpha = (2a\,\Sigma''N + r^2 - a^2 - b^2)\cos^2\alpha + b^2\cos^4\alpha$$

$$(K''N - b\cos^2\alpha)^2 = 2a\cos^2\alpha\left(\Sigma''N + \frac{r^2 - a^2 - b^2\sin^2\alpha}{2a}\right).$$

Zieht man nun PQ'' parallel $\Sigma''M$ so, dass $S\Sigma'' = b\cos^2\alpha$, und macht man $SQ'' = (r^2 - a^2 - b^2\sin^2\alpha) : 2a$, so hat man

$$K''N - b\cos^2\alpha = K''N - S\Sigma'' = K''N - RN = K''R$$

und $\Sigma''N + (r^2 - a^2 - b^2\sin^2\alpha) : 2a = \Sigma''N + SQ'' = RS + SQ'' = RQ''$,

also folgt schliesslich die Gleichung

$$K''R^2 = 2a\cos^2\alpha \cdot RQ''.$$

Dies ergiebt den Satz: Die Projection der Durchdringungscurve

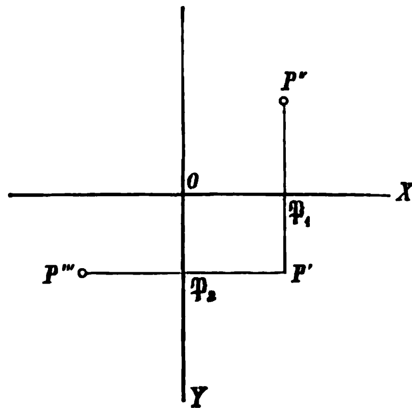
einer Kugel und eines Rotationskegels auf die Ebene, welche das Kugelcentrum und die Kegelachse enthält, ist eine Parabel. Die Gestalt dieser Parabel hängt nur von dem Meridianwinkel des Kegels und von der Entfernung des Kugelcentrums von der Kegelachse ab, ist aber unabhängig vom Kugelradius und vom Abstande der Kegelspitze von der Projection des Kugelcentrums auf die Kegelachse.

§ 11. Axonometrie.

1. Hat man die Projection eines Gegenstandes im natürlichen oder im verjüngten Maassstabe zu entwerfen, so bestimmt man gewöhnlich am einfachsten die Abstände gewisser Hauptpunkte des Objects (mit welchen die vorkommenden Punkte und Linien in möglichst einfachem geometrischen Zusammenhange stehen) von drei auf einander senkrechten Ebenen; eine derselben wählt man zumeist horizontal (bei einem regelmässig gestalteten Bauwerk nimmt man die Horizontalebene, eine mit der Vorderfront und eine mit der Seitenfront parallele Ebene). Diese drei Ebenen wollen wir als Coordinatenebenen, ihre aufeinander senkrechten Schnittlinien OX, OY, OZ als X-, Y- und Z-Achse, die Abstände x, y, z eines Punktes P von den drei Ebenen OYZ, OZX, OXY als Coordinaten des Punktes bezeichnen.

Man kann nun die drei Ebenen als Projectionsebenen wählen.

Fällt die Ebene OXY mit der Zeichenebene zusammen, und sind die auf einander normalen Geraden OX und OY die in dieser Ebene liegenden Achsen, so findet man die Projectionen des Punktes P, dessen Coordinaten x, y, z gegebene Werthe haben, indem man $O\mathfrak{P}_1 = x$, $O\mathfrak{P}_2 = y$, $PP' \parallel OY$, $PP'' \parallel OX$, $\mathfrak{P}_1 P'' = \mathfrak{P}_2 P''' = z$ macht; P', P'' und P''' sind dann die drei Projectionen von P.



(M. 390.)

Wenn man nur die Horizontalprojection eines Bauwerks vor sich hat, so ersieht man daraus nichts über die Vorder- und Seitenfronte; und aus Projectionen auf mit der Vorder- und der Seitenfronte parallelen Ebenen erfährt man nichts über den Grundriss und die Seiten- bez. Vorderfronte.

Will man aus einer einzigen Projection eine möglichst vollständige Anschauung des dargestellten Objects gewinnen (die man dann noch dadurch ergänzt, dass man aus der Natur des dargestellten Gegenstandes kennt, dass gewisse Linien Gerade sind, gewisse Punkte auf gewissen Linien, diese wieder auf gewissen Ebenen liegen und Aehnliches mehr), so hat man eine Projectionsebene zu wählen, die auf keiner der Coordinaten-Achsen senkrecht ist.

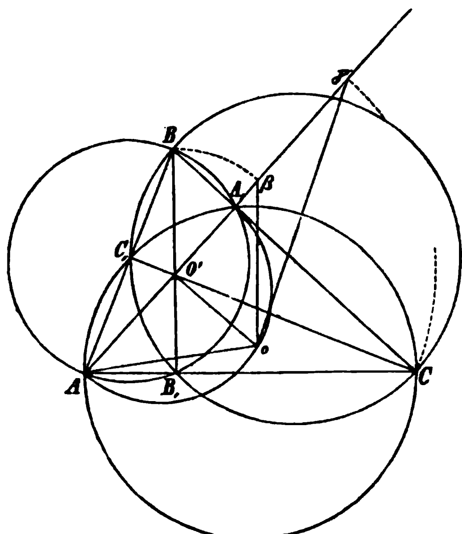
Man könnte nach dem früher Mitgetheilten eine solche Projection herstellen, indem man zunächst das Object auf zwei Coordinatenebenen projicirt, und aus diesen Projectionen und aus den Spuren der neuen Projectionsebene die Projection des Objects auf diese Ebene construirt.

Dieses Verfahren würde ziemlich umständlich sein und ist nur dann zu

empfehlen, wenn die Projectionen des Objects auf zwei Ebenen bereits vorliegen; statt desselben werden wir zweckmässigere Mittel finden.

Die besonderen Methoden der descriptiven Geometrie, durch welche aus den Coordinaten der Punkte einer Raumfigur die Projection der Figur auf eine beliebige Ebene erhalten wird, bilden den Gegenstand der Axonometrie.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Herstellung von Normalprojectionen auf axonometrischem Wege.

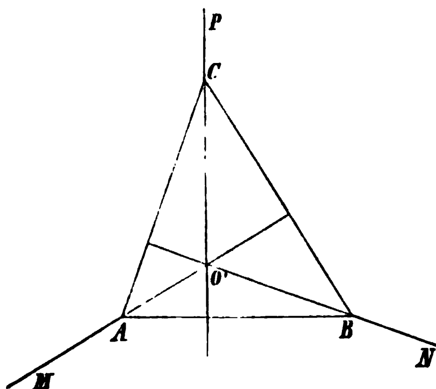


(M. 331.)

2. Die Punkte A, B, C seien die Spuren der Coordinatenachsen OX, OY, OZ. Da die Dreiecke AOB, BOC, COA bei O rechtwinkelig sind, so ist O der Schnittpunkt der drei Kugeln, welche die Seiten des Dreiecks ABC zu Diametern haben. Die Schnittebenen je zweier dieser Kugeln, sind normal zu ABC und die Spuren dieser Ebenen sind die Höhen AA_1, BB_1, CC_1 dieses Dreiecks; der Schnittpunkt O' der Höhen ist daher die Projection von O.

Die Höhe $O'O$ wird gefunden, indem man den einen der drei Schnittkreise umlegt; man construirt z. B. einen Halbkreis über dem Diameter AA_1 und errichtet in O' ein Loth zu AA_1; dann ist o die Umlegung des Punktes O und mithin oA die wahre Länge von OA.

Macht man $O'\beta = O'B$, $O'\gamma = O'C$, so sind $o\beta$ und $o\gamma$ die wahren Längen von OB und OC.



(M. 332.)

Projectionen x', y', z' von Strecken x, y, z, die auf den Coordinatenachsen liegen oder den Coordinatenachsen parallel sind, haben daher zu den Strecken selbst die Verhältnisse

$$\frac{x'}{x} = \frac{O'A}{oA}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{O'\beta}{o\beta}, \quad \frac{z'}{z} = \frac{O'\gamma}{o\gamma}.$$

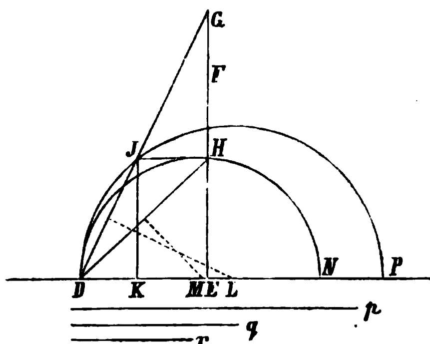
3. Drei in einem Punkte O' sich schneidende Gerade $O'M$, $O'N$, $O'P$ können immer als die Projectionen dreier Coordinatenachsen OX, OY, OZ angesehen werden.

Legt man nämlich durch einen auf OX gelegenen Punkt A eine Ebene parallel zur Projectionsebene, so schneidet diese Ebene nach dem soeben Mitgetheilten die Achsen in den Ecken eines Dreiecks, dessen Höhen auf $O'M$, $O'N$, $O'P$ liegen. Dieses Dreieck ist hierdurch eindeutig bestimmt; denn die

durch A gehenden Seiten AB und AC sind normal zu $O'N$ und $O'P$; die dritte Seite BC wird dann nothwendig normal zu $O'M$.

Hierdurch sind zugleich die Verhältnisse $x':x$, $y':y$, $z':z$ eindeutig bestimmt, in welchen mit den Achsen parallele Strecken in der Projection verkürzt erscheinen.

4. Sind die Verhältnisse gegeben, in denen die den beiden Coordinatenachsen OX und OY parallelen Strecken in der Projection verkürzt erscheinen sollen, so lassen sich dadurch die Winkel bestimmen, welche die Projectionen der Coordinatenachsen mit einander bilden.



(M. 333.)

Sind drei Strecken p, q, r gegeben und soll sein

$$\frac{x'}{x} = \frac{p}{r}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{q}{r},$$

so mache man $DE = r$, EF normal zu DE, $DG = p$, $DH = q$ und ziehe HI parallel DE, IK parallel EF.

Dann sind GDE und HDE die Neigungswinkel der X- und der Y-Achse gegen die Projectionsebene.

Wählt man HE als Höhe des Coordinatenanfangspunkts O über der Projectionsebene, so sind, wie der Vergleich mit No. 2 ergiebt, die Strecken $O'A = KD$ und $O'B = ED$.

Der Punkt O' hat für die drei Kugeln, die AB, BC und CA zu Diametern haben, gleiche Potenz; es ist also

$$O'A_1 \cdot O'A = O'B_1 \cdot O'B = O'O^2.$$

Setzt man für $O'A$, $O'B$, $O'O$ die Werthe KD, ED, HE (oder IK) ein, so hat man:

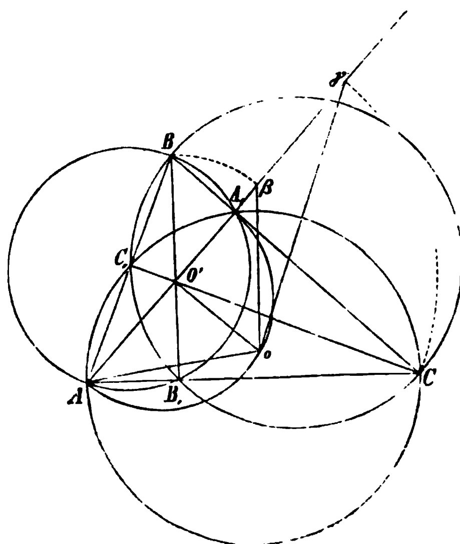
$$O'A_1 \cdot KD = IK^2,$$
$$O'B_1 \cdot ED = HE^2.$$

Construirt man die Normalhalbirenden von DI und DH, durchschneidet damit DE in L und M und construirt zwei Kreise, welche L und M zu Centren haben und durch D gehen, so schneiden diese Kreise DE in N und P so, dass

$$KN \cdot KD = IK^2,$$
$$EP \cdot ED = HE^2,$$

also ist

$$O'A_1 = KN, \quad O'B_1 = EP.$$



(M. 331.)

Aus den nun gefundenen vier Höhenabschnitten

$$O'A = KD, \quad O'A_1 = KN;$$

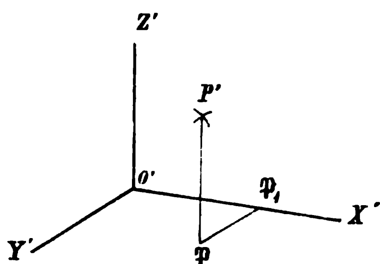
$$O'B = ED, \; O'B_1 = EP$$

kann man das Spurendreieck ABC eindeutig construiren.

Man mache B_1O' normal auf einer Geraden B_1C und gleich EP; ferner bestimme man A auf dieser Geraden so, dass $O'A = KD$; auf den Verlängerungen von $O'A$ und $O'B_1$ bestimme man A_1 und B so, dass $O'A_1 = KN$, $O'B = ED$, und durchschneide AB_1 mit der Geraden BA_1 (in C); dann ist ABC das gesuchte Spurendreieck und $O'A$, $O'B$, $O'C$ sind die Projectionen der drei Coordinatenachsen. Man sieht leicht, dass ABA_1B ein Kreisviereck und daher BC normal zu AA_1 ist.

Sind die drei Verkürzungsverhältnisse $x':x$, $y':y$, $z':z$ gleich, so wird das Spurendreieck gleichseitig; die Achsenprojectionen bilden unter sich Winkel von 120°; der Werth des Verkürzungsverhältnisses kann durch Construction und im Anschlusse hieran auch durch Rechnung bestimmt werden.

Sind zwei Verkürzungsverhältnisse $x':x$ und $y':y$ gleich, so wird das Spurendreieck gleichschenkelig; die Projectionen der X- und der Y-Achse liegen dann symmetrisch gegen die Projection der Z-Achse.



(M. 334.)

5. Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Projectionen $O'X'$, $O'Y'$, OZ', und die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse bekannt sind, und zwar letztere durch vier Strecken p, q, r, s so, dass

$$x':x = p:s, \; y':y = q:s, \; z':z = r:s.$$

Sind nun die Coordinaten eines Punktes P gleich den gegebenen Strecken ξ, η, ζ, so construire man ξ', η', ζ' so, dass

$$\xi':\xi = p:s, \; \eta':\eta = q:s, \; \zeta':\zeta = r:s;$$

ferner mache man $O'\mathfrak{P}_1 = \xi'$; $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ parallel $O'Y'$ und gleich η'; $\mathfrak{P}P'$ parallel $O'Z'$ und gleich ζ'; so ist P' die axonometrische Projection (d. h. die auf axonometrischem Wege bestimmte Normalprojection) des Punktes P.

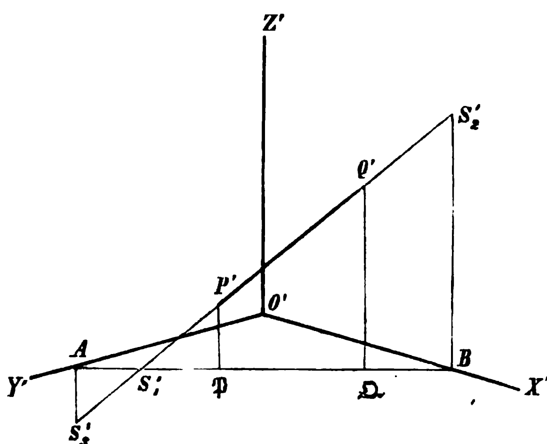
Es ist kaum nöthig hervorzuheben, dass durch die Coordinaten eines Punktes wol seine Projection bestimmt ist, durch die Projection eines Punktes aber nicht umgekehrt seine Coordinaten bestimmt sind; ist aber die Projection einer Coordinate z. B. $P'\mathfrak{P}$, in der Figur angegeben, so ist auch der Punkt $\mathfrak{P}_1$, es sind also auch die Projectionen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1O'$ der beiden anderen Coordinaten, mithin auch die Coordinaten des Punktes, also auch die Lage des Punktes gegen die Coordinatenachsen eindeutig bestimmt.

6. Bei axonometrischer Behandlung von Aufgaben der descriptiven Geometrie kommen die Spuren, welche Gerade und Ebenen mit der Projectionsebene bestimmen, nicht mehr in Betracht; statt deren berücksichtigt man die Projectionen der Spuren, welche auf den Coordinatenebenen liegen.

7. Eine Gerade ist bestimmt, wenn man die Projectionen zweier ihrer Punkte P' und Q' und die Projection je einer Coordinate derselben, etwa $P'\mathfrak{P}$ und $Q'\mathfrak{Q}$ kennt.

Die Projectionen der auf den drei Coordinatenebenen liegenden Spuren findet man folgendermaassen: Man ziehe $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und durchschneide damit $P'Q'$; der Schnittpunkt S_1' ist die Projection der auf der OXY-Ebene liegenden Spur S_1. Ferner stelle man die Schnittpunkte A und B her und ziehe durch diese Punkte

Parallele zu $O'Z'$; diese schneiden $P'Q'$ in den Projectionen S'_2 und S'_3 der auf den beiden anderen Coordinatenebenen liegenden Spuren.

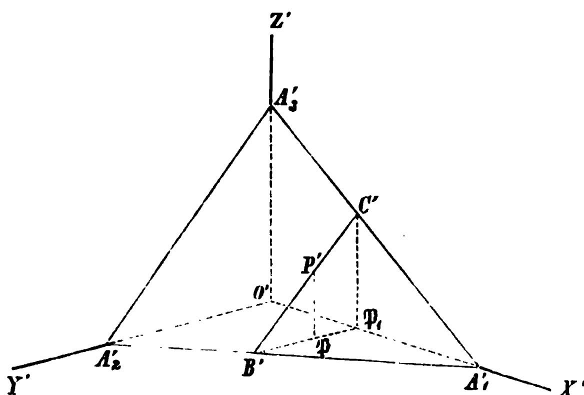


(M. 335.)

8. Die Lage einer Ebene A gegen die Coordinatenachsen ist bestimmt, wenn man die Projectionen der Punkte A_1, A_2, A_3 kennt, in welchen die Ebene die Coordinatenachsen schneidet; wir wollen diese Punkte **Spurpunkte der Ebene** nennen.

Ist die Projection P' eines Punktes gegeben, und ausserdem bekannt, dass er auf einer Ebene liegt, die durch die Projectionen A'_1, A'_2, A'_3 ihrer Spurpunkte gegeben ist, so kann man die Coordinaten des Punktes construiren.

Denn eine durch P parallel zur YZ-Ebene gelegte Ebene E schneidet die Ebene A in einer Geraden, deren Projection durch P' geht und parallel zu $A'_2A'_3$ ist; die Projectionen der Spuren dieser Geraden auf der XY- und XZ-Ebene sind die Schnittpunkte B', C' der Parallelen mit $A'_1A'_2$ und $A_1'A_3$.



(M. 336.)

Die Projectionen der Spuren von E gehen daher durch B' und C' parallel zu $O'Y'$ und $O'Z'$ und schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Geraden $O'X'$.

Zieht man $P'\mathfrak{P}$ parallel $O'Z'$, so sind $P'\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_1O'$ die Projectionen der Coordinaten von P.

9. Sind die Projectionen zweier Punkte AB einer Geraden und die Projectionen der Ecken CDE eines Dreiecks sowie die Projectionen der Abstände dieser fünf Punkte von der XY-Ebene gegeben, so kann man die Projection des Schnittpunktes der Geraden AB und der Ebene CDE folgendermaassen construiren.

Die auf der Coordinatenebene XOY liegende Spur der Ebene, die durch AB normal zur XY-Ebene gelegt wird, hat die Projection $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; ihre Schnitte mit den durch CD und ED normal zur XY-Ebene gelegten Ebenen haben die Projectionen $G'\mathfrak{G}$ und $F'\mathfrak{F}$; der Schnitt H' von $A'B'$ und $G'F'$ ist daher die Projection des Schnittpunktes H des gegebenen Dreiecks und der gegebenen

(M. 337.)

Geraden, und $H'\mathfrak{H}$ die Projection des Abstandes dieses Punktes von der XY-Ebene.

Es hat hiernach keine Schwierigkeit, eine grosse Anzahl von Aufgaben nach axonometrischer Methode zu lösen; wir enthalten uns weiterer Ausführungen und überlassen dieselben dem Leser als eine sehr nützliche Uebung.

10. Aufgaben, bei welchen es sich um die Construction von Normalen zu Ebenen handelt, die mit keiner Coordinatenebene parallel sind, eignen sich nicht gut für die axonometrische Behandlung; denn bei diesen Aufgaben ist es unerlässlich, die Abstände von Punkten von der Projectionsebene, und die Spuren von Ebenen auf der Projectionsebene zu benutzen, während doch bei der axonometrischen Methode nur Projectionen der Abstände der Punkte von den Coordinatenebenen und Projectionen der auf den Coordinatenebenen liegenden Spuren von Ebenen zur Anschauung kommen.

Man kann hier die Constructionen zunächst so ausführen, dass man eine Coordinatenebene zur Projectionsebene wählt und nun die nöthigen Lothe von Punkten auf Ebenen, Normalschnitte von Prismen etc. in der gewöhnlichen Weise construirt.

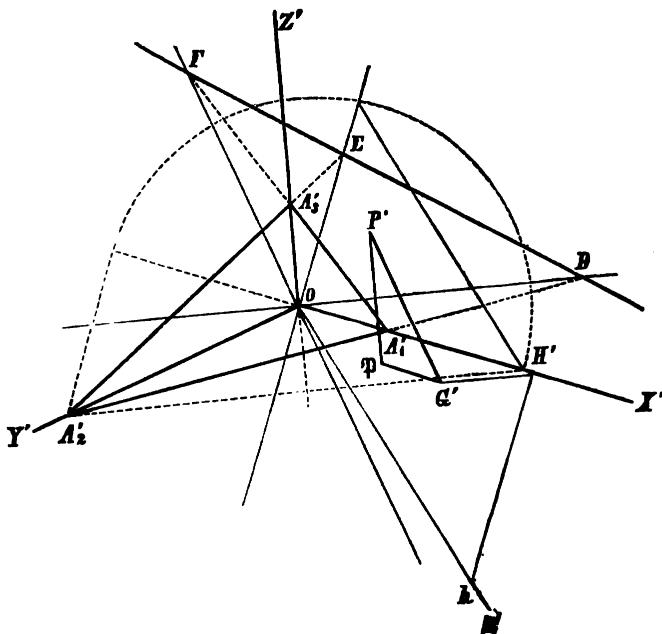
Hat man dabei zwei aufeinander senkrechte Projectionsebenen verwendet, so wird man die eine als XY-Ebene, die andere als XZ-Ebene betrachten, dazu noch eine auf beiden senkrechte YZ-Ebene fügen, die Abstände der nothwendigen Punkte von den Coordinatenebenen aus den Projectionen direkt abmessen, hierauf die Projection der Coordinatenachsen OX, OY, OZ auf die für die endgültige Darstellung vorgeschriebene Projectionsebene herstellen und nun die endgültige Projection jedes Punktes axonometrisch mit Hülfe der abgemessenen Abstände x, y, z eintragen.

Hat man das x, y, z jedes Punktes mit einem hinlänglich genauen Maassstabe gemessen, so stelle man sich drei verjüngte Maassstäbe her, in welchen die Längeneinheit in den für die Projectionen von x, y, z gültigen Verhältnissen $x' : x$, $y' : y$, $z' : z$ verjüngt erscheint. Die Projectionen der Abstände x, y, z eines Punktes sind dann der Reihe nach von dem ersten, zweiten, dritten dieser verjüngten Maassstäbe abzumessen, und zwar enthält dann jede Projection eben so viele verjüngte Maasseinheiten, wie die projicirte Strecke ursprüngliche.

11. Liegt der Coordinatenanfang O auf der Projectionsebene, so sind die Spuren der Coordinatenebenen die durch O gelegten Normalen zu OX', OY', OZ'.

Die Spur einer Ebene auf der Projectionsebene wird daher aus den Projectionen ihrer Spurpunkte A'_1, A'_2, A'_3 gefunden, indem man mit den Geraden $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_3A'_1$ der Reihe nach die Spuren der Ebenen OXY, OYZ, OZX durchschneidet; diese drei Schnittpunkte D, E, F liegen auf einer Geraden, und diese Gerade ist die Spur der Ebene A auf der Projectionsebene.

Um den Abstand eines Punktes P von der Projectionsebene aus den axonometrischen Bestimmungsstücken desselben abzuleiten, construire man zunächst den Neigungswinkel, den eine der Coordinatenachsen, z. B. die X-Achse, mit der Projectionsebene bildet, und trage unter diesem Winkel eine Gerade $O\Xi$ an OX' an.



(M. 338.)

Hierauf lege man durch P eine Parallele zu OF; die Projection dieser Parallelen geht durch P' parallel OF. Diese Gerade ist parallel der Ebene XOZ, die Projection ihrer Spur auf der Ebene XOY ist also der Schnitt G' ihrer Projection mit einer Parallelen zu OX' durch $\mathfrak{P}$.

Eine Ebene, die durch P parallel zur Projectionsebene gelegt wird, enthält die zur Projectionsebene parallele Gerade PG und schneidet daher die Ebene XOY in einer Geraden, deren Projection durch G' parallel zu OD geht.

Der Schnittpunkt H dieser Geraden mit OX ist daher von der Projectionsebene ebenso weit entfernt, wie P; diese Entfernung ist aber gleich der Strecke $H'h$, die auf dem zu OX' in X' errichteten Lothe von $O\Xi$ abgeschnitten wird. Also ist $H'h$ der Abstand des Punktes P von der Projectionsebene. —

12. Wir gehen nun zur Herstellung schiefer Projectionen auf axonometrischem Wege über, und beschränken uns dabei auf den in der Praxis ausschliesslich anzutreffenden Fall, dass eine Coordinatenebene, — wir wählen dazu die Ebene XOZ, — mit der Projectionsebene zusammenfällt.

Alsdann ist jede Figur, die in der XZ-Ebene oder in einer dazu parallelen Ebene liegt, mit ihrer Projection congruent.

Jede durch O gehende Gerade OY' kann als Projection der Y-Achse angenommen werden, und man kann noch ausserdem willkürlich bestimmen, welches Verhältniss die Projection einer der Y-Achse parallelen Strecke zur Strecke selbst haben soll. Aus beiden Angaben bestimmt sich die Richtung der Projectionsstrahlen.

Soll OY' die Projection der Y-Achse, und y' die Projection einer mit der Y-Achse parallelen Strecke y sein, so mache man $O\mathfrak{y}$ senkrecht zu OY', $OA' = y'$, $O\mathfrak{a} = y$ und ziehe $A'\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{a}A'$ die Umlegung eines Projectionsstrahles.

Insbesondere kann man zur Erleichterung der Construction $OA' = O\mathfrak{a}$

nehmen; der Neigungswinkel $OA\mathfrak{a}$ der Projectionsstrahlen gegen die Projectionsebene beträgt dann 45°.

Wir setzen im Folgenden die Projection der Coordinatenachsen und das für die mit OY parallelen Strecken gültige Verhältniss $y':y=\gamma$ als gegeben voraus.

(M. 339.)

13. Um die schiefe Projection eines Punktes P, dessen Coordinaten x, y, z gegeben sind, axonometrisch zu bestimmen, construire man zunächst $y'=\gamma y$; gewöhnlich wird $\gamma=1$ oder $\gamma=\frac{1}{2}$ angenommen, so dass y' entweder gleich y oder gleich der Hälfte von y ist. Hierauf mache man $O\mathfrak{P}'=x$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P} \parallel OY'$ und gleich y', und $\mathfrak{P}P'=z$, so ist P' die gesuchte Projection.

Ein Punkt ist durch seine Projection P' und die Projection seines Abstandes von einer Coordinatenebene, z. B. $P'\mathfrak{P}$, eindeutig bestimmt; der normale Abstand des Punktes von der Projectionsebene und die Normalprojection des Punktes werden aus diesen Angaben gefunden, indem man $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $P'\Pi'$ parallel OY', sowie $\mathfrak{P}'\Pi'$ parallel OZ zieht; ferner $\Pi'P'\mathfrak{p}$ gleich dem Neigungswinkel der Projectionsstrahlen, also $P'\mathfrak{p} \parallel A'\mathfrak{a}$ macht, und $\Pi'\mathfrak{p}$ senkrecht zu $P'\Pi'$ zieht. Dann ist Π' die Normalprojection des Punktes und $\Pi'\mathfrak{p}$ sein Abstand von der Projectionsebene.

Eine Ebene ist durch ihre Spur auf der Ebene OXY (der Projectionsebene) und durch die Projection des auf der Y-Achse liegenden Spurpunktes bestimmt. —

Auch hier ist zu bemerken, dass Aufgaben, bei denen es sich um die Construction bestimmter Winkel, insbesondere des am häufigsten vorkommenden rechten Winkels handelt, unter Benutzung von Normalprojectionen auf die Ebene OXZ oder auf eine andere geeignete Ebene zu lösen sind; die Resultate kann man dann axonometrisch in die schiefe Projection eintragen.

14. Unter isometrischer Projection versteht man theils die Abart der axonometrischen Normalprojection, bei welcher die Verkürzungsverhältnisse für die drei Achsen gleich gross sind, die Achsen also Winkel von 120° mit einander bilden; theils die axonometrische schiefe Projection, bei welcher die Ebene XOZ Projectionsebene ist und die Projectionen der der Y-Achse parallelen Strecken den Strecken selbst gleich sind, die Projectionsstrahlen also gegen die Projectionsebene unter einem Winkel von 45° geneigt sind.

Als monodimetrische Projection bezeichnet man die axonometrische Normalprojection, bei welcher die Verkürzungsverhältnisse zweier Coordinatenachsen gleich, diese Coordinatenachsen also gegen die Projectionsebene gleich geneigt sind, während die dritte Achse eine davon abweichende Neigung hat, wobei also die Projectionen der beiden ersteren Achsen symmetrisch gegen die Projection der dritten liegen. Der allgemeine Fall der axonometrischen Normalprojection wird auch als trimetrische Projection bezeichnet.

Die schiefe Projection wird auch als Parallel-Perspective bezeichnet; die

vorhin beschriebene isometrische schiefe Projection bezeichnet man auch als Cavalier-Perspective, oder Militär-Perspective; doch lohnt es kaum der Mühe, für in Bezug auf die Methode unwesentliche Aenderungen in den Bestimmungsstücken der axonometrisch behandelten schiefen Projection besondere Namen festzustellen.

§ 12. Centralprojection.

1. Unter der Centralprojection eines Punktes P auf eine Ebene Π versteht man den Punkt P', in welchem die Ebene Π von der Geraden geschnitten wird, die man von einem festen Punkte A, dem Projectionscentrum, nach dem Punkte P zieht*).

Alle Punkte, welche auf einem Projectionsstrahle, d. i. auf einem durch das Projectionscentrum A gehenden Strahle liegen, haben dieselbe Centralprojection.

2. Die Projectionsstrahlen, die vom Centrum A nach den Punkten einer Geraden PQ gehen, liegen auf einer Ebene; diese Ebene heisst die projicirende Ebene der Geraden.

Die Centralprojection einer Geraden PQ ist der Schnitt $P'Q'$ ihrer projicirenden Ebene mit der Projectionsebene Π.

Alle Geraden, die auf derselben durch das Centrum A gehenden Ebene liegen, haben dieselbe Centralprojection.

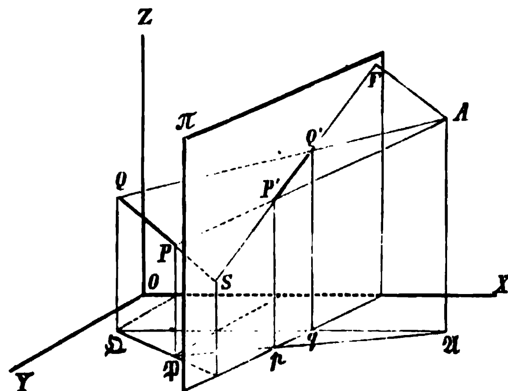
Die Spur S einer Geraden ist der einzige Punkt der Geraden, der mit seiner Projection zusammenfällt; ausser, wenn die Gerade ganz in der Projectionsebene liegt.

Der in unendlicher Ferne liegende Punkt einer Geraden PQ hat als Projectionsstrahl die Gerade, welche durch A parallel zu PQ geht. Die Spur dieser Parallelen ist daher die Projection dieses unendlich fernen Punkts; diesen Punkt F bezeichnet man als Fluchtpunkt der Geraden.

Eine Gerade ist durch Spur S und Fluchtpunkt F bestimmt; denn man kennt dann von ihr einen Punkt, die Spur, sowie die Richtung, die parallel zu AS ist. Die Centralprojection der Geraden, und zwar des Theiles derselben, der sich von der Projectionsebene auf der vom Centrum abgewandten Seite bis ins Unendliche erstreckt, ist die Strecke SF.

3. Parallele Gerade haben denselben Fluchtpunkt. Die Centralprojection einer Schaar paralleler Geraden ist daher ein Strahlenbüschel, das den Fluchtpunkt der Schaar zum Träger hat.

Normale zur Projectionsebene Π haben die Normalprojection A' des Centrums auf die Ebene Π zum Fluchtpunkt; da Normale zur Projectionsebene bei vielen Constructionen eine besondere Rolle spielen, so hat man den Fluchtpunkt derselben besonders benannt; er heisst der Augenpunkt.

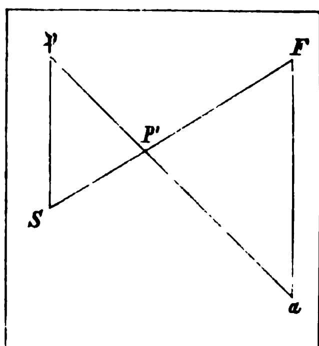


(M. 340.)

*) Die Figuren für diesen und den letzten Abschnitt sind zum Theil in schiefer Projection axonometrisch ausgeführt; dasselbe gilt von einigen Figuren des 1. und 2. Abschnittes.

4. Die Centralprojection eines Punktes P ist bestimmt, wenn man eine Parallelprojection des Punktes auf die Ebene Π, den Fluchtpunkt der Projectionsstrahlen und die Strecke des Projectionsstrahles für die Parallelprojection zwischen dem Punkte P und der Projectionsebene Π kennt.

Denn ist PS die Richtung der Projectionsstrahlen, mithin F der Fluchtpunkt derselben, und S die Parallelprojection von P auf Π, so liegt P' auf SF; und da PS parallel AF, so theilt P' die Strecke SF in dem Verhältniss $SP:AF$.



(M. 341.)

P' wird also erhalten, indem man S mit dem Fluchtpunkte F verbindet, durch S und F zwei Parallele zieht, auf denselben Strecken $S\mathfrak{p} = SP$, $F\mathfrak{a} = FA$ abträgt und $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ zieht; dann ist P' die gesuchte Centralprojection.

Wenn eine von den Strecken SP oder FA eine unbequeme Länge hat, so kann man statt der ganzen Strecken auch die Hälften, die Viertel, etc. auftragen, oder überhaupt für $S\mathfrak{p}$ und $F\mathfrak{a}$ zwei Strecken wählen, die sich wie SP und FA verhalten.

Die Strecke FA erhält man, wenn, wie immer vorauszusetzen ist, der Augenpunkt und die Entfernung des Projectionscentrums von der Projectionsebene (kurzweg die Distanz genannt) bekannt sind, als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks $A'AF$.

5. Ist eine Ebene E parallel der Projectionsebene, so sind die Projectionen der auf dieser Ebene enthaltenen Figuren den Figuren selbst ähnlich. Die Proection einer auf der Ebene E liegenden Strecke verhält sich zur Strecke selbst, wie die Distanz zum Abstande des Centrums von der Ebene E.

6. Geht eine Ebene durch das Projectionscentrum A, so fallen die Projectionen aller ihrer Punkte in die Spur der Ebene; die Projection der Ebene ist also in diesem Falle eine Gerade.

7. Legt man durch das Projectionscentrum A eine Ebene e, die mit einer gegebenen Ebene E parallel ist, so enthält e alle die Projectionsstrahlen, die parallel mit E, also nach unendlich fernen Punkten von E gezogen sind. Der Schnitt f dieser Ebene e mit der Projectionsebene enthält also die Projectionen aller unendlich fernen Punkte auf E.

Die Gerade f heisst die Fluchtlinie der Ebene E.

Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtlinie.

Eine Ebene ist durch Spur und Fluchtlinie bestimmt.

Die Fluchtpunkte aller Geraden einer Ebene E liegen auf der Fluchtlinie von E; die Spuren aller auf E enthaltenen Geraden liegen auf der Spur von E.

Der Fluchtpunkt der Falllinien der Ebene E ist der Fusspunkt des vom Augenpunkte auf die Fluchtlinie f gefällten Lothes; der Fluchtpunkt von Parallelen auf E, die mit den Falllinien (also auch mit der Spur) Winkel von 45° bilden, ist einer der beiden Punkte, die auf der Fluchtlinie f der Ebene E vom Fusspunkte B des vom Augenpunkte auf f gefällten Lothes um die Strecke AB entfernt sind.

Jede Gerade einer Ebene E und ihre Centralprojection treffen sch auf der Spur dieser Ebene; ein Polygon auf E und seine Central-

projection auf Π haben daher die Beziehung zu einander, dass sich je zwei entsprechende Gerade in einem Punkte der Spur der Ebene E treffen.

8. Es sei A' der Augenpunkt, d die Distanz; ferner s die Spur einer Ebene E, f ihre Fluchtlinie. (Tafel X, 3).

Macht man $A'B$ normal zu f, $A'\mathfrak{a}$ parallel zu f und gleich der Distanz d, ferner $Ba = B\mathfrak{a}$, so ist $Ba = B\mathfrak{a}$ der senkrechte Abstand des Projectionscentrums A von der Fluchtlinie f.

Um nun für eine Figur $CDGHI$ der Ebene E die Centralprojection herzustellen, legen wir E durch Drehung um die Spur s in die Projectionsebene um; diese Umlegung ergebe $C_1D_1G_1H_1I_1$.

Wir fällen von C, D, G, H, I Lothe auf die Spur und zeichnen ferner Parallelen zu einer willkürlichen Richtung bis an die Spur. Die Umlegungen dieser beiden Gruppen von Parallelen seien C_1c, D_1d, G_1g, H_1h, I_1i, ferner $C_1\mathfrak{c}$, $D_1\mathfrak{d}$, $G_1\mathfrak{g}$, $H_1\mathfrak{h}$, $I_1\mathfrak{i}$.

B ist der Fluchtpunkt der von C, D, G, H, I auf s gefällten Lothe; macht man aF parallel $C_1\mathfrak{c}$, so ist F der Fluchtpunkt der Parallelen zu $C\mathfrak{c}$.

Verbindet man nun c, d, g, h, i mit B, sowie $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ mit F, so sind diese beiden Gruppen von Geraden die Centralprojectionen der beiden Gruppen von Parallelen; die Schnittpunkte entsprechender nach B und F gehender Strahlen sind daher die verlangten Centralprojectionen der Punkte C, D, G, H, I.

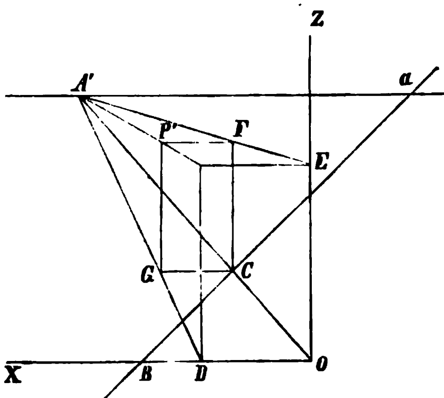
Schliesslich prüfe man die Construction, indem man sich überzeugt, dass sich je zwei entsprechende Gerade der Projection und der Umlegung in einem Punkte der Spur s schneiden.

9. Die weiteren Mittheilungen über die Centralprojection wollen wir nun darauf beschränken, dass wir zeigen, wie die Centralprojection jedes Punktes nach axonometrischer Methode bestimmt werden kann, d. h. wie man die Centralprojection eines Punktes findet, wenn man dessen Abstände x, y, z von drei auf einander normalen Coordinatenebenen und die Lage der Coordinatenebenen gegen die Projectionsebene Π kennt. Wir wollen die Construction für drei Fälle getrennt erörtern: 1. eine Coordinatenebene, die Ebene OXZ, fällt mit der Ebene Π zusammen; 2. eine Coordinatenachse, etwa OZ, fällt in die Projectionsebene, ohne dass dabei eine Coordinatenebene mit Π zusammenfällt; 3. der Coordinatenanfangspunkt liegt auf der Projectionsebene, ohne dass eine Achse mit der Projectionsebene zusammenfällt.

10. Axonometrische Construction der Centralprojection eines Punktes, wenn die Ebene XOZ mit der Projectionsebene zusammenfällt.

Ist A' der Augenpunkt, so ist OA' die Centralprojection der Y Achse.

Ferner sei $A'a$ parallel OX und gleich der Distanz.



(M. 342.)

Um nun die Centralprojection des Punktes P zu finden, dessen Coordinaten x, y, z sind, mache man zunächst $OB = y$, und ziehe Ba. Dann ist C die Centralprojection des Punktes der Y Achse, welcher von O um y entfernt ist.

Ferner mache man $OD = x$, $OE = z$, und ziehe AD und AE; ferner ziehe man CG parallel OX und CF parallel OZ, sowie FP' parallel OX und GP' parallel OZ; so ist P' die Centralprojection von P.

Ausser von den mitgetheilten Sätzen ist hier noch von dem Satze Gebrauch gemacht worden, dass Gerade, die mit der Spur einer Ebene parallel sind, Centralprojectionen haben, die ebenfalls mit der Spur der Ebene parallel sind.

Man sieht leicht, wie man umgekehrt aus der Centralprojection eines Punktes und seines Abstandes von einer Coordinatenebene, z. B. von der Ebene XOY, die Coordinaten des Punktes bestimmen kann.

11. Axonometrische Construction der Centralprojection eines Punktes, wenn keine Coordinatenebene, doch eine der Achsen mit der Projectionsebene zusammenfällt. (Tafel X,4.)

Es sei A' der Augenpunkt, d die Distanz, O der Coordinatenanfang, OZ die in der Projectionsebene liegende Coordinatenachse. Die Spur MN der Ebene OXY geht durch O normal zu OZ, die Fluchtlinie f parallel zu dieser Geraden durch A'. Macht man $A'C$ normal zur Fluchtlinie f und gleich der Distanz d, und zieht man durch C Gerade, deren Winkel mit CA' gleich den Winkeln der Achsen OX und OY mit der Normalen zur Projectionsebene sind, so erhält man die Fluchtpunkte ξ und η dieser beiden Achsen.

Wir wollen nun die Fluchtpunkte der auf der Ebene OXY liegenden Geraden bestimmen, welche von OM und ON Strecken von derselben Grösse abschneiden, wie von OX und OY, alle Strecken von O aus gerechnet.

Zu diesem Zwecke ziehen wir durch C eine Parallele zu f, machen $Cm = Cn = Cp = Cq$, und ziehen $C\beta$ parallel pq, sowie $C\gamma$ parallel mn; dann sind β und γ die gewünschten Fluchtpunkte.

Um nun die Centralprojection eines Punktes P zu erhalten, der die Coordinanten x, y, z hat, mache man $OB = x$, $OC = y$ und durchschneide $O\xi$ und $O\eta$ mit den Geraden $B\beta$ und $C\gamma$ in D und E; dann sind OD und OE die Centralprojectionen der von O aus auf den Achsen OX und OY aufgetragenen Strecken x und y.

Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden $D\eta$ und $E\xi$ ist die Centralprojection der Projection des Punktes P auf die Ebene OXY.

Macht man nun $OF = z$, durchschneidet f mit $O\mathfrak{P}$, zieht FI und schliesslich $\mathfrak{P}P$ parallel OZ, so ist P die gesuchte Projection.

Man kann auch ξF und ηF ziehen, darauf durch Parallele zu OZ die Punkte G und H bestimmen und erhält dann P als Durchschnitt von $G\eta$ und $H\xi$.

12. Construction der Centralprojection eines Punktes aus den Coordinaten desselben, wenn keine Coordinatenachse, sondern nur der Anfangspunkt in der Projectionsebene liegt.

Gegeben sei ausser dem Augenpunkt A' und der Distanz d der Coordinatenanfang O und die Spur S der Ebene OXY; ferner sei bekannt, dass eine Ebene, die der Projectionsebene parallel und von ihr um die Distanz d entfernt ist, von den Achsen die Strecken OB, OC und OD abschneidet.

Wir construiren zunächst (Tafel XI, 2) das Dreieck BCD in der Projectionsebene in sonst beliebiger Lage aus seinen Seiten, die als Hypotenusen rechtwinkeliger Dreiecke gefunden werden, deren Katheten je zwei der Strecken OB, OC, OD sind, zeichnen die Höhen dieses Dreiecks und bemerken den Höhenschnittpunkt α.

Ziehen wir durch das Centrum A Parallele zu OX, OY, OZ und durchschneiden damit die Projectionsebene, so erhalten wir die Fluchtpunkte ξ, η, ζ der Coordinatenachsen (Tafel XI, 1). Das Dreieck $\xi\eta\zeta$ ist congruent BCD. Die Höhen des Dreiecks $\xi\eta\zeta$ sind die Normalprojectionen der Geraden $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$ (§ 11, 2) und A' ist der Höhenschnittpunkt. Die Gerade $A'\zeta$ ist daher parallel der Normalprojection der Z-Achse auf die Bildebene, mithin normal zur Spur S der Ebene OXY.

Macht man $A'\zeta$ normal zu S und gleich αD, so ist ζ der Fluchtpunkt der Z-Achse in richtiger Lage. Copirt man nun das Dreieck BCD, von der zu $D\alpha$ homologen Strecke $\zeta A'$ ausgehend, so erhält man das Dreieck der Fluchtpunkte $\xi\eta\zeta$, dessen Seiten $\xi\eta$, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ die Fluchtlinien der Ebenen OXY, OYZ, OZX sind.

Construirt man einen Halbkreis über $\xi\eta$, der $A'\zeta$ in a schneidet, so ist das Dreieck $\xi a\eta$ die Umlegung des Dreiecks $\xi A\eta$.

Um nun die Fluchtpunkte der Parallelen in der Ebene XOY zu erhalten, welche, von S und von OX und OY von O aus gezählt, gleiche Strecken abschneiden, ziehen wir $ab \parallel S$ und machen $ac = ad = ae = af$ und ziehen $a\beta$ und $a\gamma$ parallel fe und cd; β und γ sind die gewünschten Fluchtpunkte.

Die Spur t der Ebene OXZ ist parallel zu $\xi\zeta$. Construiren wir einen Halbkreis über $\xi\zeta$, der $A'\eta$ in a_1 schneidet, so ist das Dreieck $\xi a_1 \zeta$ die Umlegung von $\xi A\zeta$. Machen wir $a_1 g = a_1 h$ und parallel $\xi\zeta$, sowie $a_1\delta$ parallel gh, so ist δ der Fluchtpunkt der Parallelen, die von t und OZ von O aus gerechnet gleiche Strecken abschneiden.

Die Centralprojection eines Punktes, der von den Coordinatenebenen die Abstände x, y, z hat, wird nun in folgender Weise gefunden:

Man mache $OL = x$, $OM = y$, $ON = z$ und durchschneide der Reihe nach $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ mit den Geraden $L\beta$, $M\gamma$, $N\delta$; dann sind OL_1, OM_1, ON_1 die Centralprojectionen der auf den Achsen von O aus abgeschnittenen Strecken x, y, z.

Zieht man nun $M_1\xi$ und $N_1\eta$, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ die Centralprojection der Normalprojection des Punktes auf die Ebene OXY; die gesuchte Centralprojection P liegt also auf $\mathfrak{P}\zeta$. Durchschneidet man $\xi\eta$ mit $O\mathfrak{P}$ und zieht $N_1 Q$, so ist der Schnittpunkt P die gesuchte Projection.

Man kann dieselbe auch erhalten, wenn man $L_1\zeta$, $N_1\xi$, sowie $M_1\zeta$, $N_1\eta$, und schliesslich $R\eta$ und $T\xi$ zieht; der Schnittpunkt dieser letzten beiden Geraden ist ebenfalls P.

13. Wenn die Centralprojection eines Gebäudes, einer Maschine etc. construirt werden soll, so kann man meist die Coordinaten der Punkte des Objects ihrer Grösse wegen nicht auf die Projectionsebene auftragen.

Man wähle in diesem Falle Coordinatenebenen möglichst nahe dem Object.

Handelt es sich um die Projection eines Gebäudes, dessen Wände je einer von zwei auf einander senkrechten Verticalebenen parallel sind, so wird man die Horizontalebene und diese beiden Verticalebenen zu Coordinatenebenen wählen.

Hierauf entscheide man sich über die Lage des Centrums und der Projectionsebene gegen die Coordinatenachsen.

Hat man das Centrum gewählt, so wird man die Projectionsebene in geeignete Entfernung vom Centrum (die jedenfalls nicht weniger wie die deutliche Sehweite, d. i. ca. 25 Centimeter, betragen sollte) so legen, dass der Augenpunkt

ungefähr in die Mitte des herzustellenden Bildes kommt. Die Distanz sei d, der Abstand des Anfangspunktes von der Projectionsebene sei Δ.

Hierauf denke man sich vom Centrum aus Strahlen nach allen Punkten der Coordinatenebenen und nach allen Punkten des darzustellenden Gegenstandes gezogen und diese Strecken im Verhältnisse $d:\Delta$ getheilt.

Die Theilpunkte bilden eine Figur, welche der aus den Coordinatenebenen und dem Object bestehenden ähnlich ist, und zwar so, dass homologe Strecken das Verhältniss $d:(d+\Delta)$ haben; wir haben also das Coordinatensystem und das Object im verjüngten Maassstabe vor uns; das Verjüngungsverhältniss ist $d:(d+\Delta)$. Der Anfangspunkt des verjüngten Coordinatensystems liegt auf der Projectionsebene. Anstatt nun das Object selbst darzustellen, projicire man von dem gegebenen Centrum aus das verjüngte Coordinatensystem und erzeuge mit Hülfe der verjüngten x, y, z die Centralprojection des verjüngten Objects, die zugleich die des gegebenen Objects ist.

§ 13. Schattenconstruction und Helligkeit.

1. Bei der geometrischen Construction des Schattens, den eine undurchsichtige Figur auf die Projectionsebene oder auf irgend welche Flächen wirft, kommen zwei Arten der Beleuchtung in Betracht: Die Beleuchtung durch parallele Strahlen, welche angenähert der Beleuchtung durch die Sonne und den Mond entspricht, und die Beleuchtung durch Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, ungefähr entsprechend der Beleuchtung durch eine einzelne Kerzenflamme.

Bei der Beleuchtung durch Parallelstrahlen setzt man gewöhnlich voraus, dass die Richtung der Lichtstrahlen die einer Würfeldiagonale ist, wenn eine Kante des Würfels mit der Projectionsachse und zwei Flächen mit den Projectionsebenen zusammenfallen; und zwar nimmt man die Diagonale, die von links, vorn, oben ausgeht. Bei axonometrischen Darstellungen setzt man meist dieselbe Richtung der Lichtstrahlen gegen die Coordinatenebenen voraus.

2. Der Schatten eines Körperpunktes ist der Durchschnitt des durch ihn gehenden Lichtstrahles mit der den Schatten aufnehmenden Fläche.

Im Falle paralleler Strahlen ist daher der Schatten einer Figur eine Parallelprojection derselben auf die den Schatten aufnehmenden Flächen, bei centraler Beleuchtung eine Centralprojection.

3. Wir müssen uns darauf beschränken, die Schattenconstruction für ebenflächige Körper an einem Beispiele zu erläutern, indem wir axonometrisch den Schatten construiren, den die Pyramide $ABCDEF$ auf die Ebenen OXY und OXZ, sowie auf das gerade Parallelepiped $GHIKLMNP$, und den Schatten, den letzteres auf die Ebenen OXY und OXZ wirft (Tafel XII).

Das Licht habe die Richtung der Diagonale eines Würfels, dessen Kanten parallel den Achsen sind.

Die Projection einer Strecke der Y-Achse sei der projicirten Strecke gleich. Machen wir $OQ = OR = RS$ und $RS \parallel OZ$, so ist SQ die Richtung der Lichtstrahlen.

Ist T die Projection von A auf OXY und ziehen wir Ta parallel RQ, Aa parallel SQ, so ist a der Schatten der Pyramidenspitze A auf die Ebene OXY, mithin begrenzen Fa und Da den Pyramidenschatten.

Ist b der Schnitt von Ta und OX, und zieht man bc normal zu OX, so

ist c der Schatten, den A auf die Ebene XOZ wirft, und demnach cde der Theil des Pyramidenschattens, der auf die Ebene OXZ fällt.

Wir ziehen nun fg parallel OZ und erhalten so den Schatten g der Spitze A auf der Ebene $KINP$. Ziehen wir von den Geraden hg und ig die Theile hk und im, welche innerhalb des Parallelogramms $KINP$ liegen, so begrenzen sie den auf diese Fläche fallenden Pyramidenschatten.

Plx ist der Theil des Pyramidenschattens, der auf die Fläche $KGLP$ fällt.

Bei k und m geht die Schattengrenze auf die Fläche $GHIK$ über. Ziehen wir no parallel RQ, so ist o der Schatten von A auf der Ebene $GHIK$, mithin $kmqp$ der auf $GHIK$ fallende Theil des Pyramidenschattens.

Wir fügen noch den Schatten des Parallelepipeds hinzu, indem wir Nr parallel RQ und Ir parallel SR ziehen, dann ist r der Schatten von I; der Schatten rs von IH ist parallel und gleich IH, der Schatten st der Kante HG geht parallel zu HG.

Der Schatten von LG ist die durch L gelegte Parallele zu RQ. Zieht man durch den Punkt u derselben eine Parallele zu OZ und $Gv \parallel SQ$, so ist v der Schatten von G auf der Ebene OXZ; mithin ist $uvwcd$ der Theil der Ebene OXZ, dem durch die Pyramide und das Prisma das Licht entzogen wird.

4. Fällt der Schatten einer ebenen Figur auf eine parallele Ebene, so ist er im Falle paralleler Lichtstrahlen der Figur congruent; wenn die Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen, so ist er der schattenwerfenden Figur ähnlich.

Der Schatten eines Kreises ist ein Kreis, wenn bei paralleler oder bei centraler Beleuchtung der Schatten auf eine der Kreisebene parallele Fläche fällt. Ist die den Schatten aufnehmende Fläche der Kreisebene nicht parallel, so ist der Kreisschatten bei paralleler Beleuchtung eine Ellipse, von welcher man zwei conjugirte Diameter erhält, wenn man den Schatten zweier aufeinander senkrechten Kreisdiameter aufsucht.

5. Der Schatten eines Rotationscylinders wird bei paralleler Beleuchtung durch die beiden Tangentenebenen begrenzt, die der Strahlenrichtung parallel sind; bei centraler Beleuchtung durch die beiden Tangentenebenen, die durch das Lichtcentrum gehen.

Der Schatten auf eine Ebene ist also in dem ersten Falle im Allgemeinen ein von zwei Parallelen begrenzter Streifen, im letzteren Falle ein Winkel, dessen Scheitel der Schnitt der Geraden, die durch das Lichtcentrum parallel zur Cylinderachse gelegt wird, und der den Schatten aufnehmenden Ebene ist, und dessen Schenkel die Schnittellipse dieser Ebene und des Cylinders berühren.

6. Der Schatten eines Rotationskegels wird von zwei Tangentialebenen desselben begrenzt; und zwar bei paralleler wie bei centraler Beleuchtung durch die beiden Tangentialebenen, die den durch die Kegelspitze gehenden Lichtstrahl enthalten. Lässt sich durch den die Spitze enthaltenden Lichtstrahl keine Tangentenebene an den Kegel legen, so wird jeder Punkt im Innern der einen Kegelhälfte vom Lichte getroffen, jeder ausserhalb dieser Kegelhälfte liegende Punkt liegt im Schatten.

7. Die Lichtstrahlen, welche eine Kugel berühren und daher den Kugelschatten begrenzen, bilden bei paralleler Beleuchtung die Mantellinien eines Rotationscylinders, dessen Achse der durch das Kugelcentrum gehende Lichtstrahl ist, und der den Radius der Kugel hat. Bei centraler Beleuchtung bilden diese den Schatten begrenzenden Strahlen die Mantellinien eines Rotationskegels, dessen Achse wieder der durch das Kugelcentrum gehende Lichtstrahl ist.

Bei paralleler Beleuchtung ist daher der Schatten der Kugel auf einer Ebene E ein Kreis oder eine Ellipse, je nachdem die Richtung der Lichtstrahlen normal oder schräg zur Ebene E ist; bei centraler Beleuchtung kann der ebene Schatten einer Kugel Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein, je nach der Lage der Ebene E gegen den die Kugel tangirenden Strahlenkegel.

8. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Beleuchtung durch parallele Strahlen.

Die vom Lichte getroffenen Flächen eines Polyëders oder Oberflächenelemente eines krummflächig begrenzten Körpers erscheinen nicht alle gleich stark beleuchtet. Setzt man für alle dieselbe physikalische Beschaffenheit voraus, und nimmt man an, dass sie matt (nicht schimmernd oder spiegelnd, etwa so wie ungeglätteter gegossener Gyps) erscheinen, so trifft man die wirklichen Verhältnisse hinlänglich genau, wenn man annimmt, dass die Helligkeit eines Flächenelements gleich dem Sinus des Neigungswinkels ist, den die das Element treffenden Lichtstrahlen mit dem Element bilden, wobei man die Helligkeit des Elementes, das normal zu den Strahlen ist, als Einheit betrachtet. Die Richtung, unter welcher das Element vom Beschauer wahrgenommen wird, und als welche man die Richtung der Projectionsstrahlen zu nehmen hat, ist auf die Helligkeit, unter welcher ein Flächenelement erscheint, ohne Einfluss; auf den Einfluss, den die wechselnde Entfernung des Beschauers auf die Helligkeit der wahrgenommenen Flächenelemente hat, soll hier keine Rücksicht genommen werden.

9. Die soeben gegebene Helligkeitsregel hat zur Voraussetzung, dass ausser den parallel einfallenden keine weiteren Lichtstrahlen den Körper treffen; wäre dieselbe genau erfüllt, so würden die im Schatten liegenden Flächentheile absolut lichtlos sein. In der Natur ist diese Voraussetzung niemals erfüllt.

Ein beträchtlicher Theil des Sonnenlichts wird beim Durchgang durch die mit Wasserbläschen, mikroskopischen Organismen, Staubtheilchen etc. beladene, auch im reinsten Zustande nicht absolut durchsichtige Luft nach allen Richtungen hin zerstreut und bringt die Helligkeit des blauen oder mit Wolken bedeckten Himmels hervor; durch dieses zerstreute Licht erhalten auch die von den direkten Sonnenstrahlen nicht getroffenen Flächen eine bemerkbare Helligkeit.

Hierzu kommt noch die Beleuchtung der im Schatten liegenden Flächen durch Licht, welches von dahinter befindlichen beleuchteten Flächen zerstreut wird.

Die Unterweisung über die Darstellung der Helligkeitsunterschiede eines beleuchteten Körpers unter Rücksicht auf alle Umstände, die darauf von Einfluss sind (wobei dann auch dem Umstand Rechnung getragen wird, dass die Sonnenstrahlen nicht genau parallel zu uns gelangen, und infolge dessen der Schatten eines Körpers immer heller wird, je weiter er vom Körper entfernt ist), ist nicht Sache geometrischer Erörterung, sondern fällt dem aus künstlerischen Gesichtspunkten geleiteten Zeichenunterrichte zu.

Wir wollen im Folgenden zeigen, wie unter gewissen, vereinfachenden Voraussetzungen die Helligkeit beleuchteter Flächentheile bestimmt und dargestellt werden kann.

10. Wir nehmen als Einheit der Helligkeit die Helligkeit einer Ebene, welche von den parallelen Lichtstrahlen normal getroffen wird.

Ausser den direkten Strahlen werde der Körper von allen Seiten gleich-

mässig von zerstreutem Lichte beleuchtet, und in Folge dessen auf allen Flächen eine minimale Helligkeit von der Stärke m ($m < 1$) hervorgebracht.

Die Helligkeit der vom direkten Lichte normal getroffenen Flächenelemente setzt sich aus dieser minimalen Helligkeit und aus der durch die direkten Strahlen allein hervorgerufenen Helligkeit zusammen; die direkten Strahlen geben also den Elementen, die sie normal treffen, die Helligkeit $1 - m$. Ferner nehmen wir an, dass eine Lichtquelle (etwa eine reflectirende Wand von geeigneter Grösse und Stellung) Licht aussendet, welches eine den direkten Lichtstrahlen entgegengesetzte Richtung hat, und welches den normal getroffenen Flächenelementen die Helligkeit n giebt; da diese noch ausserdem die minimale Helligkeit m empfangen, so haben sie also im Ganzen die Helligkeit $n + m$.

Es giebt weder theoretische Gesichtspunkte, noch Uebereinkommen über die Grösse der Brüche m und n. Für m wird man den geringsten Grad von Helligkeit wählen, den man bei der Darstellung überhaupt noch anwenden will; für n wählt man keinen zu kleinen Bruch, vielleicht $\frac{1}{8}$, da man sonst den Zweck, den die Darstellung der Helligkeitsverhältnisse nur haben kann, nämlich eine möglichst deutliche, alle Einzelnheiten so gut als möglich hervorhebende Figur zu liefern, nicht wol erreicht.

11. Um nun die Helligkeit der Flächen eines beleuchteten Polyëders zu erhalten, ziehe man durch einen Punkt P der Projectionsebene einen Lichtstrahl und schneide auf demselben zwei Strecken PQ und PR ab, die man gleich $1 - m$, bez. gleich n Einheiten eines passenden Maassstabes macht. Hierauf bestimme man die Spuren der Ebenen, welche durch P parallel den Flächen des Polyëders gehen, und construire die senkrechten Abstände des Punktes Q von den Flächen, die von den direkten Strahlen getroffen werden, sowie die Abstände des Punktes R von den Flächen, welche im Schatten liegen.

Misst man diese Abstände mit demselben Maassstabe, nach welchem PQ und PR aufgetragen worden sind, und addirt zu den erhaltenen Längenzahlen noch den Bruch m, so erhält man die Helligkeit der Flächen des Polyëders.

12. Die Hauptaufgabe für die *Darstellung der Beleuchtung krummer Flächen* ist die Construction von *Linien gleicher Helligkeit*, d. i. von Linien, längs welcher Flächenelemente von gleicher Helligkeit liegen.

Construirt man eine Folge solcher Linien, so dass der Unterschied der Helligkeit je zweier benachbarter Linien so klein ist, dass feinere Unterschiede nicht dargestellt werden können, so kann man die ganze zwischen zwei benachbarten Linien liegende Zone der Fläche als von durchaus gleicher Helligkeit ansehen.

Wir zeigen im Folgenden die Construction der Linien von gleicher gegebener Helligkeit für die einfachsten Fälle: für den Rotationscylinder, für den Rotationskegel und für die Kugel.

13. *Linien gleicher Helligkeit am Rotationscylinder.* Flächenelemente, die auf derselben Tangentialebene, also entlang einer Mantellinie liegen, werden von den Lichtstrahlen unter gleichem Winkel getroffen; die Linien gleicher Helligkeit sind also Mantellinien.

(M. 343.)

Wir nehmen eine Parallelkreisebene zur Projectionsebene, ziehen eine Gerade durch die Cylinderachse den Lichtstrahlen parallel und tragen darauf vom Schnittpunkt A mit der Achse aus die Strecken $AP = (1 - m)$ Einheiten und $AQ = n$ Einheiten auf; die Grundrisse der Punkte P und Q seien P' und Q'.

Legen wir durch A' eine Gerade pq parallel zur Spur einer Tangentialebene, und ziehen $P'p$ und $Q'q$ normal zu pq, so sind $P'p$ und $Q'q$ die Abstände der Punkte P und Q von der durch pq gehenden Verticalebene, mithin gleich der Helligkeit, welche die zu pq parallele Tangentialebene an der nach P, bez. nach Q gewandten Seite des Cylinders von den direkten, bez. den reflectirten Strahlen erhält.

Um die Tangentialebenen T_1, T_2, T_3 ... zu finden, welche direkt beleuchtet werden und die Helligkeiten a_1, a_2, a_3 ... haben, hat man also von P' aus Kreise mit den Radien $a_1 - m$, $a_2 - m$, $a_3 - m$ ... zu zeichnen und an diese von A' aus Tangenten t_1, t_2, t_3 ... zu legen; construirt man nun Tangentialebenen des Cylinders an der P zugewandten Seite, welche parallel t_1, t_2, t_3 ... sind, so berühren diese den Cylinder in Mantellinien, längs deren die Cylinderelemente die Helligkeiten a_1, a_2, a_3 ... haben.

Ebenso verfährt man zur Construction der Mantellinien, längs welcher die Flächenelemente liegen, die von den reflectirten Strahlen getroffen werden und die Helligkeiten b_1, b_2, b_3 ... haben, die also von den reflectirten Strahlen die Helligkeiten $b_1 - m$, $b_2 - m$, $b_3 - m$, ... erhalten.

Die grösste Helligkeit von den direkt beleuchteten Strahlen empfangen die Elemente entlang der durch B gehenden Mantellinie; die grösste von den durch Reflexion beleuchteten, die entlang der Mantellinie durch C; die Elemente an der Grenze des beleuchteten und des im Schatten liegenden Theils des Cylinders, die auf der zu PQ parallelen beiden Tangentenebenen liegen, haben nur die minimale Helligkeit m.

(M. 344.)

14. Linien gleicher Helligkeit am Rotationskegel. Wir ziehen durch die Kegelspitze Σ eine Gerade in der Richtung der direkten Strahlen und machen auf derselben $\Sigma P = 1 - m$. Die Tangentialebene, welche den Kegel entlang der der Mantellinie ΣA berührt, hat auf einer Parallelkreisebene, die wir zur Projectionsebene wählen, als Spur die Tangente T des Parallelkreises im Punkte A; der Grundriss des von P auf diese Tangentialebene gefällten Lothes hat die Richtung des von P' auf T gefällten Lothes $P'\mathfrak{p}$.

Ziehen wir (in einer Nebenfigur) $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}P'$, ferner $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ normal zu $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1$ und gleich $P'P$, sowie durch $\mathfrak{p}_1$ eine Gerade $\mathfrak{p}_1 p$, welche mit $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ den Meridianwinkel α des Rotationskegels bildet, und ziehen $\mathfrak{P}p$ normal zu $\mathfrak{p}_1 p$, so ist $\mathfrak{P}p$ gleich dem Ab-

stande des Punktes P von der durch ΣA gehenden Tangentialebene des Kegels, die Längenzahl von $\mathfrak{P}p$ ist also die Helligkeit, welche diese Tangentialebene von den direkten Strahlen erhält.

Die Linien gleicher Helligkeit sind daher Mantellinien des Kegels; die grösste Helligleit erhält die Mantellinie ΣB; die Helligkeit Null von den direkten Strahlen, also im Ganzen die minimale Helligkeit m, erhalten die Mantellinien, deren Tangentialebenen durch ΣP (also durch die Horizontalspur von ΣP) gehen.

Um nun die Abstände $P'\mathfrak{p}$ der Spuren der Tangentialebenen zu finden, welche von den direkten Strahlen gegebene Helligkeiten $a_1 - m$, $a_2 - m$, $a_3 - m$, ... erhalten, im Ganzen also die Helligkeiten a_1, a_2, a_3 ... haben, trage man auf $\mathfrak{P}p$ von $\mathfrak{P}$ aus die Strecken $a_1 - m$, $a_2 - m$, .. auf, und ziehe durch ihre Enden Parallelen zu $p\mathfrak{p}_1$; sind l_1, l_2, l_3 ... die Schnittpunkte dieser Parallelen mit $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1$, so sind $l_1\mathfrak{P}'$, $l_2\mathfrak{P}'$, $l_3\mathfrak{P}'$ ... die gesuchten Abstände.

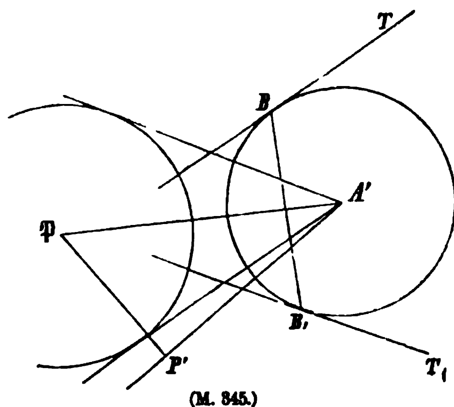
Construirt man nun um P' als Centrum Kreise mit den Halbmessern $l_1\mathfrak{P}'$, $l_2\mathfrak{P}'$, $l_3\mathfrak{P}'$ ... und zieht gemeinsame Tangenten dieser Kreise und des Kegelkreises $A'B'$, so berühren diese den Kegelkreis in Punkten, durch welche die Mantellinien gehen, längs welcher die Flächenelemente des Kegels die Helligkeiten a_1, a_2, a_3 ... haben.

Es ist dabei noch zu beachten, dass von den vier gemeinsamen Tangenten eines der um P' geschlagenen Kreise und des Parallelkreises immer nur zwei symmetrisch gegen $P'\Sigma'$ gelegene zu verwenden sind; liegt nämlich $\mathfrak{p}_1$ zwischen m und $\mathfrak{P}'$, so sind die beiden Tangenten zu nehmen, die zwischen P' und Σ' hindurchgehen; liegt aber $\mathfrak{P}'$ zwischen m und $\mathfrak{p}_1$, so gelten die Tangenten, welche nicht zwischen Σ' und P' hindurchgehen.

Ebenso findet man die Linien gleicher gegebener Helligkeit für den Theil des Kegels, der von den reflectirten Strahlen beleuchtet wird.

15. Linien gleicher Helligkeit auf der Kugel. Contruiren wir von einem Punkte des durch das Kegelcentrum gehenden Lichtstrahles als Spitze einen Rotationskegel, der diesen Lichtstrahl zur Achse hat und die Kugel berührt, so sind alle Tangentialebenen dieses Kegels gegen die direkten Strahlen gleich geneigt, der ganze Kegel empfängt also von den direkten Strahlen dieselbe Helligkeit; der Kreis, in welchem er die Kugel berührt, ist also für die Kugel eine Linie gleicher Helligkeit.

Die Linien gleicher Helligkeit auf der Kugel sind daher Kreise, deren Ebenen normal zur Richtung der Strahlen stehen.



(M. 845.)

Ist $A'P'$ der Grundriss der auf dem durchs Kugelcentrum A gehenden Lichtstrahle vom Centrum aus abgeschnittenen Strecke $1 - m$, so machen wir $P'\mathfrak{P}$ normal zu $A'P'$ und gleich der Höhe des Punktes P über einer durchs Kugelcentrum parallel zur Projectionsebene gelegten Ebene. Construiren wir nun Kreise um $\mathfrak{P}$ mit den Radien $a_1 - m$, $a_2 - m$, $a_3 - m$, ..., legen daran Tangenten von A' aus und ziehen zu denselben parallele

Tangenten an den Grundriss der Kugel, so bestimmen diese Tangenten die Kugelkreise, die die Helligkeiten a_1, a_2, a_3 ... haben. Sind z. B. T, T_1 zwei Tangenten, welche parallel den von A' an den mit Radius $a - m$ um $\mathfrak{P}$ geschlagenen Kreis gezogen sind, so ist die Gerade $B'B$ die Verticalprojection des Kreises, der die Helligkeit a empfängt, wobei als Projectionsebene die durch $P'A'$ gehende Verticalebene dient; es erübrigt nur noch, die Ellipse zu construiren, welche der Grundriss dieses Kreises ist. Die kleine Achse derselben ist die Projection von $B'B$ auf die Gerade $A'P'$, die grosse Achse ist gleich der Strecke $B'B$.

Der Punkt der Kugel, durch welchen der Strahl AP geht, hat die Helligkeit 1, der Gegenpunkt die Helligkeit $m + n$, der auf dem Diameter dieser beiden Punkte normale grösste Kreis der Kugel hat die minimale Helligkeit m.

16. Wir geben zum Schluss noch einige Andeutungen über die Darstellung der verschiedenen Helligkeitsgrade.

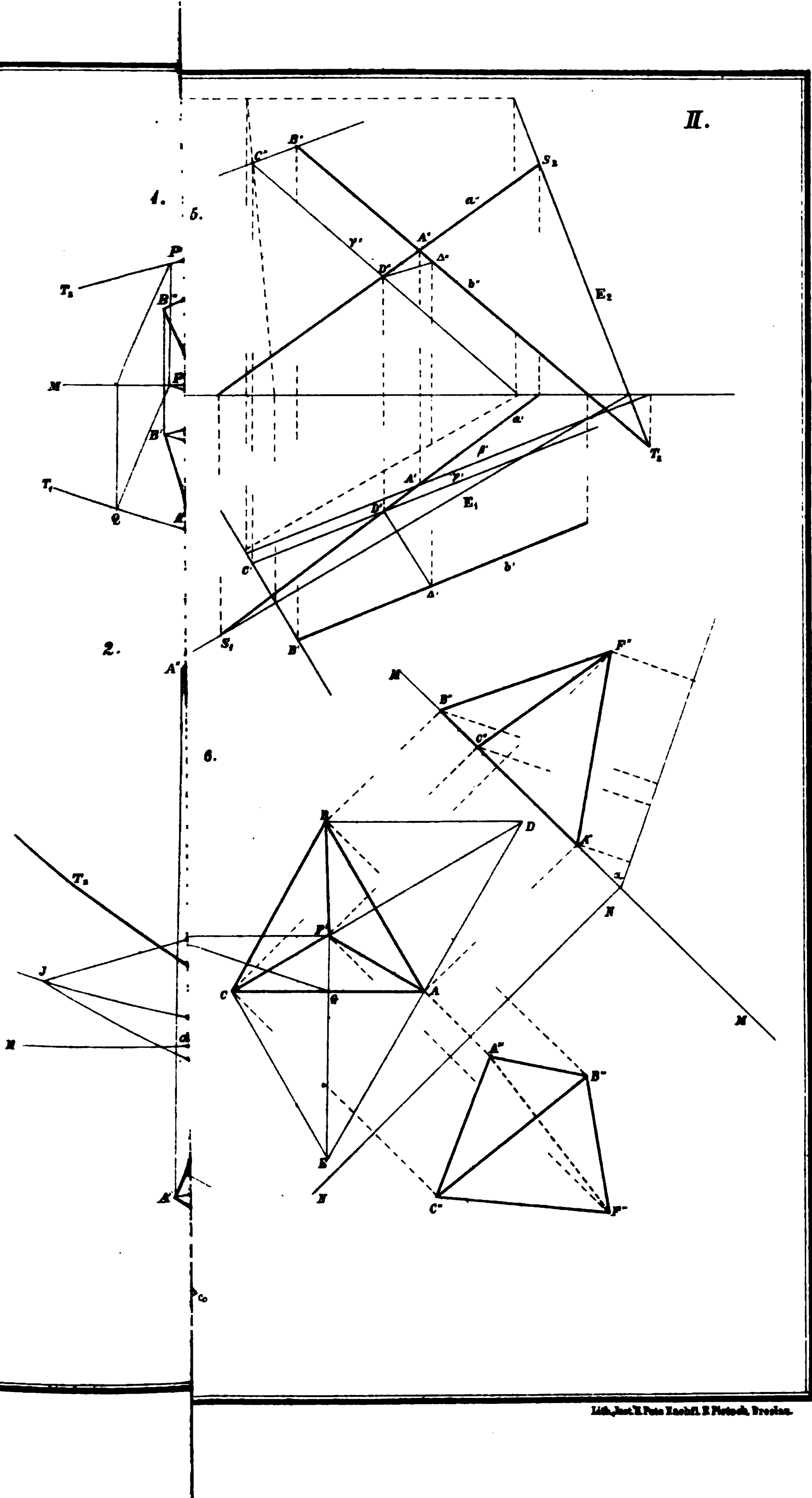
Als Einheit der Helligkeit nehmen wir die Helligkeit des weissen Papiers, auf welches gezeichnet wird; die Helligkeit Null stellen wir durch einen Ueberzug von chinesischer Tusche her, der so dick sein muss, dass das Papier nicht hindurchscheint. Bedecken wir nun einen Streifen Papier mit gleichbreiten, parallelen und gleichweit von einander abstehenden vollkommen schwarzen (mit der Reissfeder hergestellten) Tuschestrichen, so macht der Streifen, aus hinlänglicher Ferne gesehen, den Eindruck der durchschnittlichen Helligkeit r, wenn r das Verhältniss der Breite der gesammten weissen Zwischenräume zur ganzen Fläche des Streifens ist. Wenn man nun etwa 20 Helligkeitsstufen genau, weitere Zwischenstufen nur abschätzungsweise unterscheiden will, so stelle man (ausser einem völlig weissen Streifen für die Helligkeit = 1) 19 Streifen her, bei welchen das Verhältniss der weissen Zwischenräume zur ganzen Fläche des Streifens der Reihe nach die Werthe 19 : 20, 18 : 20, 17 : 20, etc. bis 1 : 20 hat.

Hierauf überziehe man nun Flächen von derselben Grösse nach Bedarf mehreremals nach einander mit dünn angemachter Tusche, bis aus geeigneter Entfernung gesehen die so übertünchten Flächen denselben Eindruck der Helligkeit machen, wie die durch schwarze Linien schraffirten Streifen. Man erhält so einen Helligkeitsmaassstab, den man dann beim Abtuschen der Flächen oder Flächentheile einer Figur zu Grunde zu legen hat.

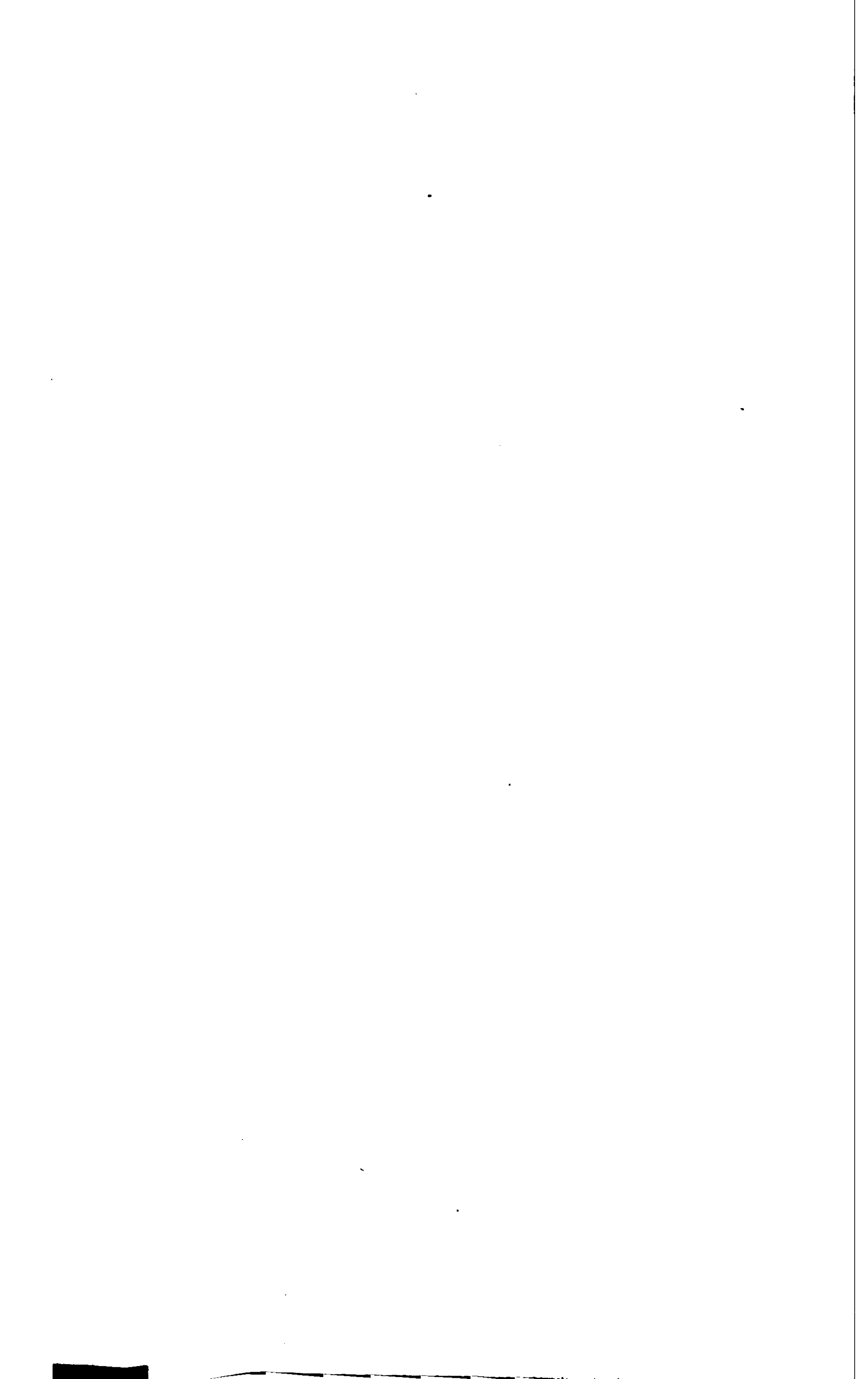
Druckfehler-Verzeichniss des I. Bandes.

Seite	32,	Zeile	10	v. u.	lies	Letzteren statt Letzterem.
„	69,	„	19	v. o.	„	6456 st. 7456.
„	165,	„	13	v. o.	„	p und $n-p$ st. $n-p$.
„	180,	„	10	v. o.	„	des einen st. der einen und des anderen st. der anderen.
„	208,	„	20	v. u.	„	gehenden st. senkrechten.
„	238,	„	19	v. u.	„	$AG=AB$ st. $AG=AG$.
„	241,	„	8	v. u.	„	$B'D$ st. $B'D'$.
„	242,	„	9	v. o.	„	die st. der.
„	256,	„	21	v. u.	„	Summe st. Differenz.
„	256,	„	18	v. u.	„	Differenz st. Summe.
„	268,	„	20	v. u.	„	ABC st. BDC.
„	270,	„	1	v. u.	„	c st. h.
„	288,	„	16	v. o.	„	90 Grad = 60 Minuten st. 60 Minuten.
„	288,	„	20	v. u.	„	Graden st. Geraden.
„	291,	„	15	v. u.	„	aneinander st. aneinder.
„	299,	„	17	v. u.	„	des st. der.
„	351,	„	24	v. u.	„	AC_1 st. AC.
„	351,	„	20	v. u.	„	CB_2 st. BC_2.
„	366,	„	2	v. u.	„	gegebenen Linie st. Linie.
„	395,	„	24	v. u.	„	einen und denselben st. einem und demselben.
„	433,	„	4	v. u.	„	Seiten st. Seite.
„	443,	„	12	v. o.	„	$a^2\sqrt{3}$ st. $2a^2\sqrt{3}$.
„	448,	„	16	v. o.	„	Drehungsachse st. Drehungsache.
„	460,	„	21	v. u.	„	7,5 g st. 7, g.
„	463,	„	8	v. o.	„	$\sqrt{G}-\sqrt{g}$ st. $\sqrt{g}-\sqrt{G}$.
„	466,	„	4	v. u.	„	cbm st. bm.
„	470,	„	3	v. o.	„	$\frac{1}{2}a+h$ st. $\frac{1}{2}a-h$.
„	470,	„	4	v. o.	„	$(a-h)^2$ st. $(a-h)\,2$.
„	475,	„	8	v. u.	„	$\frac{10}{12{,}806}$ st. $\frac{10}{1286}$.
„	483,	„	6	v. o.	„	$(2n+1)$ st. $2n$.
„	483,	„	8	v. o.	„	π st. 2π.
„	494,	„	15	v. u.	„	0,005500 st. 0,05500.
„	494,	„	13	v. u.	„	9,49779 st. 0,49779.
„	494,	„	12	v. u.	„	7,74036 st. 8,74036.
„	494,	„	8	v. u.	„	3,41411 st. 3,4141 v.
„	495,	„	5	v. o.	„	§ 13 st. § 3.
„	500,	„	20	v. u.	„	$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ st. $\cos\frac{1}{2}\alpha-\beta$.
„	527,	„	13	v. o.	„	c^2 st. $-c^2$.
„	527,	„	14	v. o.	„	-1 st. $=1$.

Tafel VIII, Figur 4, links von S lies U statt V.



II.
1.
2.
5.
6.
P
M
Q
J
T₂
T₁
S₂
S₁
E₂
E₁
a″
b″
a′
b′
γ′
β′
A″
B″
C″
D″
Δ″
A′
B′
C′
D′
Δ′
F″
A
B
C
D
E
F′
G
N
A‴
B‴
C‴
F‴



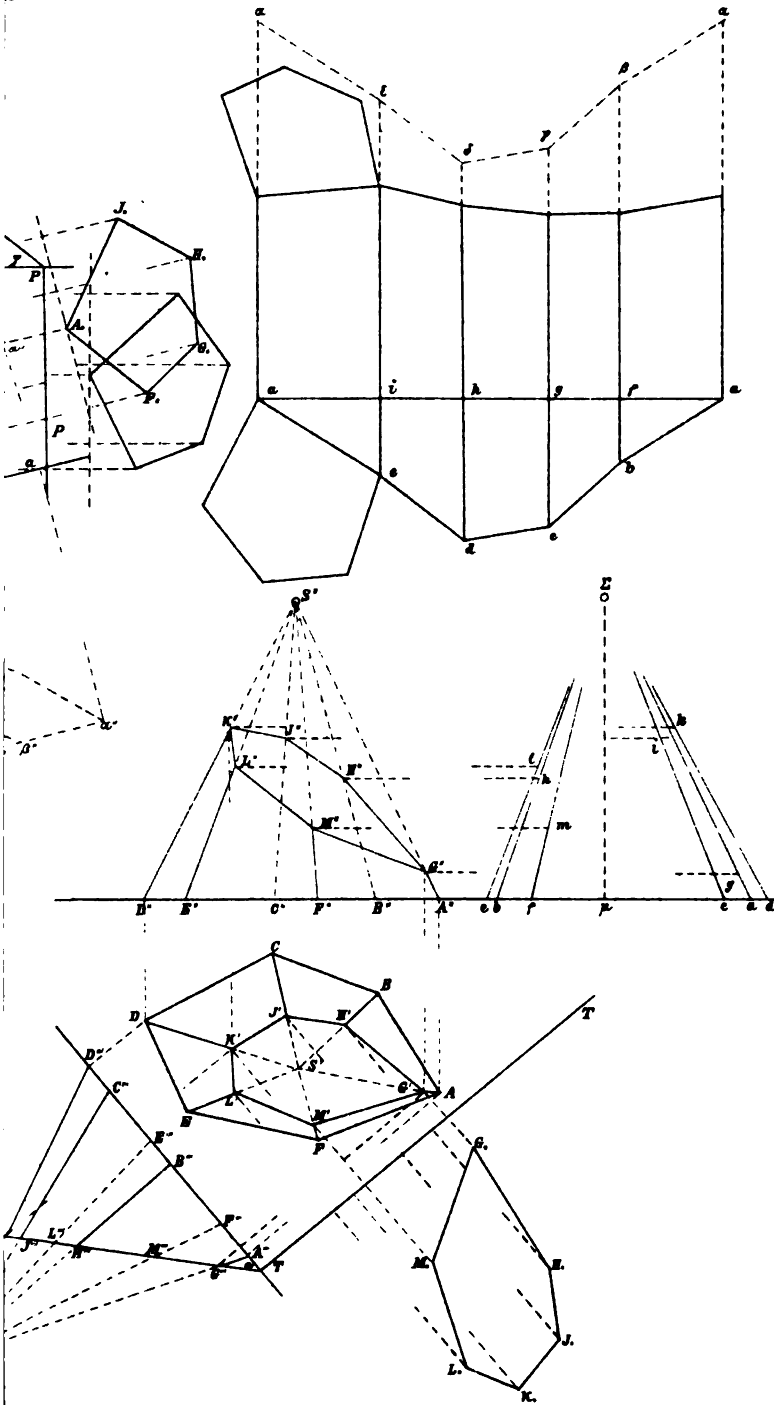
III.

1.

2.

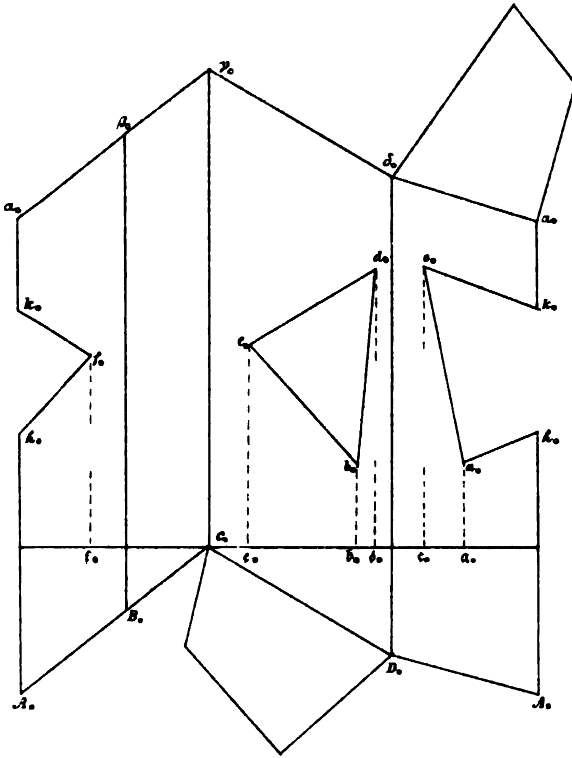
Lith. Inst. E. Putz Nachfl. E. Pietsch, Breslau.

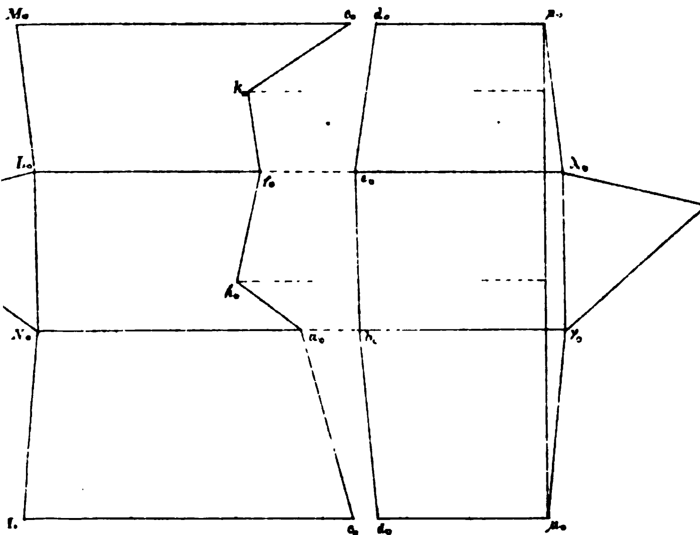
IV.



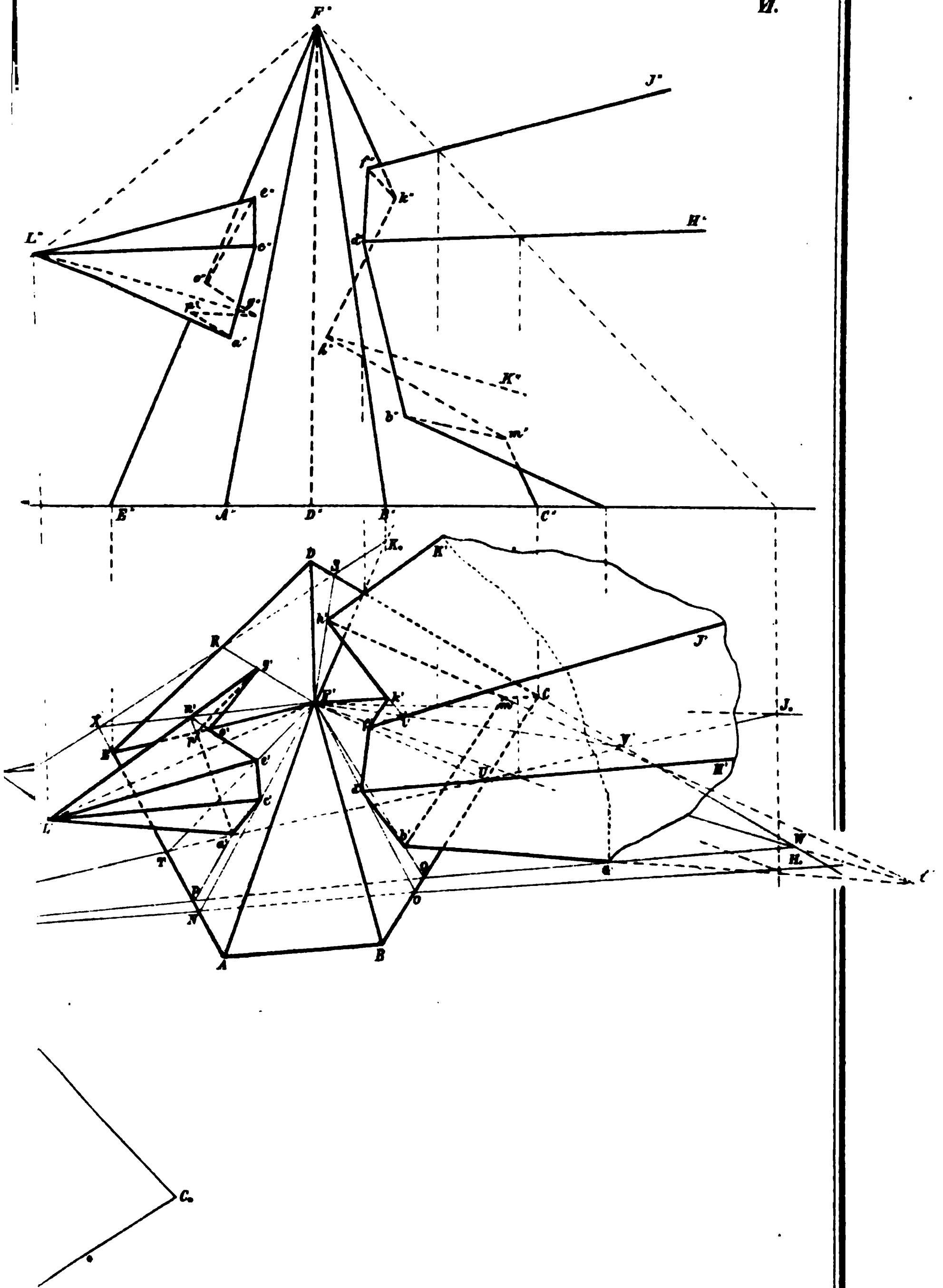
Lith.Anst.v.H. Putz Nachfl. E. Pietsch, Breslau.

V.

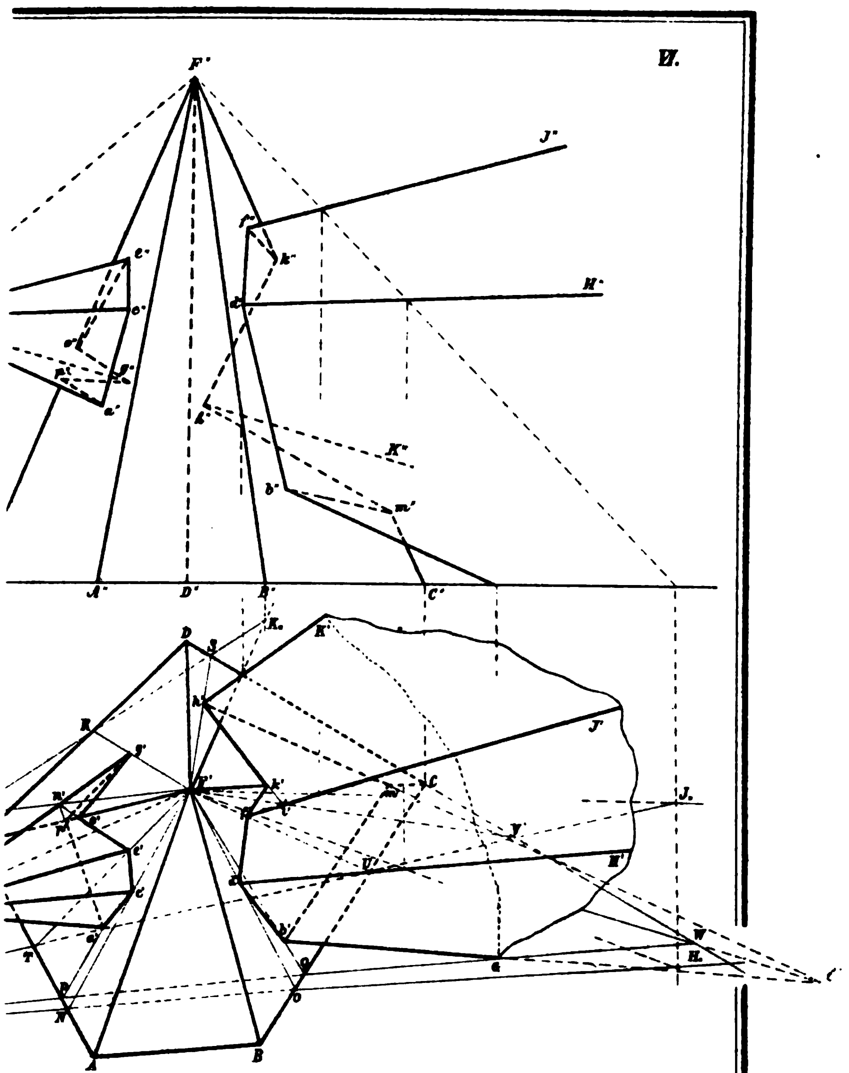




Lith. Inst. v. H. Putz Nachfl. E. Plotsch, Breslau.



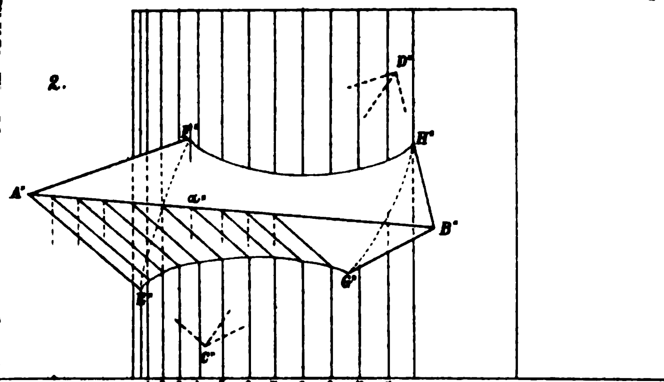
Lith. Inst. v. E. Putz Nachfl. R. Pietsch, Breslau.

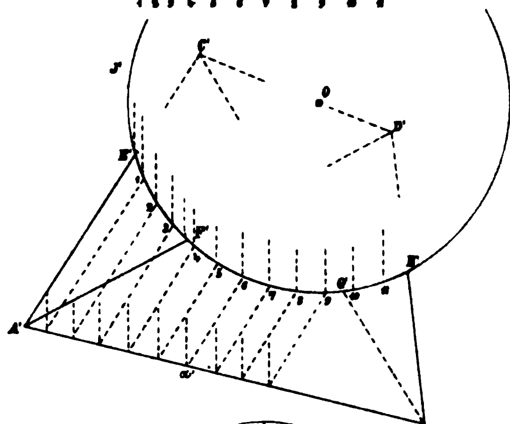


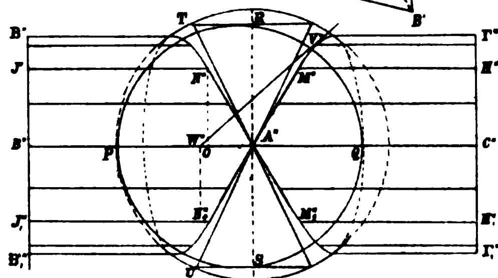
C₀

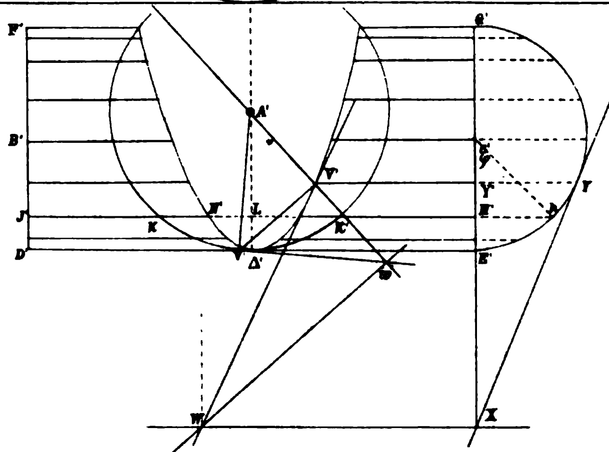
Lith. Inst. v. H. Putz Nachf. E. Pietsch, Breslau.

VIII.

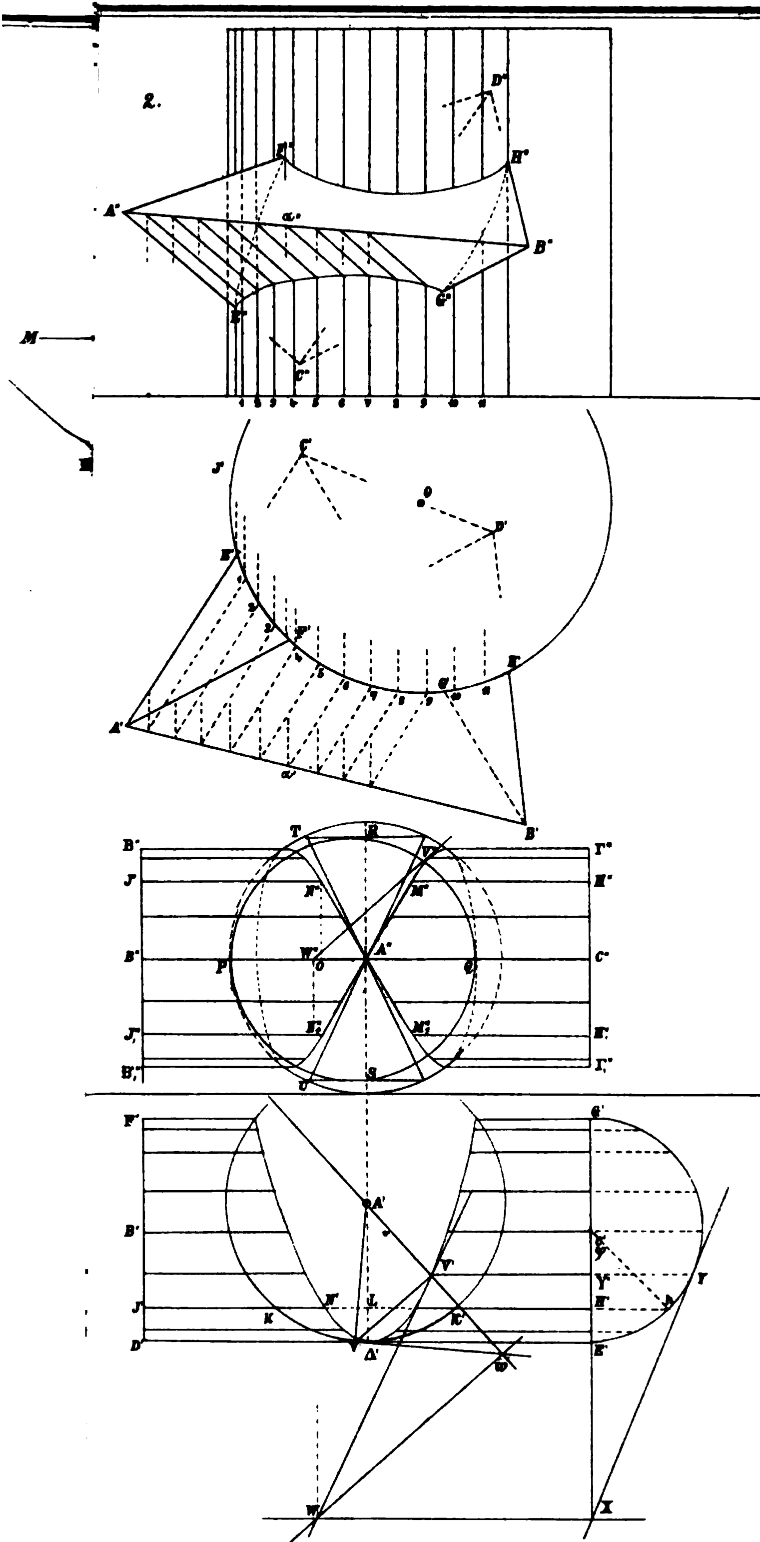








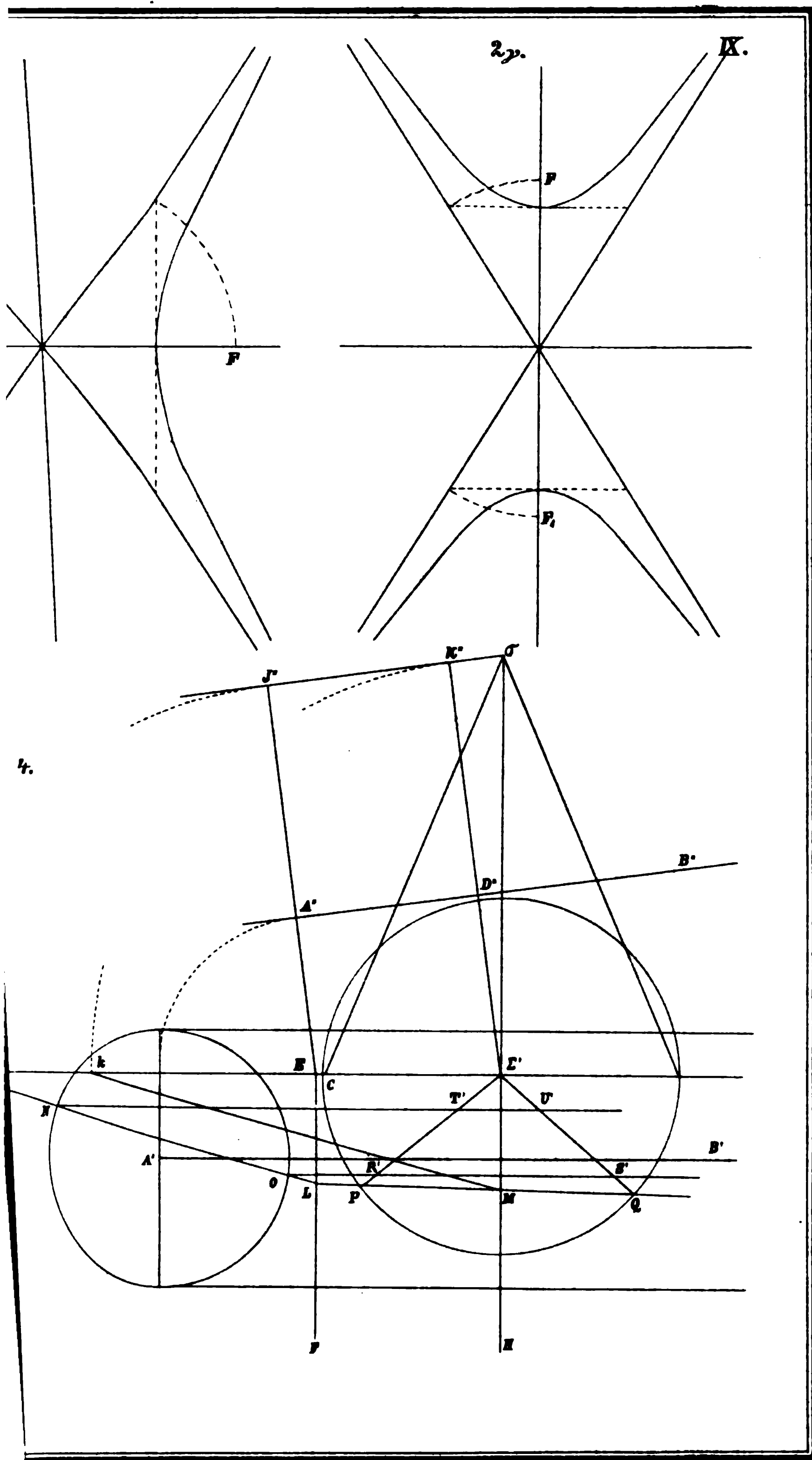
Lith. Inst. E. Pütz Nachfl. F. Pietsch, Breslau.



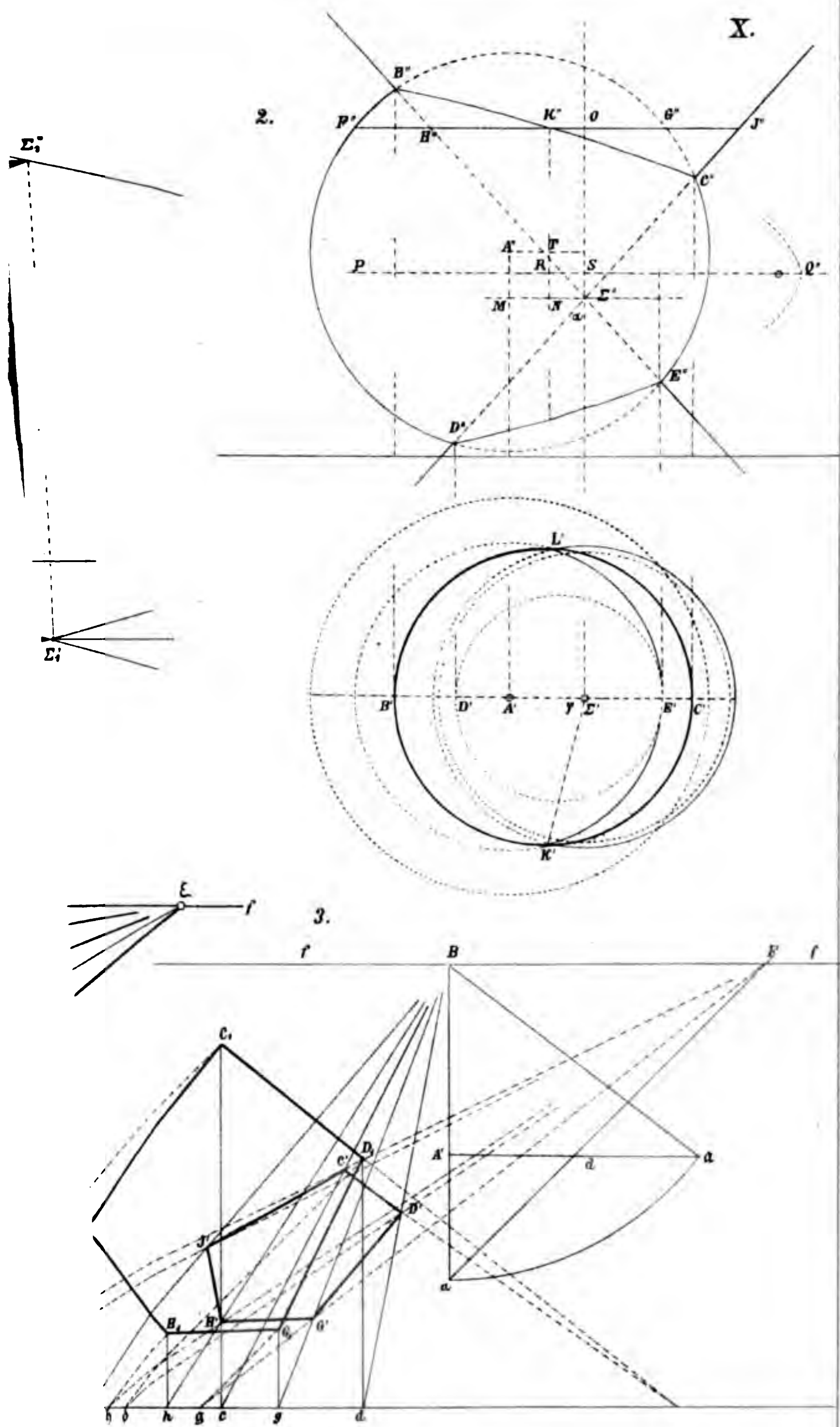
Lith. Inst. E. Putz Nachfl. F. Pietsch, Breslau.

2β-

4.

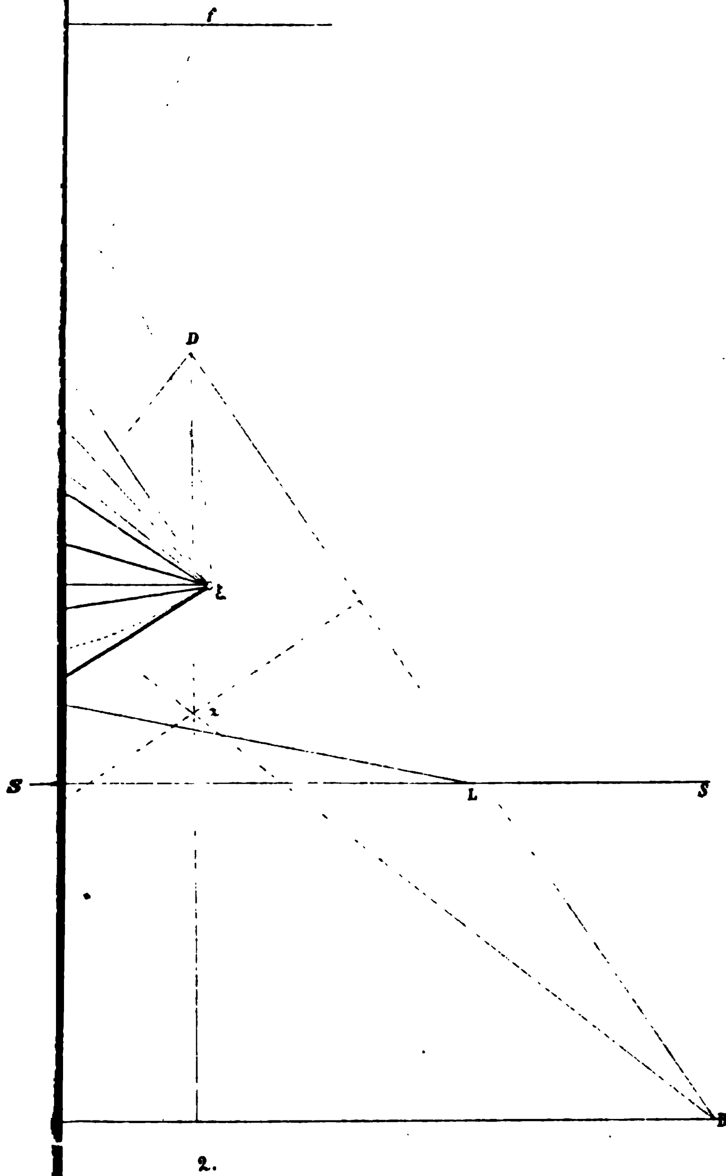


Lith. Inst. E. Peta Nachfl. E. Pietsch, Breslau.



Lith. Inst. E. Putz Nachfl. R. Pietsch, Breslau.

XI.



Lith. Inst. E. Putz Nachf. E. Pietsch, Breslau.

XII.

Lith. Inst. E. Pohs Nachfl. E. Pietsch. Breslau.

